EGZAMIN GIMNAZJALNY
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014

CZĘŚĆ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZA
MATEMATYKA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMATY PUNKTOWANIA

ARKUSZ GM-M1-142

KWIECIEŃ 2014

Liczba punktów za zadania zamknięte i otwarte: 28

Zadania zamknięte

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Zasady przyznawania punktów
1.	C	• poprawna odpowiedź – 1 pkt • błędna odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 pkt
2.	D	
3.	PP	
4.	B	
5.	B	
6.	D	
7.	A	
8.	B	
9.	B	
10.	D	
11.	C	
12.	A	
13.	B	
14.	FF	
15.	D	
16.	PP	
17.	C	
18.	A	
19.	NC	
20.	C	

Zadania otwarte

UWAGA

- **Za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.**
- **Jeśli na jakimkolwiek etapie rozwiązania zadania popełniono jeden lub więcej błędów rachunkowych, ale zastosowane metody były poprawne, to obniżmy ocenę całego rozwiązania o 1 punkt.**

Zadanie 21. (0–3)

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób

Koszt korzystania z basenu bez karty rabatowej:
$12 \cdot 16 = 192$ (zł)
Koszt korzystania z basenu z kartą rabatową:
$8 \cdot 10 + 9 \cdot 6 = 80 + 54 = 134$ (zł)
$50 + 134 = 184$ (zł)

184 zł < 192 zł
Odpowiedź. Zakup karty rabatowej był dla Wojtka opłacalny.

II sposób

Kwota zaoszczędzona dzięki zakupowi karty rabatowej:
$(12 - 8) \cdot 10 = 40$ (zł)
$(12 - 9) \cdot 6 = 18$ (zł)
$40 + 18 = 58$ (zł)
Koszt zakupu karty jest równy 50 zł.
50 zł < 58 zł
Koszt zakupu karty rabatowej jest niższy niż kwota zaoszczędzona przy opłacie za 16 godzin pływania.
Odpowiedź. Zakup karty rabatowej był opłacalny.

Poziom wykonania

P_6 – 3 punkty – pełne rozwiązanie
zapisanie wniosku wynikającego z poprawnych obliczeń

$P_{5,4}$ – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)
obliczenie kosztów korzystania z basenu w obu przypadkach, ale bez zapisania wniosku (bez porównania liczb 192 i 184)
lub
poprawny sposób obliczenia kosztu korzystania z basenu przy zakupie karty rabatowej z uwzględnieniem kosztu jej zakupu i poprawny sposób obliczenia kosztu korzystania z basenu bez karty rabatowej
lub
obliczenie kwoty zaoszczędzonej dzięki zakupowi karty rabatowej bez uwzględnienia kosztu zakupu karty (58 zł)

P_2 – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane
obliczenie kosztu korzystania z basenu bez karty rabatowej (192 zł)
lub
obliczenie kosztu korzystania z basenu z kartą rabatową bez uwzględnienia kosztu zakupu karty (134 zł)
lub
poprawny sposób obliczenia kosztu korzystania z basenu z kartą rabatową z uwzględnieniem kosztu zakupu karty

lub
poprawny sposób obliczenia kwoty zaoszczędzonej dzięki zakupowi karty rabatowej

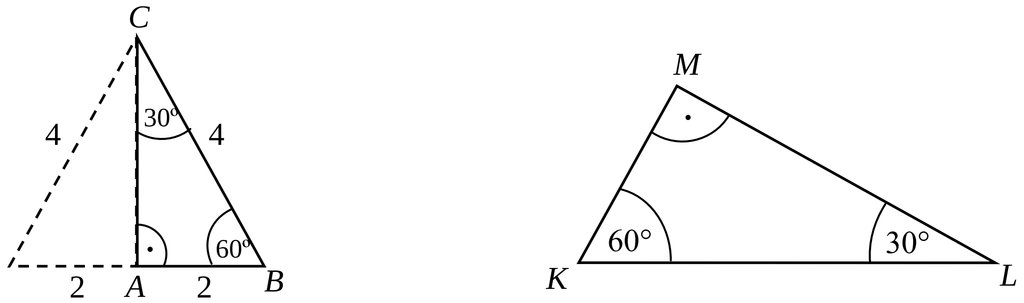
P_0 – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Zadanie 22. (0–2)

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób

$|\sphericalangle KLM| = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$



W trójkącie *ABC* przyprostokątna *AB* jest połową przeciwprostokątnej *BC*, co oznacza, że trójkąt *ABC* jest połową trójkąta równobocznego, czyli jego kąty ostre mają miary 30º i 60º. Miary kątów tych trójkątów są równe, zatem trójkąty *ABC* i *KLM* są podobne.

II sposób

Obliczamy długość boku *AC*
$|AC| = 2\sqrt{3}$
Po wprowadzeniu oznaczeń uwzględniających zależności: $|KM| = x$, $|ML| = x\sqrt{3}$, $|KL| = 2x$, $|AC| = 2\sqrt{3}$ i obliczeniu stosunku odpowiednich boków otrzymujemy:

$$\frac{|KL|}{|CB|} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}, \qquad \frac{|KM|}{|AB|} = \frac{x}{2}, \qquad \frac{|ML|}{|AC|} = \frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{x}{2}$$

Wniosek
Odpowiednie boki trójkątów *KLM* i *ABC* są proporcjonalne, zatem trójkąty są podobne.

