INFORMATOR
o **egzaminie maturalnym** z **matematyki**

jako przedmiotu obowiązkowego (poziom podstawowy)

od roku szkolnego 2024/2025

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2024

Zespół redakcyjny:

Mariusz Mroczek (CKE)
Piotr Hess (CKE)
Hubert Rauch (CKE)
Marian Pacholak (OKE Warszawa)
dr Wioletta Kozak (CKE)
dr Marcin Smolik (CKE)
Piotr Ludwikowski (OKE Kraków)
Ewa Ludwikowska (OKE Gdańsk)
Joanna Berner (OKE Warszawa)

Recenzenci:

prof. dr hab. Zbigniew Marciniak (UW)
dr hab. Maciej Borodzik (UW)
dr Łukasz Bożyk (UW)
dr Joanna Jaszuńska (UW)
Ewa Dolaczyńska (recenzja nauczycielska)
Agata Górniak (recenzja nauczycielska)
dr Tomasz Karpowicz (recenzja językowa)

Informator został opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 784 16 00
sekretariat@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 01
oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. 86 473 71 20
sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 664 80 60
sekretariat@lodz.oke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
ul. Józefa Bema 87, 01-233 Warszawa
tel. 22 457 03 35
info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
sekretariat@oke.wroc.pl

Spis treści

1. Opis egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym

WSTĘP

Matematyka jest jednym z obowiązkowych przedmiotów na egzaminie maturalnym. Wszyscy zdający przystępują do egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym. Każdy maturzysta może również przystąpić do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym jako przedmiotu dodatkowego.

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym sprawdza, w jakim stopniu zdający spełnia wymagania określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej[1].

Podstawa programowa dzieli wymagania na ogólne i szczegółowe. Wymagania ogólne mają podstawowe znaczenie, gdyż syntetycznie ujmują nadrzędne cele kształcenia w nauczaniu matematyki. Wymagania szczegółowe odwołują się do ściśle określonych wiadomości i konkretnych umiejętności.

Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2024/2025 jest podzielony na dwie części, zamieszczone jako osobne pliki.

CZĘŚĆ PIERWSZA zawiera:
- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na **poziomie podstawowym**
- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie podstawowym.

CZĘŚĆ DRUGA zawiera:
- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na **poziomie rozszerzonym**
- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie rozszerzonym.

CZĘŚĆ DRUGA jest dostępna tutaj.

Informator prezentuje przykładowe zadania egzaminacyjne wraz z rozwiązaniami. Do każdego zadania dodano wykaz wymagań ogólnych i szczegółowych z podstawy programowej kształcenia ogólnego, którym odpowiada dane zadanie. Zadania w *Informatorze* nie ilustrują wszystkich wymagań szczegółowych na poziomie podstawowym określonych w podstawie programowej, nie wyczerpują również wszystkich typów zadań, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym. Tylko realizacja wszystkich wymagań z podstawy programowej, zarówno ogólnych, jak i szczegółowych, może zapewnić właściwe przygotowanie w zakresie matematyki, w tym – właściwe przygotowanie do egzaminu maturalnego.

---

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

ZADANIA NA EGZAMINIE

W arkuszu egzaminacyjnym znajdą się zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte.

Zadania zamknięte to takie, w których zdający wybiera odpowiedź spośród podanych.
Wśród zadań zamkniętych mogą znaleźć się:

- zadania wyboru jednokrotnego
- zadania wyboru wielokrotnego
- zadania typu prawda-fałsz
- zadania na dobieranie.

Zadania otwarte to takie, w których zdający samodzielnie formułuje odpowiedź.
Wśród zadań otwartych mogą znaleźć się:

- zadania z luką, wymagające uzupełnienia zdania albo zapisania odpowiedzi jednym lub kilkoma wyrazami, symbolami lub wyrażeniami matematycznymi określającymi własności obiektów matematycznych, w tym wykonania lub uzupełniania wykresu, zależności, diagramu, tabeli
- zadania krótkiej odpowiedzi, wymagające wykonania prostego obliczenia lub bezpośredniego zapisania rozwiązania albo zapisania przeprowadzonego rozumowania lub obliczenia zwykle w dwóch lub trzech etapach
- zadania rozszerzonej odpowiedzi, wymagające utworzenia strategii rozwiązania problemu matematycznego i przedstawienia jej realizacji.

Przedstawione przez zdającego rozwiązanie zadania otwartego, w którym zdający m.in. oblicza, wyznacza, wyprowadza, uzasadnia, wykazuje, musi prezentować pełny tok rozumowania, uwzględniać warunki zadania, a także odwoływać się do twierdzeń matematycznych i własności odpowiednich obiektów matematycznych.

Wszystkie zadania egzaminacyjne będą sprawdzały poziom opanowania umiejętności określonych w następujących wymaganiach ogólnych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej (w nawiasach zapisano numery celów kształcenia podstawy programowej):

- sprawność rachunkowa (I)
- wykorzystanie i tworzenie informacji (II)
- wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (III)
- rozumowanie i argumentacja (IV).

Zadania egzaminacyjne będą dotyczyły następujących obszarów tematycznych matematyki (w nawiasach zapisano numery treści nauczania podstawy programowej):

- liczby rzeczywiste, wyrażenia algebraiczne, równania i nierówności, układy równań (I, II, III, IV)
- funkcje, ciągi, optymalizacja (V, VI, XIII)
- trygonometria, planimetria, geometria analityczna, stereometria (VII, VIII, IX, X)
- kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka (XI, XII).

Aby sprawdzić opanowanie przez zdających wymagania ogólnego „IV. rozumowanie i argumentacja”, wśród zadań egzaminacyjnych znajdą się zadania na dowodzenie, wymagające od zdającego przeprowadzenia dowodu matematycznego. W celu sprawdzenia opanowania przez zdających wymagania ogólnego „III. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych” wśród zadań egzaminacyjnych mogą znaleźć się zadania z kontekstem praktycznym / realistycznym. Zadania tego typu będą miały uproszczone założenia, tzn. będą pomijały niektóre rzeczywiste warunki. Dzięki takiej idealizacji zagadnienia będzie można łatwiej zbudować jego adekwatny model matematyczny, który – po pierwsze – będzie opisywał istotę zagadnienia, po drugie – będzie korzystał z narzędzi dostępnych na danym etapie nauczania, a po trzecie – nie będzie wymagał specjalistycznej wiedzy z danego kontekstu.

OPIS ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym trwa 180 minut[2]. W arkuszu egzaminacyjnym znajdzie się od 27 do 39 zadań. Łączna liczba punktów, jakie można uzyskać za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu, jest równa 50.

Liczbę zadań oraz liczbę punktów możliwych do uzyskania za poszczególne rodzaje zadań w całym arkuszu przedstawiono w poniższej tabeli.

Rodzaj zadań	Liczba zadań	Łączna liczba punktów	Udział w wyniku sumarycznym
zamknięte	20–25	25	50%
otwarte	7–14	25	50%
RAZEM	**27–39**	**50**	**100%**

W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania. Wiązka zadań to zestaw od dwóch do czterech zadań występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać niezależnie od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiązka zadań może się składać zarówno z zadań zamkniętych, jak i z zadań otwartych.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych zdający będą zaznaczali na karcie odpowiedzi (z wyjątkiem zdających ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, którzy są zwolnieni z tego obowiązku).

[2] Czas trwania egzaminu może zostać wydłużony w przypadku zdających ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, w tym niepełnosprawnych, oraz w przypadku cudzoziemców. Szczegóły są określane w *Komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sprawie szczegółowych sposobów dostosowania warunków i form przeprowadzania egzaminu maturalnego* w danym roku szkolnym.

Zasady oceniania

Zadania zamknięte

Zadania zamknięte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

ALBO

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
1 pkt – odpowiedź częściowo poprawna lub odpowiedź niepełna.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadania otwarte

Za poprawne rozwiązanie zadania otwartego będzie można otrzymać maksymalnie 1, 2, 3 lub 4 punkty. Za każde poprawne rozwiązanie, inne niż opisane w zasadach oceniania, można przyznać maksymalną liczbę punktów, o ile rozwiązanie jest merytorycznie poprawne, zgodne z poleceniem i warunkami zadania.

Zadania otwarte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

Zadania otwarte z luką

W tych zadaniach za każdą poprawnie uzupełnioną lukę można otrzymać po 1 pkt.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1 pkt:

  1 pkt – rozwiązanie poprawne.
  0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

  2 pkt – rozwiązanie poprawne.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 3 pkt:

  3 pkt – rozwiązanie poprawne.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym dokonany został istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 4 pkt:

  4 pkt – rozwiązanie poprawne.
  3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

W rozwiązaniu zadań otwartych wyróżniony został najważniejszy etap, nazywany pokonaniem zasadniczych trudności zadania. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie można otrzymać za bezbłędne rozwiązanie danego zadania. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżnia się jeszcze jeden etap (w przypadku zadań za 3 pkt) lub dwa etapy poprzedzające (w przypadku zadań za 4 pkt): dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania oraz/lub dokonanie niewielkiego postępu, który jest konieczny do rozwiązania zadania.

Etapy rozwiązania dla każdego zadania będą opisane w zasadach oceniania dla danego zadania. Ponadto dla różnych sposobów rozwiązania danego zadania te same etapy będą opisywały w zasadach oceniania <u>jakościowo równoważny postęp</u> na drodze do rozwiązania zadania.

WYBRANE OZNACZENIA I SYMBOLE MATEMATYCZNE

W zadaniach z matematyki na poziomie podstawowym mogą być stosowane następujące oznaczenia i symbole matematyczne:

- $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych
- $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych
- $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych
- $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych
- $A \cup B$ – suma zbiorów A oraz B
- $A \cap B$ – iloczyn zbiorów A i B (część wspólna zbiorów A i B)
- $A \setminus B$ – różnica zbioru A i zbioru B
- $A \subset B$ – zbiór A jest podzbiorem zbioru B
- $x \in A$ – element x należy do zbioru A
- $[a,b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x \leq b$
  $[a,b)$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x < b$
  $(a,b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x \leq b$
  (a,b) – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x < b$
  Krańce przedziałów domkniętych zdający może oznaczać także – odpowiednio:
  $\langle a,b \rangle$, $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$.

MATERIAŁY I PRZYBORY POMOCNICZE NA EGZAMINIE Z MATEMATYKI

Materiały i przybory pomocnicze, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym z matematyki, to:

- linijka
- cyrkiel
- kalkulator prosty
- *Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki*.

Szczegółowe informacje dotyczące materiałów i przyborów pomocniczych, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym (w tym osoby, którym dostosowano warunki przeprowadzenia egzaminu), będą ogłaszane w komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

2. Przykładowe zadania z rozwiązaniami

W *Informatorze* dla każdego zadania podano:

- liczbę punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie (w nawiasach, po numerze zadania)
- najważniejsze wymagania ogólne i szczegółowe, które są sprawdzane w tym zadaniu
- zasady oceniania rozwiązania tego zadania
- poprawne rozwiązanie w przypadku zadania zamkniętego oraz przykładowe rozwiązanie w przypadku zadania otwartego.

W przykładowych rozwiązaniach zadań otwartych są wyodrębnione dodatkowe komentarze, które nie podlegają ocenie. Dodatkowe komentarze wyodrębniono w ramkach (podobnie jak ten akapit).

LICZBY RZECZYWISTE, WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $2024 : \left(1 - \frac{1}{2025}\right) - \left(1 - \frac{2025}{2024}\right) : \frac{1}{2024}$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2024 **D.** 2026

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 2. (0–2)

Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y

A. o 40% pensji pana Y.
B. o 90% pensji pana Y.
C. o 150% pensji pana Y.
D. o 275% pensji pana Y.

2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X

E. o 60% pensji pana X.
F. o 73% pensji pana X.
G. o 90% pensji pana X.
H. o 150% pensji pana X.

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych […] przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne dokończenia dwóch zdań.
1 pkt – poprawne dokończenie jednego zdania.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1. C
2. E

Zadanie 3. (0–2)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $\boldsymbol{n}$ liczba $(\boldsymbol{3n+5})^2+\boldsymbol{11n^2-18}$ przy dzieleniu przez $\boldsymbol{5}$ daje resztę $\boldsymbol{2}$.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $(3n+5)^2+11n^2-18$ do postaci $5\cdot(4n^2+6n+1)+2$ **oraz** zapisanie, że $4n^2+6n+1$ jest liczbą całkowitą.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $(3n+5)^2+11n^2-18$ do postaci $20n^2+30n+7$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Powołamy się na definicję reszty z dzielenia dwóch liczb całkowitych. Liczba całkowita W przy dzieleniu przez liczbę całkowitą P daje resztę całkowitą R wtedy, gdy istnieje liczba całkowita Q taka, że $W=P\cdot Q+R$ oraz $0\le R<|P|$.
(Np. liczba 22 przy dzieleniu przez 5 daje resztę równą 2, ponieważ $22=5\cdot 4+2$, gdzie 4 jest liczbą całkowitą oraz $2<5$).

Liczbę określoną w zadaniu przekształcimy do postaci $5\cdot Q+2$:

$$(3n+5)^2+11n^2-18=9n^2+30n+25+11n^2-18=20n^2+30n+7=$$
$$=20n^2+30n+5+2=5\cdot(4n^2+6n+1)+2$$

Ponieważ n jest liczbą całkowitą, więc $4n^2$ oraz $6n$ są liczbami całkowitymi.
Suma tych liczb całkowitych oraz liczby 1 jest liczbą całkowitą.
Zatem liczba $(3n+5)^2+11n^2-18$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zadanie 4. (0–3)

Rozważmy dwie <u>kolejne</u> liczby naturalne a i b takie, że $a < b$ oraz obie są <u>niepodzielne</u> przez 3.

Udowodnij, że liczba $\boldsymbol{a^2 + 11ab + b^2}$ jest <u>podzielna</u> przez $\boldsymbol{9}$.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: zapisanie $a^2 + 11ab + b^2$ jako $9 \cdot (13k^2 + 13k + 3)$ **oraz** zapisanie, że $13k^2 + 13k + 3$ jest liczbą całkowitą

ALBO

– przeprowadzenie pełnego dowodu: zapisanie $a^2 + 11ab + b^2$ jako $117k^2 + 117k + 27$ **oraz** zapisanie, że każdy składnik tej sumy jest podzielny przez 9,

ALBO

– przeprowadzenie pełnego dowodu: zapisanie $a^2 + 11ab + b^2$ w postaci $9ab + (a + b)^2$ **oraz** zapisanie, że liczba $9ab$ jest podzielna przez 9 **oraz** zapisanie, że liczba $(a + b)^2$ jest podzielna przez 9 jako kwadrat liczby podzielnej przez 3.

2 pkt – zapisanie $a^2 + 11ab + b^2$ jako $(3k + 1)^2 + 11(3k + 1)(3k + 2) + (3k + 2)^2$ **oraz** przekształcenie tego wyrażenia do postaci $117k^2 + 117k + 27$

ALBO

– zapisanie liczby $a^2 + 11ab + b^2$ w postaci $9ab + (a + b)^2$ **oraz** zapisanie, że liczba $a + b$ jest podzielna przez 3.

1 pkt – zapisanie liczb a i b w postaci: $a = 3k + 1$ oraz $b = 3k + 2$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

ALBO

– zapisanie liczby $a^2 + 11ab + b^2$ w postaci $9ab + (a + b)^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Krok 1. dowodu

Dwie kolejne liczby naturalne a i b, niepodzielne przez 3, można zapisać w postaci:

$a = 3k + 1$ oraz $b = 3k + 2$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Krok 2. dowodu

Zapiszemy liczbę $a^2 + 11ab + b^2$ z wykorzystaniem zapisu z krok 1. dowodu:

$$\begin{aligned}a^2 + 11ab + b^2 &= (3k + 1)^2 + 11(3k + 1)(3k + 2) + (3k + 2)^2 = \\ &= 9k^2 + 6k + 1 + 11(9k^2 + 9k + 2) + 9k^2 + 12k + 4 = \\ &= 18k^2 + 18k + 5 + 99k^2 + 99k + 22 = \\ &= 117k^2 + 117k + 27 = \\ &= 9 \cdot (13k^2 + 13k + 3)\end{aligned}$$

Krok 3. dowodu

Liczbę $a^2 + 11ab + b^2$ zapisaliśmy jako iloczyn liczby 9 oraz liczby $13k^2 + 13k + 3$. Dlatego, aby udowodnić podzielność przez 9, wystarczy wykazać, że drugi czynnik w rozkładzie jest liczbą całkowitą.

Ponieważ $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, to $13k^2$ oraz $13k$ są liczbami całkowitymi. Suma liczb całkowitych oraz liczby 3 jest liczbą całkowitą. To kończy dowód.

Sposób 2.

Przekształcamy równoważnie wyrażenie $a^2 + 11ab + b^2$:

$$a^2 + 11ab + b^2 = 9ab + a^2 + 2ab + b^2 = 9ab + (a + b)^2$$

Liczba $9ab$ jest podzielna przez 9 dla dowolnych liczb naturalnych a i b.

Liczba a przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.
Liczba b przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.
Stąd liczba $a + b$ jest podzielna przez 3.
Liczba $(a + b)^2$ jest podzielna przez 9 jako kwadrat liczby podzielnej przez 3.

Zatem liczba $a^2 + 11ab + b^2 = 9ab + (a + b)^2$ jest podzielna przez 9 jako suma dwóch liczb podzielnych przez 9. To należało udowodnić.

Zadanie 5. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $n(n^2 + 3n + 2)$ jest podzielna przez 6.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $n(n^2 + 3n + 2)$ do postaci $n(n + 1)(n + 2)$ **oraz** zapisanie, że wśród trzech kolejnych liczb naturalnych n, $n + 1$, $n + 2$ co najmniej jedna jest podzielna przez 2 i dokładnie jedna jest podzielna przez 3.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $n(n^2 + 3n + 2)$ do postaci $n(n + 1)(n + 2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie $n(n^2 + 3n + 2)$ do postaci iloczynu trzech liczb naturalnych.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $n^2 + 3n + 2$ (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

i stąd obliczamy jego pierwiastki:

$$n_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2$$

$$n_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -1$$

Zatem

$$n(n^2 + 3n + 2) = n(n + 1)(n + 2)$$

Wśród każdych trzech kolejnych liczb naturalnych $n,\ n+1,\ n+2$ co najmniej jedna jest podzielna przez 2 i dokładnie jedna jest podzielna przez 3.
Zatem liczba $n(n+1)(n+2)$ dzieli się przez 2 oraz przez 3.
Ponadto liczby 2 oraz 3 są względnie pierwsze.
Zatem liczba $n(n^2+3n+2) = n(n+1)(n+2)$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 6. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\dfrac{\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54}}$ jest równa

A. $\sqrt[3]{\dfrac{76}{49}}$ **B.** (-1) **C.** 4 **D.** $4\sqrt[3]{2}$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 7. (0–2)

Udowodnij, że liczba $3^{45} + 9^{22} + 27^{14}$ jest podzielna przez 37.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […];
   4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $3^{45} + 9^{22} + 27^{14}$ do postaci $3^{42} \cdot 37$.
1 pkt – przekształcenie wyrażenia $3^{45} + 9^{22} + 27^{14}$ do postaci $3^{45} + 3^{44} + 3^{42}$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystając z własności działań na potęgach, otrzymujemy

$$3^{45} + 9^{22} + 27^{14} = 3^{45} + (3^2)^{22} + (3^3)^{14} = 3^{45} + 3^{44} + 3^{42}$$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias

$$3^{45} + 3^{44} + 3^{42} = 3^{42}(3^3 + 3^2 + 1) = 3^{42} \cdot 37$$

Liczba 3^{42} jest liczbą całkowitą, zatem liczba $3^{45} + 9^{22} + 27^{14}$ jest podzielna przez 37.

Zadanie 8. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\left|\sqrt{5}-1\right|-3\left|2-\sqrt{5}\right|$ jest równa

A. (-7)

B. $5-4\sqrt{5}$

C. $4\sqrt{5}-7$

D. $5-2\sqrt{5}$

Wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 9. (0–1)

Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi 3% w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%)

A. 30% **B.** 34% **C.** 36% **D.** 43%

Wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów.

Zasady oceniania

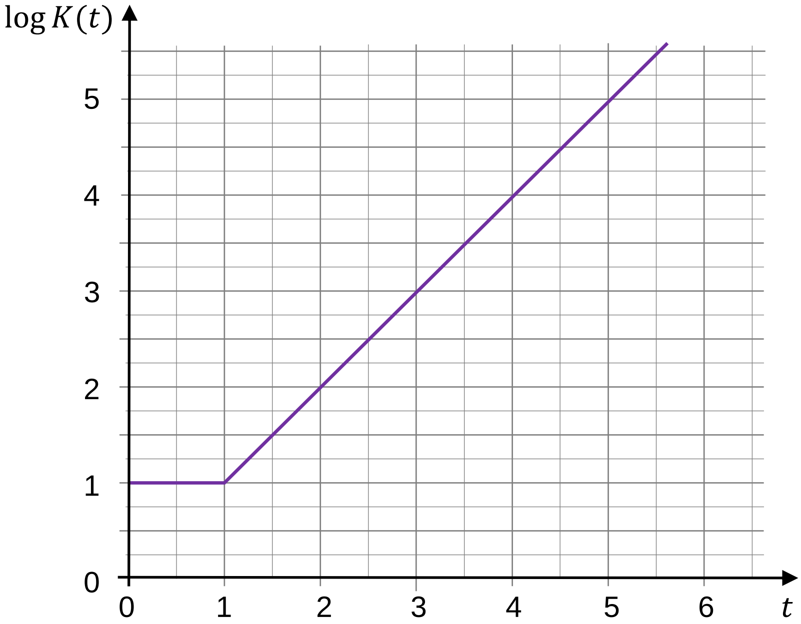
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 10. (0–1)

Na wykresie przedstawiono zależność $\log K(t)$, gdzie $K(t)$ jest liczbą bakterii w próbce po czasie t wyrażonym w godzinach, jaki upłynął od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Gdy upłynęły dokładnie trzy godziny od chwili $t = 0$, liczba K bakterii była równa

A. 3 **B.** 100 **C.** 1000 **D.** 10000

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 11. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_2\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^8\right]$ jest równa

A. $\sqrt{2}$ **B.** 7 **C.** 14 **D.** 2^7

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 12. (0–1)

Dane są liczby $a = \log_2\left(3\sqrt{5} + \sqrt{13}\right)$ oraz $b = \log_2\left(3\sqrt{5} - \sqrt{13}\right)$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $a + b$ jest równa

A. $\log_2 45$ **B.** $\log_2 30$ **C.** 4 **D.** 5

Wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania ([…] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 13. (0–2)

Dane są dwie liczby x i y, takie że iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x+y}{x}$.

Wynik podaj w postaci $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
   1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{x+y}{x}$ do postaci $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{x+y}{x}$ do postaci $1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}$ lub $\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

$$\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}=1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sposób 2.

$$\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}=1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=1+\frac{2-2\sqrt{5}}{-4}=$$
$$=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2+\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sposób 3.

$$\frac{x+y}{x}=\frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x}{y}}=\frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sposób 4.

Z równości $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wyznaczamy x:

$$x=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)y$$

Wyznaczony x podstawimy do wyrażenia $\frac{x+y}{x}$:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot y+y}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot y}=\frac{y\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)}{y\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Zadanie 14. (0–2)

Dane są liczby $a = \sqrt{5} - 2$ oraz $b = \sqrt{5} + 2$.

Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ **dla podanych** a **i** b**.**

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości wyrażenia dla podanych a i b **oraz**
zapisanie poprawnego wyniku: $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = 1$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ do postaci $a \cdot b$

ALBO

– wykazanie, że liczby a i b albo liczby $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ i $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ są wzajemnie odwrotne.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Przekształcamy równoważnie wyrażenie do najprostszej postaci:

$$\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a \cdot b \cdot (a - b)}{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a \cdot b \cdot (a - b)}{a - b} = a \cdot b$$

Podstawiamy wartości a i b do otrzymanego wyrażenia i obliczamy jego wartość:

$$a \cdot b = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

Sposób 2.

Zauważmy, że:

$$a \cdot b = (\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

zatem liczby a i b są wzajemnie odwrotne. Zauważamy także, że:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{a - b}{a - b} = 1$$

co oznacza, że liczby $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ i $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ także są wzajemnie odwrotne, tj. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Z powyższych zależności wynika

$$\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = ab \cdot \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 1 \cdot 1 = 1$$

Zadanie 15. (0–2)

Dana jest liczba $x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, gdzie a należy do zbioru liczb rzeczywistych.
W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ są niewymierne.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Liczba x jest wymierna dla

A. $a = 5$

B. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0{,}3$

C. $a = 6$

D. $a = -2\sqrt{6} + 12{,}5$

E. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$

F. $a = -\sqrt{6}$

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: B i D.
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: B albo D.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

BD

Komentarz

Przekształcimy równoważnie wyrażenie określające liczbę x – w tym celu zastosujemy m.in. wzór skróconego mnożenia:

$$x = a - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = a - \left(\sqrt{3}^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2\right) = a - \left(3-2\sqrt{6}+2\right) =$$
$$= a - \left(5-2\sqrt{6}\right) = a - 5 + 2\sqrt{6}$$

Liczba x będzie wymierna, jeśli liczba a będzie postaci: $a = q - 2\sqrt{6}$, gdzie q będzie dowolną liczbą wymierną:

$$x = q - 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} = q - 5$$

Sprawdzimy, które z liczb a podanych w odpowiedziach **A–F** mają postać $a = q - 2\sqrt{6}$ (gdzie q jest wymierne):

A. $a = 5$

B. $a = \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 + 0{,}3 = 5 - 2\sqrt{6} + 0{,}3 = 5{,}3 - 2\sqrt{6}$

C. $a = 6$

D. $a = -2\sqrt{6} + 12{,}5$

E. $a = 5 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5 - 4\sqrt{6}$

F. $a = -\sqrt{6}$

Liczby podane w odpowiedziach B i D mają żądaną postać.

Zadanie 16. (0–1)

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{2x^2}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x.	**P**	**F**
2.	Jeżeli wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona, to $W(x) = \frac{2x}{x+2}$.	**P**	**F**

Wymagania ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
   1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2;
   4) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

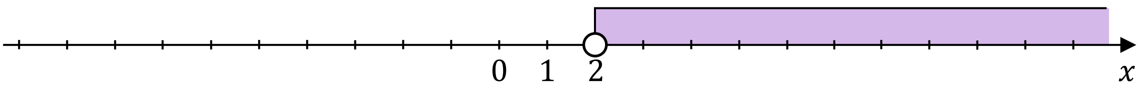
Zadanie 17. (0–1)

Dana jest nierówność

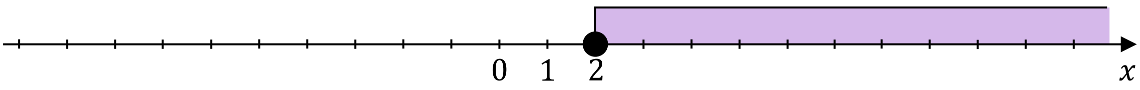
$$\frac{2x-1}{2}-\frac{x+2}{3}\geq\frac{1}{6}$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

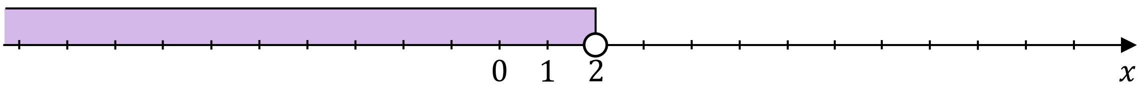
A.



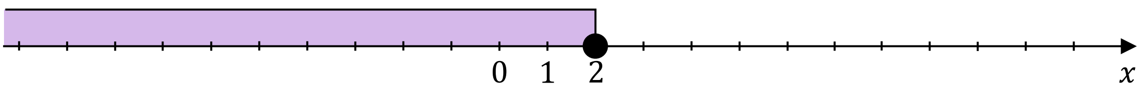
B.



C.



D.



Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.

III. Równania i nierówności. Zdający:
   3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 18. (0–3)

Dane jest równanie

$$\frac{2}{2x+1} = \frac{x-1}{x+2}$$

Wyznacz dziedzinę tego równania. Rozwiąż to równanie.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:
1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny, w tym np. przekształca równoważnie równanie $\frac{5}{x+1} = \frac{x+3}{2x-1}$;
4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

Część I (Wyznaczenie dziedziny równania)

1 pkt – poprawne wyznaczenie dziedziny równania: $x \neq -\frac{1}{2}$ i $x \neq -2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Część II (Rozwiązanie równania)

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i obliczenie wszystkich rozwiązań równania: (-1), $\frac{5}{2}$.

1 pkt – poprawne przekształcenie równania $\frac{2}{2x+1} = \frac{x-1}{x+2}$ do równania kwadratowego, np. $2(x+2) = (2x+1)(x-1)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Równanie $\frac{2}{2x+1}=\frac{x-1}{x+2}$ ma sens liczbowy dla $x\neq-\frac{1}{2}$ i $x\neq-2$.

Przekształcamy równanie:

$$\frac{2}{2x+1}=\frac{x-1}{x+2}$$

$$2(x+2)=(2x+1)(x-1)$$

$$2x+4=2x^2-2x+x-1$$

$$2x^2-3x-5=0$$

Sposób 1. rozwiązania równania $2x^2-3x-5=0$.

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $2x^2-3x-5$ (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-5)=9+40=49$$

Stąd

$$x_1=\frac{-(-3)-\sqrt{49}}{2\cdot2}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+\sqrt{49}}{2\cdot2}=\frac{5}{2}$$

Sposób 2. rozwiązania równania $2x^2-3x-5=0$.

Rozwiążemy równanie kwadratowe, wykorzystując metodę dopełnienia wyrażenia do pełnego kwadratu. Przekształcimy równoważnie trójmian kwadratowy $2x^2-3x-5$:

$$2x^2-3x-5=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)-5=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]-5=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}-5=$$

$$=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{8}$$

Przekształcamy równoważnie równanie $2x^2-3x-5=0$, otrzymując:

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{8}=0$$

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{49}{8}$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$$

$$\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{7}{4}$$

$$x - \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \quad \text{lub} \quad x - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$x = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{7}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Sposób 3. rozwiązania równania $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

Rozwiążemy równanie kwadratowe, wykorzystując metodę grupowania wyrazów:

$$2x^2 - 5x + 2x - 5 = 0$$

$$2x\left(x - \frac{5}{2}\right) + 2\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)(2x + 2) = 0$$

$$x - \frac{5}{2} = 0 \quad \text{lub} \quad 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{lub} \quad x = -1$$

Otrzymane pierwiastki są różne od liczby $\left(-\frac{1}{2}\right)$ oraz od liczby (-2), więc są rozwiązaniami danego równania.

Zadanie 19. (0–2)

Rozwiąż nierówność

$$\boldsymbol{(3x - 4)(x - 1) < x}$$

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 8x + 4$:

$x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = 2$

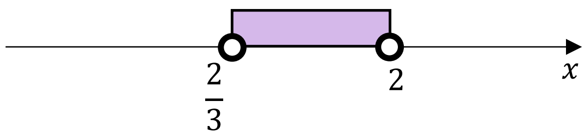
oraz zapisanie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in \left(\frac{2}{3}, 2\right)$

ALBO

– obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 8x + 4$:

$x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = 2$

oraz przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



1 pkt – obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 8x + 4$:

$x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = 2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy nierówność:

$$(3x - 4)(x - 1) < x$$

$$3x^2 - 3x - 4x + 4 < x$$

$$3x^2 - 8x + 4 < 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu $3x^2 - 8x + 4$ (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

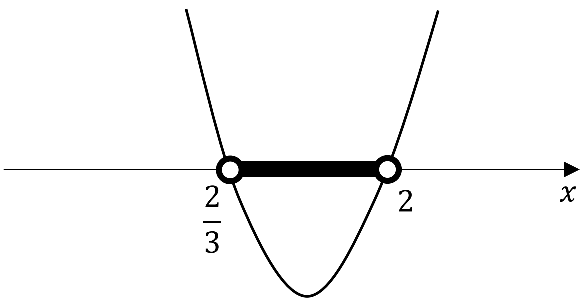
$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16$$

i obliczamy jego pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = 2$$

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \left(\frac{2}{3}, 2\right)$ lub zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej:



Zadanie 20. (0–3)

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b, które spełniają warunki:

$$a \neq 0, \; b \neq 0 \quad \text{oraz} \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + 3ab + b^2).$$

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, spełniających powyższe warunki.

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
   2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
   3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej.

III. Równania i nierówności. Zdający:
   1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny, w tym np. przekształca równoważnie równanie $\frac{5}{x+1} = \frac{x+3}{2x-1}$;
   5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości ilorazu $\frac{a}{b}$ **oraz** podanie poprawnego wyniku $\frac{a}{b} = -1$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $4ab(a+b) = 0$ **oraz** wyznaczenie rozwiązań tego równania: $a = 0$, $b = 0$, $a = -b$ (bez uwzględnienia warunków zadania).

1 pkt – przekształcenie równania do postaci $4ab(a+b) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie podane w zadaniu przekształcamy w sposób równoważny.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + 3ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = a^3 + 3a^2b + ab^2 + a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3$$

$$0 = 4a^2b + 4ab^2$$

$$4ab(a + b) = 0$$

Iloczyn po lewej stronie równania jest równy 0, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy 0. Zatem:

$$4ab = 0 \quad \text{lub} \quad a + b = 0$$

Stąd mamy:

$$a = 0 \quad \text{lub} \quad b = 0 \quad \text{lub} \quad a = -b$$

Gdy uwzględnimy warunki zadania $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to pozostaje jedynie możliwość $a = -b$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{a}{b} = \frac{-b}{b} = -1$$

Zadanie 21. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układ równań $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -4x - 8y = -4 \end{cases}$

A. nie ma rozwiązań.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania.

D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

IV. Układy równań. Zdający:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

FUNKCJE, CIĄGI, OPTYMALIZACJA

Zadanie 22. (0–2)

Funkcja $y = f(x)$ jest określona za pomocą tabeli

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	2	0	1	0	2	1

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.	**P**	**F**
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykres funkcji f jest symetryczny względem osi Oy.	**P**	**F**
Największa wartość funkcji f jest równa 3.	**P**	**F**

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zaznaczenie w trzech zdaniach.
1 pkt – poprawne zaznaczenie w dwóch zdaniach.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Rozwiązanie

FFF

Zadanie 23. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykresy funkcji liniowych $f(x) = (2m + 7)x + 5$ oraz $g(x) = 3x$ nie mają punktów wspólnych dla

A. $m = -2$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 24. (0–1)

Dana jest funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{dla } x \leq 2 \\ x - 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejscem zerowym funkcji f jest liczba

A. (-6) **B.** (-4) **C.** 3 **D.** 4

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
 1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 25. (0–1)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2 - b - 2\sqrt{2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2} + 1$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik b we wzorze funkcji f jest równy

A. (-3) **B.** 3 **C.** $3 - \sqrt{2}$ **D.** $3 - 2\sqrt{2}$

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$.

V. Funkcje. Zdający:
2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 26. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 3x^2 + 2x + m$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Współczynnik m jest liczbą rzeczywistą mniejszą od zera.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f

A.	ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe,	ponieważ	**1.**	$4 - 12m > 0$
B.	ma jedno rzeczywiste miejsce zerowe,		**2.**	$4 - 12m = 0$
C.	nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,		**3.**	$4 - 12m < 0$

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych;
   3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymagania szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:
   4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

V. Funkcje. Zdający:
   8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje).

Zasady oceniania

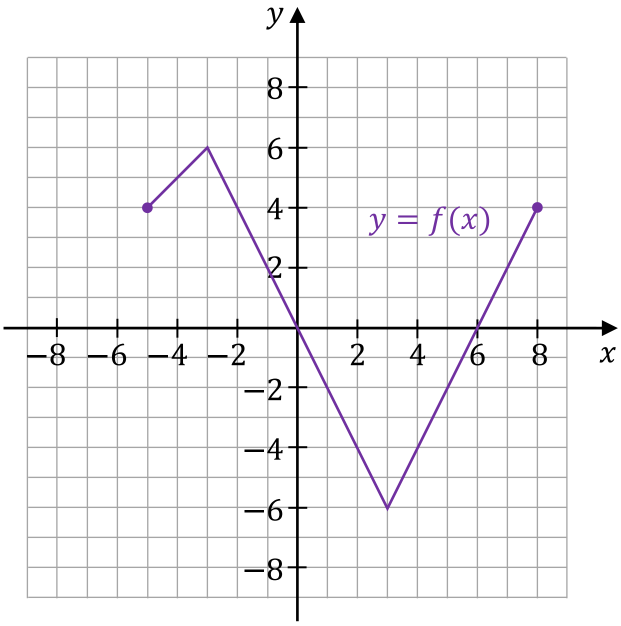
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A1

Zadanie 27.

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Zadanie 27.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$.

....

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:

4) odczytuje z wykresu funkcji: […] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby […].

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$[-5, -1) \cup (7, 8]$

Zadanie 27.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest malejąca w przedziale

A. $[-5, -3]$ **B.** $[3, 8]$ **C.** $[0, 6]$ **D.** $[-3, 3]$

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   4) odczytuje z wykresu funkcji […] przedziały monotoniczności […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 27.3. (0–2)

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach tak, aby zdania były prawdziwe.

1. Największa wartość funkcji f jest równa ……… .

2. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[6, 8]$ jest równa ……… .

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   4) odczytuje z wykresu funkcji […] największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym [...].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawnie uzupełnione dwie luki.
1 pkt – poprawnie uzupełniona jedna luka.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Pełne rozwiązanie

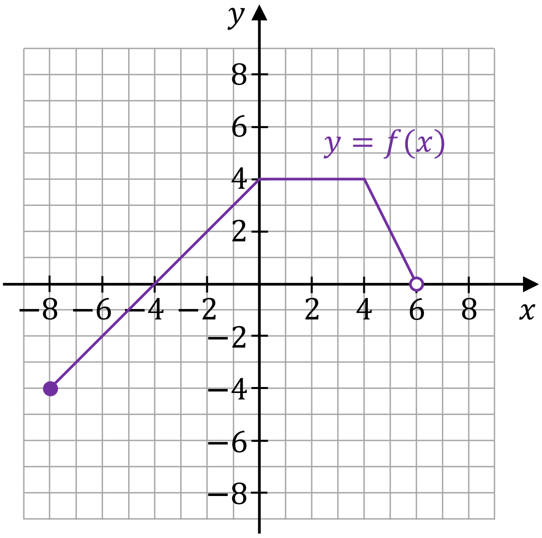
1. Największa wartość funkcji f jest równa …6…. .
2. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[6,8]$ jest równa …0…. .

Zadanie 28. (0–4)

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & \text{dla } x\in[-8,0] \\ 4 & \text{dla } x\in(0,4] \\ -2x+12 & \text{dla } x\in(4,6) \end{cases}$$

Wykres funkcji $y=f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach tak, aby zdania były prawdziwe.

1. Dziedziną funkcji f jest przedział …………… .
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział …………… .
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, jest przedział …………… .
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x)=4$ jest przedział …………… .

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
   4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawnie uzupełnione cztery luki.
3 pkt – poprawnie uzupełnione trzy luki.
2 pkt – poprawnie uzupełnione dwie luki.
1 pkt – poprawnie uzupełniona jedna luka.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Pełne rozwiązanie

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $[-8, 6)$ …………… .

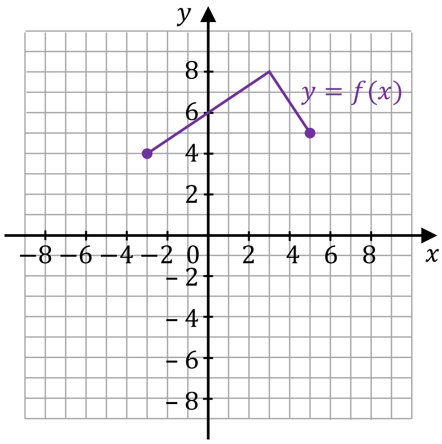
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-4, 4]$ …………… .

3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, jest przedział $[-4, 6)$ …………… .

4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ jest przedział $[0, 4]$ …………… .

Zadanie 29. (0–2)

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.



Funkcje g oraz h są określone za pomocą funkcji f następująco:

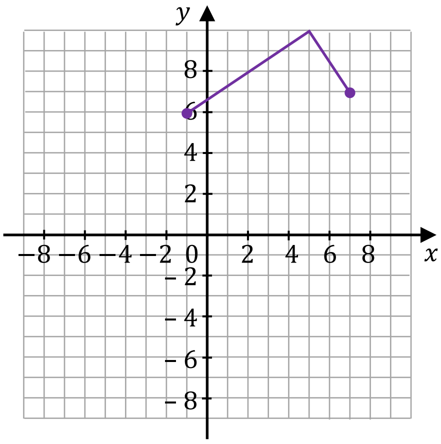
$$y = g(x) = f(x+2) \qquad\qquad y = h(x) = f(x) + 2$$

Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji – w tym wykresy funkcji g oraz h.

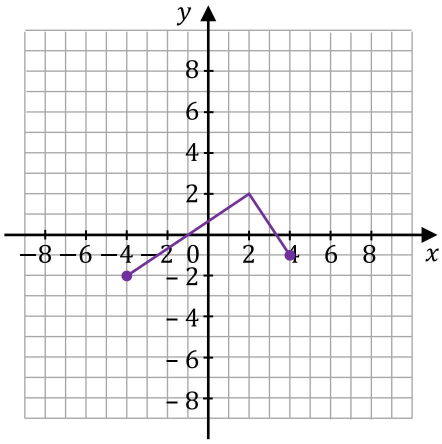
Każdej z funkcji $y = g(x)$ oraz $y = h(x)$ przyporządkuj jej wykres. Wpisz obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

Nr zadania	Funkcja	Rysunek
29.1.	$y = g(x)$	
29.2.	$y = h(x)$	

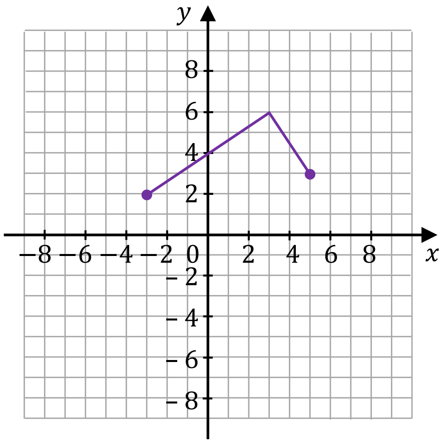
A.



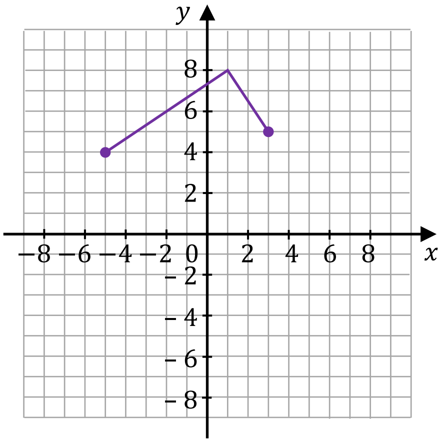
B.



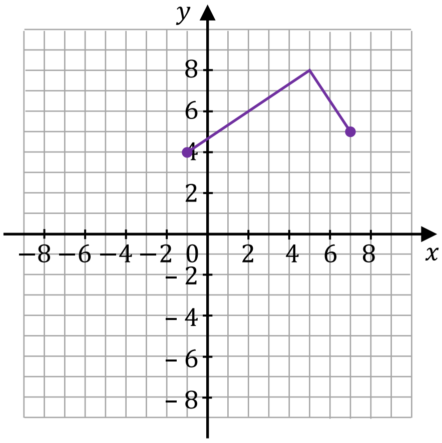
C.



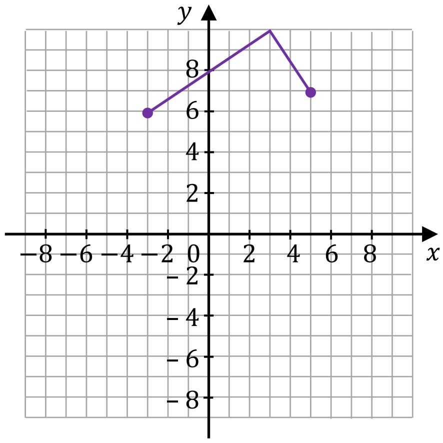
D.



E.



F.



Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$.

Zasady oceniania

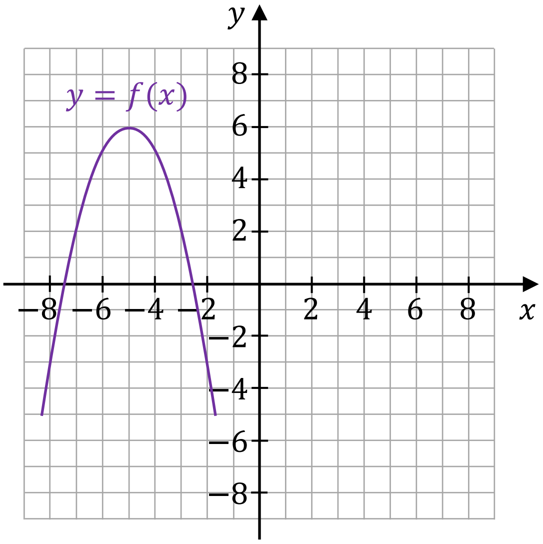
2 pkt – poprawne przyporządkowanie wykresów dla obu funkcji.
1 pkt – poprawne przyporządkowanie wykresu dla jednej funkcji.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

Nr zadania	Funkcja	Rysunek
29.1.	$y = g(x)$	**D**
29.2.	$y = h(x)$	**F**

Zadanie 30. (0–1)

Dana jest funkcja kwadratowa $y = f(x)$, której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych, jeżeli wiadomo, że jeden ze wzorów podanych w odpowiedziach A–D to wzór funkcji f.

Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ jest określona wzorem

A. $y = -(x+5)^2 - 6$

B. $y = -(x+5)^2 + 6$

C. $y = -(x-5)^2 - 6$

D. $y = -(x-5)^2 + 6$

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:

9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 31. (0–2)

Do wykresu pewnej funkcji kwadratowej $y = g(x)$ należy punkt o współrzędnych $(2, -6)$. Osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 3$, a jednym z miejsc zerowych funkcji g jest $x_1 = 1$.

Wyznacz wzór funkcji g w postaci iloczynowej.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
   9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia postaci iloczynowej funkcji g **oraz** zapisanie jej wzoru: $g(x) = 2(x-1)(x-5)$.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji g w postaci $g(x) = a(x-1)(x-5)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Zauważmy, że pierwsza współrzędna punktu przecięcia osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej z osią Ox jest środkiem odcinka, którego końcami są miejsca zerowe tej funkcji. Zatem:

$$3 = \frac{1 + x_2}{2} \qquad \text{i stąd} \qquad x_2 = 5$$

Zapiszemy wzór funkcji g w postaci iloczynowej dla pewnego rzeczywistego współczynnika a:

$$g(x) = a(x-1)(x-5)$$

Obliczymy współczynnik a. Wykres funkcji przechodzi przez punkt $(2,-6)$, zatem:

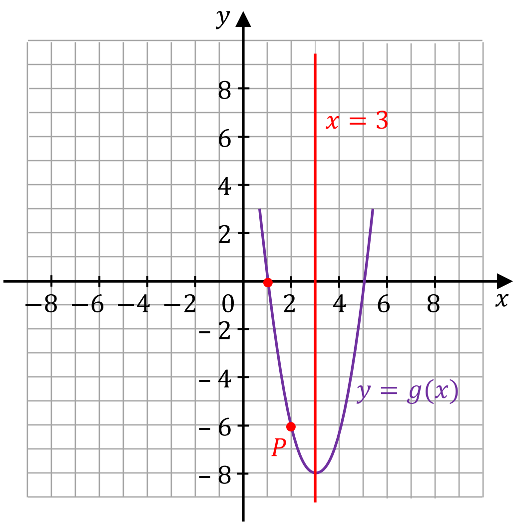
$-6 = a(2-1)(2-5)$, więc $-6 = a \cdot (-3)$ i stąd $a = 2$

Wzór funkcji g w postaci iloczynowej ma postać:

$$g(x) = 2(x-1)(x-5)$$

Sposób 2.

Naszkicujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej $y = g(x)$, który spełnia warunki:
1) przechodzi przez punkt $P = (2,-6)$,
2) posiada oś symetrii $x = 3$,
3) przecina oś Ox w punkcie $(1,0)$ (miejsce zerowe funkcji g to $x_1 = 1$).



Drugie miejsce zerowe funkcji g jest położone symetrycznie do $x_1 = 1$ względem prostej $x = 3$. Zatem drugim miejscem zerowym jest $x_2 = 5$.

Zapiszemy wzór funkcji g w postaci iloczynowej dla pewnego rzeczywistego współczynnika a:

$$g(x) = a(x-1)(x-5)$$

Obliczymy współczynnik a. Wykres funkcji przechodzi przez punkt $(2,-6)$, zatem:

$$-6 = a(2-1)(2-5)$$

Stąd $a = 2$.

Wzór funkcji g w postaci iloczynowej ma postać:

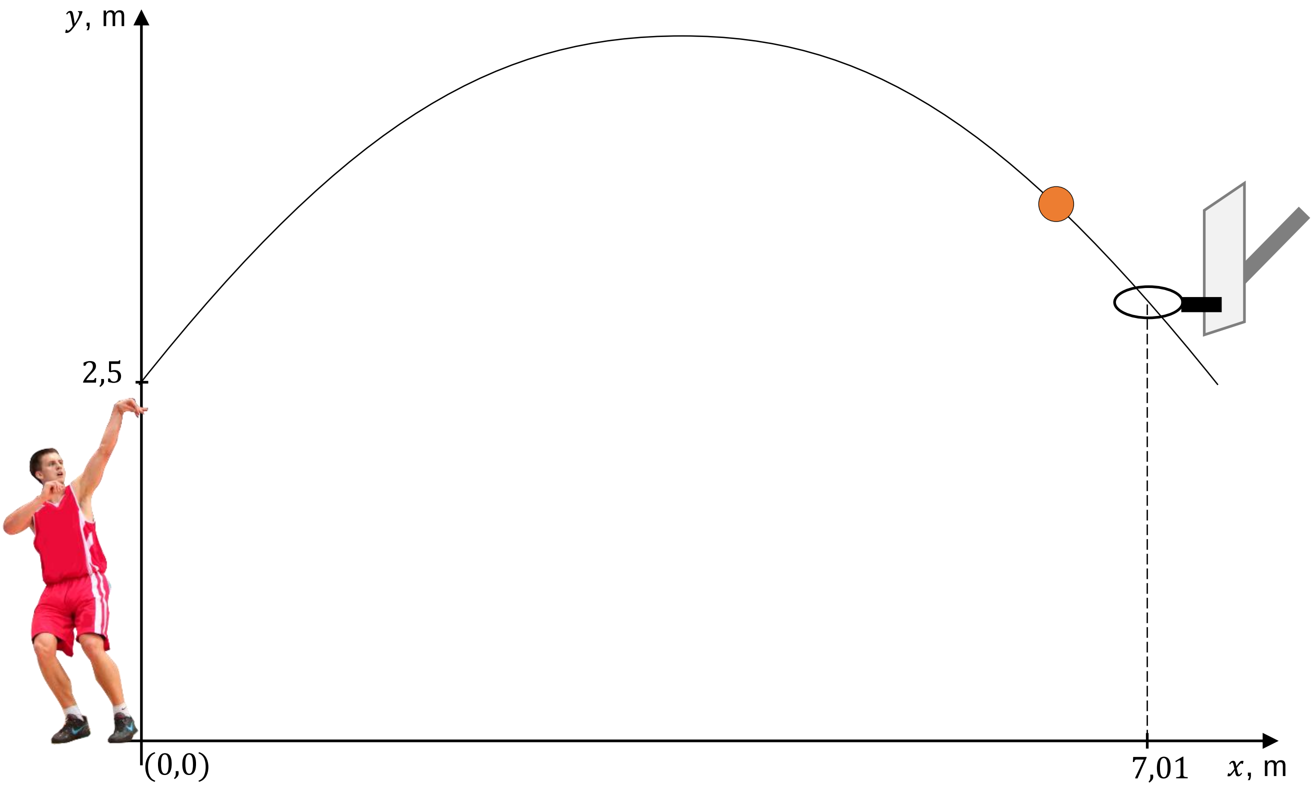
$$g(x) = 2(x-1)(x-5)$$

Zadanie 32.

Na podstawie zasad dynamiki można udowodnić, że torem ruchu rzuconej piłki – przy pominięciu oporów powietrza – jest fragment paraboli.
Koszykarz wykonał rzut do kosza z odległości $x_k = 7{,}01$ m, licząc od środka piłki do środka obręczy kosza w linii poziomej.
Do opisu toru ruchu przyjmiemy układ współrzędnych, w którym <u>środek piłki</u> w chwili początkowej znajdował się w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2{,}50$ m.
Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem:

$$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$

Rzut okazał się udany, a środek piłki przeszedł dokładnie przez środek kołowej obręczy kosza. Na rysunku poniżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.



Zadanie 32.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obręcz kosza znajduje się na wysokości (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do 0,01 m)

A. 3,04 m **B.** 3,06 m **C.** 3,80 m **D.** 4,93 m

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
  1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
  11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 32.2. (0–2)

Oblicz wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się środek piłki podczas opisanego rzutu. Wynik zapisz w metrach w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
  1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:

10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania **oraz** zapisanie wyniku $4{,}93$ m.

1 pkt – zastosowanie wzoru na wierzchołek paraboli **oraz** poprawne podstawienie wszystkich danych liczbowych do tego wzoru

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji w postaci $y = -0{,}174(x-p)^2 + q$ **oraz** zidentyfikowanie q jako współrzędnej wierzchołka paraboli lub wysokości maksymalnej rzutu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Wysokość maksymalna, na jaką wzniesie się środek piłki, jest równa współrzędnej y wierzchołka paraboli. Skorzystamy ze wzoru na wierzchołek paraboli (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

$$h_{max} = y_w = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1{,}3^2 + 4 \cdot 0{,}174 \cdot 2{,}5}{4 \cdot (-0{,}174)} \approx 4{,}93 \text{ m}$$

Sposób 2.

Wysokość maksymalna, na jaką wzniesie się środek piłki, jest równa współrzędnej y wierzchołka paraboli. Wartość tę możemy wyznaczyć, przekształcając wzór funkcji kwadratowej $y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$ do postaci kanonicznej:

$$y = -0{,}174(x-p)^2 + q$$

gdzie:

$$h_{max} = y_w = q$$

$$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5 = -0{,}174\left(x^2 - \frac{1{,}3}{0{,}174}x\right) + 2{,}5 =$$

$$= -0{,}174 \cdot \left[\left(x - \frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 - \left(\frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2\right] + 2{,}5 =$$

$$= -0{,}174 \cdot \left(x - \frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 + 0{,}174 \cdot \left(\frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 + 2{,}5$$

Zatem

$$h_{max} = y_w = q = 0{,}174 \cdot \left(\frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 + 2{,}5 \approx 4{,}93 \text{ m}$$

Zadanie 32.3. (0–3)

W opisanym rzucie piłka przeleciała swobodnie przez obręcz kosza i upadła na parkiet. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej przeszkody. Promień piłki jest równy $0{,}12$ m.

Oblicz współrzędną x <u>środka piłki</u> w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu. Wynik zapisz w metrach w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

III. Równania i nierówności. Zdający:
   4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia współrzędnej x **oraz** zapisanie wyniku: $8{,}99$ m.
2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38 = 0$.
1 pkt – zapisanie równania $0{,}12 = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że w momencie gdy piłka upadła i dotknęła parkietu, to środek piłki należy do paraboli oraz znajduje się na wysokości $0{,}12$ m ponad parkietem. Zatem współrzędne (x, y) środka piłki spełniają równanie paraboli, a współrzędna $y = 0{,}12$ m.

$$0{,}12 = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$

$$0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.
Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38$ (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

$$\Delta = (-1{,}3)^2 - 4 \cdot 0{,}174 \cdot (-2{,}38) = 3{,}34648$$

Rozwiązaniami powyższego równania kwadratowego są liczby:

$$x_1 = \frac{1{,}3 - \sqrt{3{,}34648}}{0{,}348} \qquad x_1 = \frac{1{,}3 + \sqrt{3{,}34648}}{0{,}348}$$

$$x_1 \approx -1{,}52 \qquad x_2 \approx 8{,}99$$

Współrzędna x <u>środka piłki</u> w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu, jest równa w przybliżeniu $8{,}99$ m.

Zadanie 33.

Czas T połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas, po którym liczba jąder danego izotopu (a zatem i masa tego izotopu) zmniejsza się o połowę – tzn. połowa jąder danego izotopu przemienia się w inne jądra. Liczba jąder $N(t)$ izotopu promieniotwórczego pozostających w próbce po czasie t, licząc od chwili $t_0 = 0$, wyraża się zależnością wykładniczą:

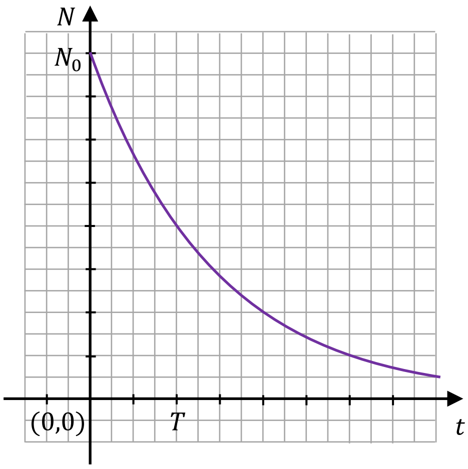
$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie N_0 jest liczbą jąder izotopu promieniotwórczego w chwili początkowej $t_0 = 0$.

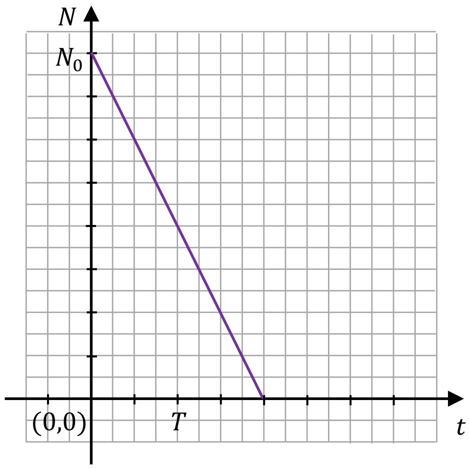
Zadanie 33.1. (0–1)

Na poniższych rysunkach 1.–4. przedstawiono wykresy zależności, z których dokładnie jeden poprawnie ilustruje $N(t)$.

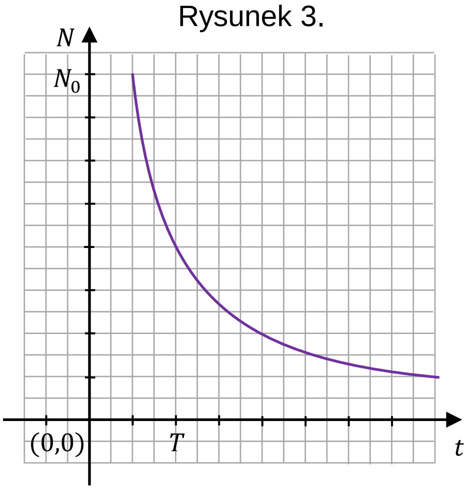
Rysunek 1.



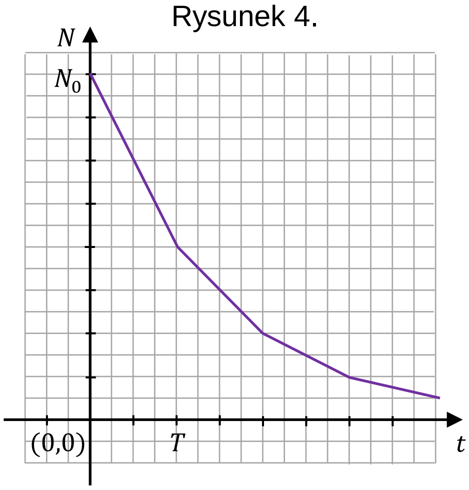
Rysunek 2.



Rysunek 3.



Rysunek 4.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres zależności wykładniczej $N(t)$ – opisanej we wstępie do zadania – przedstawiono na

A. rysunku 1. **B.** rysunku 2. **C.** rysunku 3. **D.** rysunku 4.

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
    1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów […].

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
    14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 33.2. (0–3)

Czas połowicznego rozpadu węgla $^{14}\mathrm{C}$ to około $5\,700$ lat. Naukowcy oszacowali za pomocą datowania radiowęglowego, że masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w pewnym organicznym znalezisku archeologicznym stanowi $\frac{1}{16}$ masy tego izotopu, jaka utrzymywała się podczas życia organizmu.

Oblicz, ile lat ma opisane znalezisko archeologiczne. Wynik podaj z dokładnością do stu lat.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów […].

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   1) wykonuje działania ([…] mnożenie, dzielenie, potęgowanie, […]) w zbiorze liczb rzeczywistych.

V. Funkcje. Zdający:
   14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia t oraz podanie poprawnego wyniku: $t \approx 22\,800$ lat.

2 pkt – zapisanie równania: $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ **oraz** wyznaczenie z niego $\frac{t}{T} = 4$.

1 pkt – poprawne zapisanie równania: $\frac{1}{16} \cdot m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 2.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile lat ma znalezisko archeologiczne oraz podanie poprawnego wyniku: $t \approx 22\,800$ lat.

2 pkt – zapisanie związku między masą izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ jaka utrzymywała się za życia organizmu a masą tego izotopu w znalezisku:

$$m_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_0 = \frac{1}{16} \cdot m_0.$$

1 pkt – poprawne zapisanie masy izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ po około $5\,700$ latach (po czasie połowicznego rozpadu): $m_1 = \frac{1}{2} \cdot m_0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Przyjmijmy, że:

m_0 – masa początkowa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$,

$m(t)$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ po czasie t, licząc od chwili $t_0 = 0$.

Wykorzystamy wzór podany we wstępie do zadania, opisujący rozpad promieniotwórczy, zastosowany do masy izotopu:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Podstawimy dane z zadania i przekształcimy równanie:

$$\frac{1}{16} \cdot m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Powyższa równość oznacza, że liczba $\frac{1}{2}$ podniesiona do potęgi $\frac{t}{T}$ daje w wyniku $\frac{1}{16}$.

Zatem:

$$\frac{t}{T} = 4$$

Obliczymy, ile lat liczy sobie znalezisko. Z powyższego równania wynika, że:

$$t = 4T \approx 4 \cdot 5700 = 22\,800 \text{ lat}$$

Sposób 2.

Przyjmijmy, że:

m_0 – masa początkowa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$,

$m(t)$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ po czasie t, licząc od chwili $t_0 = 0$.

Zgodnie z definicją pojęcia czasu połowicznego rozpadu, po każdym upływie czasu równym czasowi połowicznego rozpadu, masa izotopu promieniotwórczego w próbce zmniejsza się o połowę. Zatem po każdym kolejnym upływie $5\,700$ lat, masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce/znalezisku zmniejszała się o połowę.

Zatem:

$m_1 = \frac{1}{2} \cdot m_0$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce po około $5\,700$ latach.

$m_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_0 = \frac{1}{4} \cdot m_0$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce po około $11\,400$ latach.

$m_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_0 = \frac{1}{8} \cdot m_0$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce po około $17\,100$ latach.

$m_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_0 = \frac{1}{16} \cdot m_0$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce po około $22\,800$ latach.

Znalezisko archeologiczne ma około $22\,800$ lat.

Zadanie 34. (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \quad \text{dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1 \end{cases}$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych […] przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:
2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne obliczenie drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu ciągu (a_n) **oraz** ich sumy: $S_4 = 36$.

1 pkt – poprawne obliczenie drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu ciągu (a_n): $a_2 = 2,\ a_3 = 8,\ a_4 = 28$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczymy cztery kolejne wyrazy ciągu, stosując wzór rekurencyjny:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_2 &= 1 \cdot a_1 + 4 = 1 \cdot (-2) + 4 = 2 \\ a_3 &= 2 \cdot a_2 + 4 = 2 \cdot 2 + 4 = 8 \\ a_4 &= 3 \cdot a_3 + 4 = 3 \cdot 8 + 4 = 28 \end{aligned}$$

Obliczymy sumę S_4 czterech kolejnych początkowych wyrazów ciągu (a_n):

$$S_4 = -2 + 2 + 8 + 28 = 36$$

Zadanie 35. (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = 4n - 9$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymagania szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:

4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych […] do rozwiązywania zadań […].

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania uzasadniającego, że ciąg jest arytmetyczny, np. poprawne obliczenie różnicy kolejnych wyrazów **oraz** wykazanie, że jest stała i nie zależy od n.

1 pkt – zapisanie różnicy dwóch kolejnych wyrazów:
$a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 9 - (4n - 9)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Żeby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że różnica dwóch kolejnych wyrazów $a_{n+1} - a_n$ jest stała i nie zależy od n.
Wyznaczymy a_{n+1}:

$$a_{n+1} = 4(n+1) - 9 = 4n + 4 - 9 = 4n - 5 \quad \text{dla } n \geq 1$$

Obliczymy różnicę kolejnych dwóch wyrazów ciągu (a_n):

$$a_{n+1} - a_n = 4n - 5 - (4n - 9) = 4n - 5 - 4n + 9 = 4 \quad \text{dla każdego } n \geq 1$$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 4$.

Zadanie 36. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest

<table>
<tr><td>A.</td><td>rosnący,</td><td rowspan="3">ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$</td><td>1.</td><td>różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą ujemną.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>malejący,</td><td>2.</td><td>różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa zero.</td></tr>
<tr><td>C.</td><td>stały,</td><td>3.</td><td>różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą dodatnią.</td></tr>
</table>

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
   3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymagania szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:
   1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
   3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A3

Komentarz

Zbadamy, jaki znak ma różnica: $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n$$

Ponieważ $n \geq 1$ to $2n > 0$, zatem:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \text{dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1$$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Zadanie 37. (0–2)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Oblicz wartość m, dla której liczby $f(m)$, $f(1)$, $f(2)$ są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

VI. Ciągi. Zdający:
   4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
   7) wykorzystuje własności ciągów, w tym […] geometrycznych do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania **oraz** podanie poprawnego wyniku: $m = \frac{1}{2}$.

1 pkt – obliczenie/zapisanie wartości funkcji f: $f(m) = \frac{1}{m}$, $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$ **oraz** wykorzystanie definicji albo własności ciągu geometrycznego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Wyznaczymy kolejne wyrazy ciągu:

$$f(m) = \frac{1}{m}, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

Zastosujemy własność/definicję ciągu geometrycznego:

$$\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{f(1)}{f(m)} = q, \qquad \text{stąd} \qquad \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{\frac{1}{m}}, \qquad \text{zatem} \qquad m = \frac{1}{2}$$

Sposób 2.

Wyznaczymy kolejne wyrazy ciągu:

$$f(m) = \frac{1}{m}, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

Zastosujemy własność ciągu geometrycznego:

$$1^2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2}, \qquad \text{zatem} \qquad 1 = \frac{1}{2m} \qquad \text{i stąd} \qquad m = \frac{1}{2}$$

Sposób 3.

Wyznaczymy kolejne wyrazy ciągu:

$$a_1 = f(m) = \frac{1}{m}, \qquad a_2 = f(1) = 1, \qquad a_3 = f(2) = \frac{1}{2}$$

Zastosujemy wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ dla $n \geq 1$, albo wzór rekurencyjny określający ciąg geometryczny: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla $n \geq 1$ i liczby rzeczywistej q.

Wówczas:

$$a_3 = a_2 \cdot q, \qquad \text{stąd} \qquad \frac{1}{2} = 1 \cdot q, \qquad \text{zatem} \qquad q = \frac{1}{2}$$

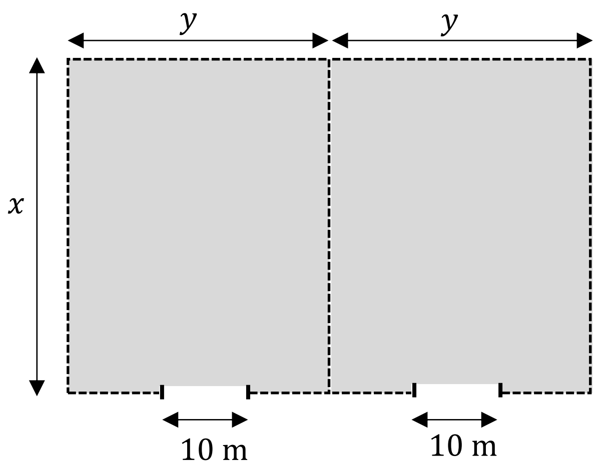
$$a_3 = a_1 \cdot q^2, \qquad \text{stąd} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{m} \cdot q^2, \qquad \text{zatem} \qquad q^2 = \frac{m}{2}$$

Z powyższych zależności wynika, że:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{m}{2}, \qquad \text{stąd} \qquad \frac{1}{4} = \frac{m}{2}, \qquad \text{zatem} \qquad m = \frac{1}{2}$$

Zadanie 38. (0–4)

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.



Oblicz wymiary x oraz y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.

4. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymaganie szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.
Zdający rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia obu wymiarów działki **oraz** podanie poprawnych wyników: $x = 100$ m oraz $y = 75$ m.

3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole działki w zależności od jednej zmiennej **oraz** poprawne obliczenie współrzędnej x wierzchołka paraboli: $x = 100$ m.

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej w zależności od jednej zmiennej:
$P(x) = 2x(150 - \frac{3}{4}x)$ dla $x \in \left(0, \frac{560}{3}\right)$.

1 pkt – zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej: $P = x \cdot 2y$
ALBO
– zapisanie związku między wymiarami działki: $3x + 4y - 20 = 580$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu. Całkowitą długość płotu – po uwzględnieniu warunków zadania – można zapisać równaniem:

$$3x + 4y - 2 \cdot 10 = 580$$

Powyższe równanie określa związek między wymiarami x i y. Wymiar y jednej działki musi być większy od 10 m, ze względu na ustaloną szerokość bramy wjazdowej. W związku z tym, w modelu matematycznym uwzględniającym warunki zadania, wymiary x i y spełniają:

$$x > 0 \quad \text{i} \quad y > 10$$

Pole P całkowitej powierzchni magazynowej jest równe polu prostokąta o bokach długości x oraz $2y$. Zatem:

$$P = x \cdot 2y$$

Pole powierzchni magazynowej wyrazimy jako funkcję jednej zmiennej x. W tym celu najpierw wyznaczymy y:

$$3x + 4y - 2 \cdot 10 = 580$$

$$4y = 600 - 3x$$

$$y = 150 - \frac{3}{4}x$$

Następnie podstawimy wyznaczone y do wzoru na pole $P = x \cdot 2y$:

$$P(x) = 2x\left(150 - \frac{3}{4}x\right)$$

Wyznaczymy dziedzinę funkcji P. Wykorzystamy związek między wymiarami x i y oraz wykorzystamy warunki, jakie te wymiary spełniają:

$$y = 150 - \frac{3}{4}x \quad \text{oraz} \quad y > 10 \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

Zatem:

$$150 - \frac{3}{4}x > 10 \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

$$x < \frac{560}{3} \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

Zmienna x może przyjmować wartości z przedziału $\left(0,\ \frac{560}{3}\right)$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli $\mathcal{P}$ skierowanej ramionami do dołu. Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$. Współrzędną x wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$ obliczymy z miejsc zerowych funkcji kwadratowej, która jest równaniem tej paraboli. Rozwiążemy zatem równanie:

$$2x\left(150 - \frac{3}{4}x\right) = 0$$

Z powyższego równania wynika, że:

$$2x = 0 \quad \text{lub} \quad 150 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{lub} \quad x_2 = 200$$

Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$, czyli dla:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 100 \text{ m}$$

Obliczymy drugi wymiar działki, dla którego pole powierzchni magazynowej jest największe:

$$y = 150 \text{ m} - \frac{3}{4} \cdot 100 \text{ m} = 75 \text{ m}$$

Całkowite pole powierzchni magazynowej jest największe dla działki o wymiarach:

$$x = 100 \text{ m} \quad \text{oraz} \quad y = 75 \text{ m}.$$

TRYGONOMETRIA, PLANIMETRIA, GEOMETRIA ANALITYCZNA, STEREOMETRIA

Zadanie 39. (0–1)

Dany jest kąt o mierze α taki, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90° < \alpha < 180°$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Dla kąta o mierze α spełnione jest równanie: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.	**P**	**F**
2.	Dla kąta o mierze α spełnione jest równanie: $\lvert\operatorname{tg}\alpha\rvert = \frac{3}{4}$.	**P**	**F**

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
1) Wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$ […];
2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 40. (0–2)

W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków $|AB| = 12$, $|BC| = 8$ oraz miara kąta $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
   3) stosuje twierdzenie cosinusów […].

VIII. Planimetria. Zdający:
   12) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

2 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD **oraz** poprawne obliczenie długości środkowej: $|AD| = 4\sqrt{7}$.

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD, np.:

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|$$
$$|AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos 60°$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 2.

2 pkt – poprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AGD **oraz** poprawne obliczenie długości środkowej: $|AD| = 4\sqrt{7}$.

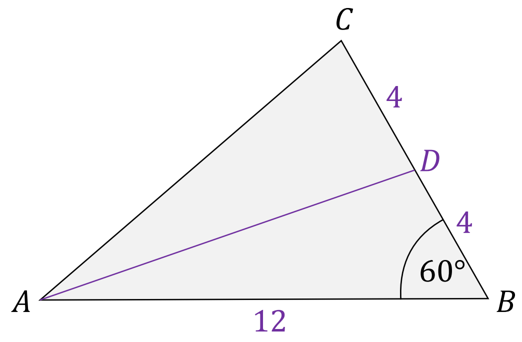
1 pkt – wyodrębnienie trójkąta prostokątnego AGD oraz trójkąta GBD o kątach: $30°$, $60°$, $90°$, łącznie z poprawnym określeniem długości jego boków: $|GB| = 2$, $|DG| = 2\sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie twierdzenia cosinusów)

Niech D oznacza środek odcinka BC.
Wykonamy rysunek pomocniczy (zobacz obok).
Ponieważ AD jest środkową, to $|BD| = 4$.



Do obliczenia długości środkowej AD zastosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABD:

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|$$

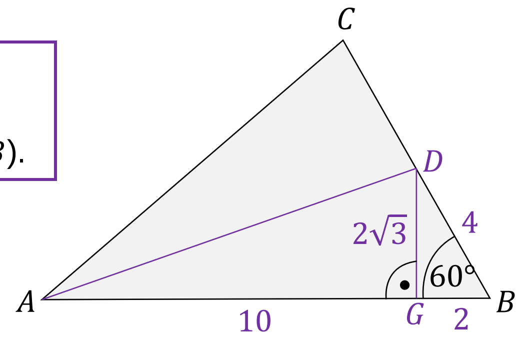
$$|AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 112$$

$$|AD| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Sposób 2. (zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i własności trójkąta o kątach $30°$, $60°$, $90°$)

Niech D oznacza środek odcinka BC.
Wykonamy rysunek pomocniczy (zobacz obok).

W celu obliczenia długości środkowej AD zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AGD (gdzie G jest rzutem prostokątnym punktu D na odcinek AB).



Ponieważ AD jest środkową, to $|BD| = 4$.

Rozważmy dalej trójkąt GBD.
Trójkąt GBD ma kąty o miarach: $30°$, $60°$, $90°$, skąd wynika, że przyprostokątne tego trójkąta mają długości:

$$|GB| = 2$$

$$|DG| = 2\sqrt{3}$$

zatem długość przyprostokątnej AG trójkąta AGD jest równa

$$|AG| = 12 - 2 = 10$$

Obliczymy długość środkowej AD z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AGD:

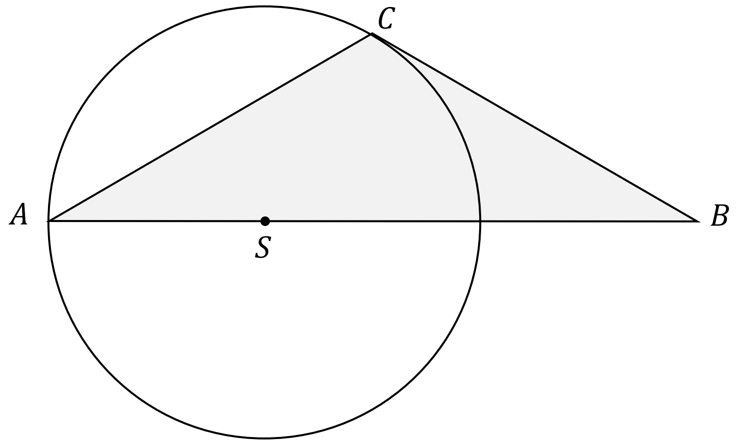
$$|AD|^2 = |AG|^2 + |GD|^2$$

$$|AD|^2 = 10^2 + (2\sqrt{3})^2 = 112$$

$$|AD| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Zadanie 41. (0–4)

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r.
Środek S tego okręgu leży na boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek poniżej).
Długości boków AB i AC są równe odpowiednio $|AB| = 3r$ oraz $|AC| = \sqrt{3}r$.



Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta ABC.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
4) oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty prostokątne, w tym z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych).

VIII. Planimetria. Zdający:
1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
12) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne obliczenie miar kątów trójkąta ABC:

$|\sphericalangle CAB| = 30°,\ |\sphericalangle ABC| = 30°,\ |\sphericalangle BCA| = 120°.$

3 pkt – poprawne obliczenie miar kątów w trójkącie DBC:

$|\sphericalangle CDB| = 120°,\ |\sphericalangle DBC| = 30°,\ |\sphericalangle BCD| = 30°$

2 pkt – poprawne obliczenie miar kątów ostrych trójkąta ADC:

$|\sphericalangle CAD| = 30°,\ |\sphericalangle ADC| = 60°.$

1 pkt – zapisanie $|\sphericalangle ACD| = 90°$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Przeanalizujemy zależności między odcinkami i kątami w przedstawionej sytuacji.
Na poniższych rysunkach pomocniczych przedstawimy graficzną ilustrację kroków postępowania.

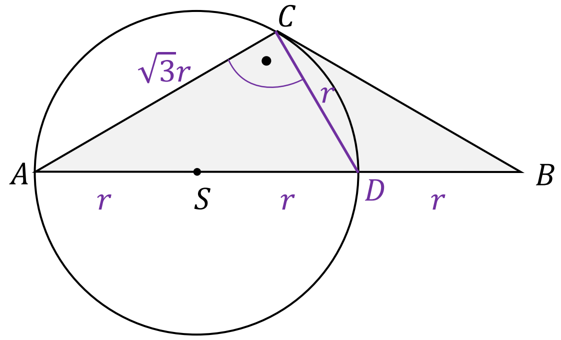
1. Kąt ACD jest kątem wpisanym opartym na średnicy, zatem $|\sphericalangle ACD| = 90°$, czyli trójkąt ADC jest prostokątny.

2. Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa do obliczenia długości boku $|CD|$:

$$|CD|^2 = |AD|^2 - |AC|^2$$

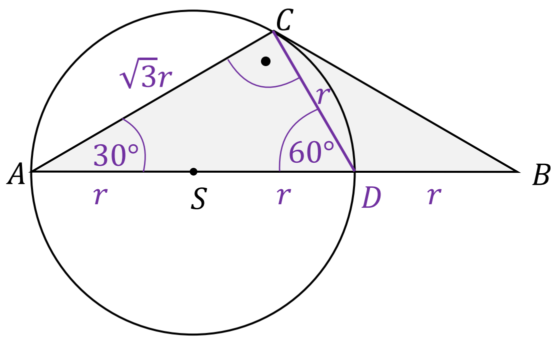
$$|CD|^2 = (2r)^2 - \left(\sqrt{3}r\right)^2 = r^2$$

$$|CD| = r$$



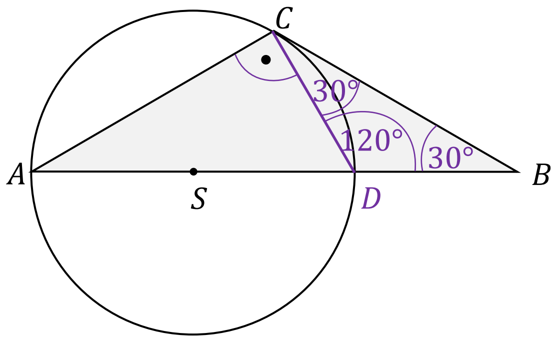
3. Trójkąt ADC o bokach $2r$, r, $\sqrt{3}r$ jest połową trójkąta równobocznego, zatem:

$$|\sphericalangle CAD| = 30^\circ, \qquad |\sphericalangle ADC| = 60^\circ$$



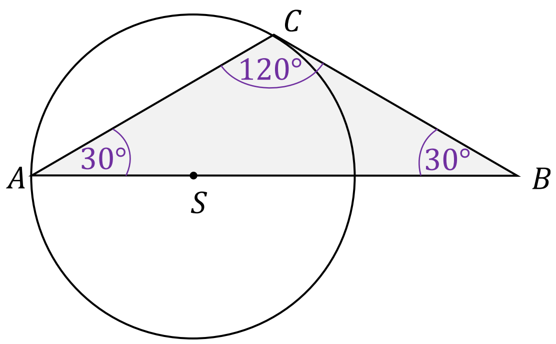
4. Zauważmy, że $|DB| = |DC| = r$, zatem trójkąt DBC jest równoramienny. Z tego i poprzedniego faktu wynika, że

$$|\sphericalangle CDB| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, \quad |\sphericalangle DBC| = 30^\circ, \quad |\sphericalangle BCD| = 30^\circ$$



Z omówionych kroków 1.–4. wynika, że kąty w trójkącie ABC mają miary:

$$|\sphericalangle CAB| = 30^\circ, \quad |\sphericalangle ABC| = 30^\circ, \quad |\sphericalangle BCA| = 120^\circ$$



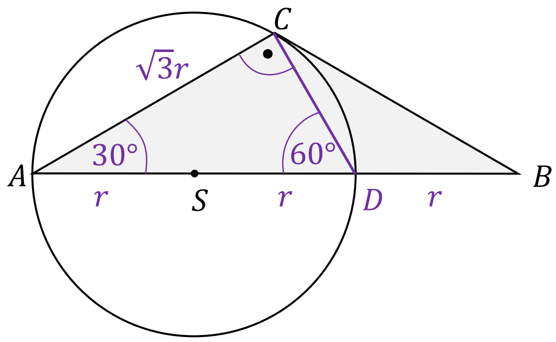
Sposób 2.

Przeanalizujemy zależności między odcinkami i kątami w przedstawionej sytuacji.
Na poniższych rysunkach pomocniczych przedstawimy graficzną ilustrację kroków postępowania.

1. Kąt ACD jest kątem wpisanym opartym na średnicy, zatem $|\measuredangle ACD| = 90°$.

2. Zauważmy, że: $\cos|\measuredangle CAD| = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

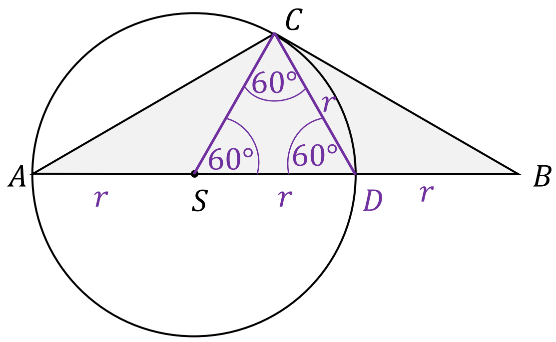
   Stąd wynika, że $|\measuredangle CAD| = 30°$, zatem $|\measuredangle ADC| = 60°$.



3. Zauważamy, że $|SC| = |SD| = r$, czyli trójkąt SDC jest równoramienny, zatem:

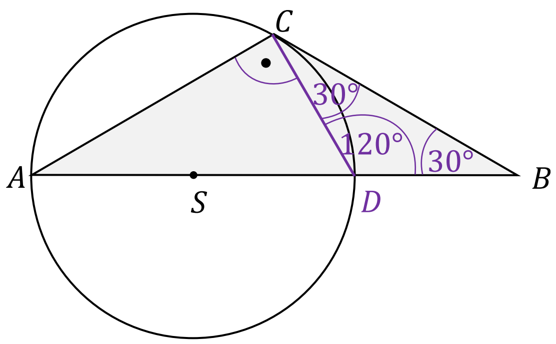
$$|\measuredangle DCS| = |\measuredangle SDC| = 60°, \quad \text{stąd wynika, że } |\measuredangle CSD| = 60°.$$

   Z powyższego wynika, że trójkąt SDC jest równoboczny.



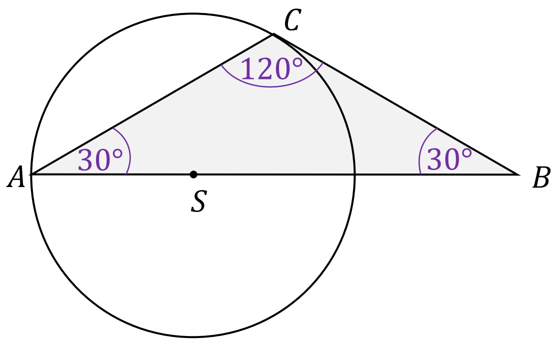
4. Zauważamy, że $|DB| = |DC| = r$, zatem trójkąt DBC jest równoramienny. Z tych i poprzednich faktów wynika, że

$$|\measuredangle CDB| = 180° - 60° = 120°, \quad |\measuredangle DBC| = 30°, \quad |\measuredangle BCD| = 30°$$



Z omówionych kroków 1.–4. wynika, że kąty w trójkącie ABC mają miary:

$$|\sphericalangle CAB| = 30°, \qquad |\sphericalangle ABC| = 30°, \qquad |\sphericalangle BCA| = 120°$$



Zadanie 42. (0–1)

Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Długość odcinka SA jest równa 10.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A do boku BC jest równa

A. 10 **B.** 15 **C.** 20 **D.** 30

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności.

Zasady oceniania

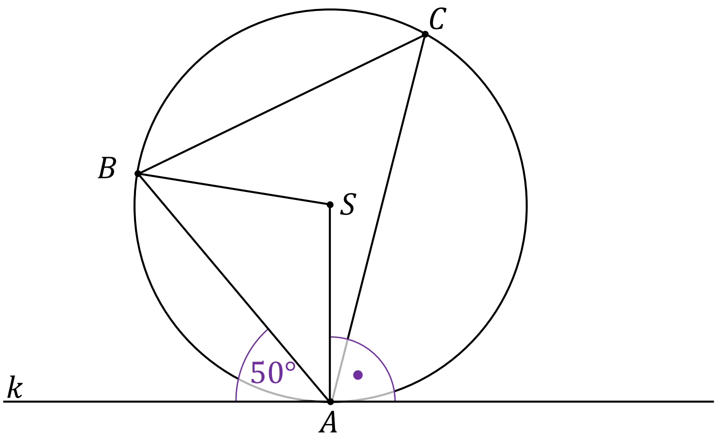
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 43. (0–1)

Dane są okrąg o środku S oraz prosta k styczna do okręgu w punkcie A.
Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu. Miara kąta ostrego pomiędzy prostą k a cięciwą AB jest równa $50°$. Punkt C leży na okręgu. Kąt wpisany BCA jest ostry.
Sytuację przedstawia rysunek poniżej.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta wpisanego BCA jest równa

A. $100°$ **B.** $80°$ **C.** $50°$ **D.** $40°$

Wymaganie ogólne
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

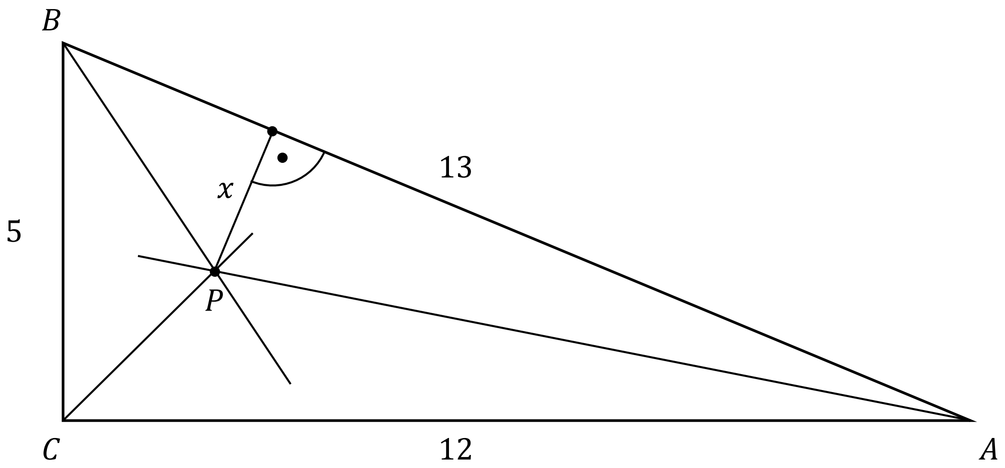
Wymaganie szczegółowe
VIII. Planimetria. Zdający:
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 44. (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o bokach $|AC| = 12$, $|BC| = 5$, $|AB| = 13$. Dwusieczne kątów tego trójkąta przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość x punktu P od przeciwprostokątnej AB jest równa

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{20}{13}$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności.

Zasady oceniania

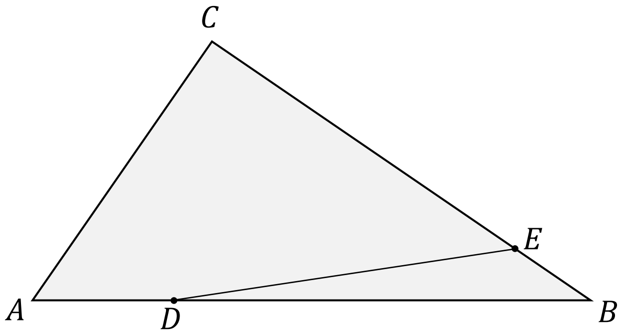
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 45. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB tego trójkąta wybrano punkt D, taki, że $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$, a na boku BC wybrano taki punkt E, że $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$ (zobacz rysunek poniżej).
Pole trójkąta ABC jest równe 20.



Oblicz pole trójkąta DBE.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
3) stosuje […] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

VIII. Planimetria. Zdający:
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia pola trójkąta DBE **oraz** podanie wyniku: $P_{DBE} = 3$.

2 pkt – wykazanie oraz zapisanie, że $\frac{P_{DBE}}{P_{ABE}} = \frac{3}{4}$ oraz $\frac{P_{ABE}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$.

1 pkt – wykazanie i zapisanie, że stosunek pól trójkątów DBE i ABE jest równy stosunkowi długości ich podstaw DB i AB: $\frac{P_{DBE}}{P_{ABE}} = \frac{3}{4}$

ALBO

– wykazanie i zapisanie, że stosunek pól trójkątów ABE i ABC jest równy stosunkowi długości ich podstaw BE i BC: $\frac{P_{ABE}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 2.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia pola trójkąta DBE **oraz** podanie wyniku: $P_{DBE} = 3$.

2 pkt – zapisanie zależności $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta = 20$ **oraz** wzoru na pole trójkąta DBE:

$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}|AB|\right) \cdot \left(\frac{1}{5}|BC|\right) \cdot \sin\beta$.

1 pkt – zapisanie zależności $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta = 20$

ALBO

– zastosowanie wzoru na pole trójkąta DBE z sinusem kąta DBE **oraz** zapisanie / zastosowanie związków $|DB| = \frac{3}{4}|AB|$ oraz $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 3.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia pola trójkąta DBE **oraz** podanie wyniku: $P_{DBE} = 3$.

2 pkt – zapisanie zależności $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C = 20$ **oraz** wzoru na pole trójkąta:

$P_{DBE} = \frac{3}{8} \cdot |AB| \cdot h_E$ (lub równoważnego) **oraz** zapisanie zależności: $\frac{h_E}{h_C} = \frac{1}{5}$ wynikającej z podobieństwa trójkątów C_1BC oraz E_1BE.

1 pkt – zapisanie zależności $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C = 20$ **oraz** wzoru na pole trójkąta:

$P_{DBE} = \frac{3}{8} \cdot |AB| \cdot h_E$ (lub równoważnego)

ALBO

– zapisanie zależności: $\frac{h_E}{h_C} = \frac{1}{5}$ wynikającej z podobieństwa trójkątów C_1BC oraz E_1BE.