Poziom wykonania

P_6 – 2 punkty – pełne rozwiązanie
uzasadnienie, że trójkąty są podobne na podstawie równości kątów (I sposób)
lub
uzasadnienie, że długości odpowiednich boków trójkątów są proporcjonalne (II sposób)

P_4 – 1 punkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne

zapisanie miary co najmniej jednego z kątów ostrych w trójkącie *ABC* oraz stwierdzenie, że trójkąty są podobne
lub
uzasadnienie, że w trójkącie *ABC* jeden z kątów ostrych ma miarę 60º (30º)
lub
zapisanie zależności między długościami boków trójkąta *KLM* (x, $x\sqrt{3}$, $2x$)

P_0 – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

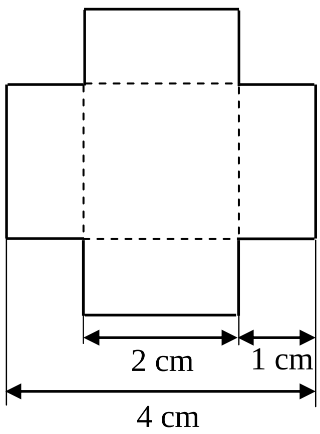
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Zadanie 23. (0–3)

<u>Przykładowe sposoby rozwiązania</u>

I sposób

a – długość krawędzi sześcianu
$a = 4$ cm
Pole powierzchni sześcianu jest równe
$P_c = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 6 = 96\text{ cm}^2$



Pole jednej ściany bryły powstałej po usunięciu z narożników małych sześcianów jest równe
$P_1 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 2(2 + 1 \cdot 4) = 2 \cdot 6 = 12\ (\text{cm}^2)$
lub
$P_1 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8 + 4 = 12\ (\text{cm}^2)$
lub
$P_1 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16 - 4 = 12\ (\text{cm}^2)$
Jest 6 takich ścian, zatem ich pole jest równe
$P = 6 \cdot 12\text{ cm}^2 = 72\text{ cm}^2$
W każdym narożniku powstałej bryły są trzy ściany o polu 1 cm^2 każda, więc pole powierzchni tych ścian w ośmiu narożnikach jest równe $8 \cdot 3\text{ cm}^2 = 24\text{ cm}^2$.
Pole powierzchni całkowitej powstałej bryły jest równe
$P_c = 72 + 24 = 96\ (\text{cm}^2)$.

Odpowiedź. Pole powierzchni powstałej bryły jest równe polu sześcianu.

II sposób

Długość krawędzi sześcianu jest równa 4 cm. Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 16 cm^2, a całego sześcianu P_c = 16 cm$^2 \cdot 6$ = 96 cm^2.
Jeżeli z każdego narożnika dużego sześcianu usuniemy po jednym małym sześcianie, to pole powierzchni każdej ściany jest mniejsze o 4 cm^2 i wynosi 12 cm^2.
Zatem pole powierzchni wszystkich takich ścian jest równe: $6 \cdot 12$ cm^2 = 72 cm^2.
W ośmiu narożnikach powstałej bryły są po trzy ściany o polu 1 cm^2 każda, więc pole powierzchni wszystkich tych ścian jest równe $8 \cdot 3$ cm^2 = 24 cm^2.
Zatem pole powierzchni całkowitej powstałej bryły jest równe
$P_c = 72 + 24 = 96$ (cm^2).

Odpowiedź. Pole powierzchni powstałej bryły jest równe polu sześcianu.

III sposób

Sześcian składa się z 64 małych sześcianów o krawędzi 1 cm każdy, więc krawędź tego sześcianu ma długość 4 cm. Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 16 cm^2, a całego sześcianu P_c = 16 cm$^2 \cdot 6$ = 96 cm^2.
Jeżeli z każdego narożnika dużego sześcianu usuniemy po jednym małym sześcianie, to pole powierzchni całkowitej nie zmieni się, ponieważ liczba ścian usuniętych i pozostałych w każdym narożniku powstałej bryły jest taka sama.
Zatem pole powierzchni powstałej bryły jest równe 96 cm^2.

Odpowiedź. Pola powierzchni obu brył są równe.

Poziom wykonania

P_6 – 3 punkty – pełne rozwiązanie

obliczenie pól powierzchni obu brył i zapisanie wniosku o równości pól
lub
obliczenie pola powierzchni sześcianu (96 cm^2) i uzasadnienie, że pole powierzchni powstałej bryły jest równe polu powierzchni sześcianu

P_4 – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne

obliczenie pola powierzchni powstałej bryły (96 cm^2), bez obliczenia pola powierzchni sześcianu
lub
obliczenie pola powierzchni sześcianu (96 cm^2) i zapisanie wniosku o równości pól obu brył bez uzasadnienia
lub
obliczenie pola powierzchni sześcianu (96 cm^2) i pola powierzchni ścian w kształcie „krzyża” w powstałej bryle (72 cm^2)
lub
obliczenie pola powierzchni sześcianu (96 cm^2) i pola powierzchni ścian w narożach powstałej bryły (24 cm^2)

P_2 – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane

poprawny sposób obliczenia pola powierzchni sześcianu
lub
poprawny sposób obliczenia pola jednej ściany w kształcie „krzyża” w powstałej bryle
lub
poprawny sposób obliczenia pola powierzchni trzech ścian w narożu po usunięciu małego sześcianu

P_0 – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania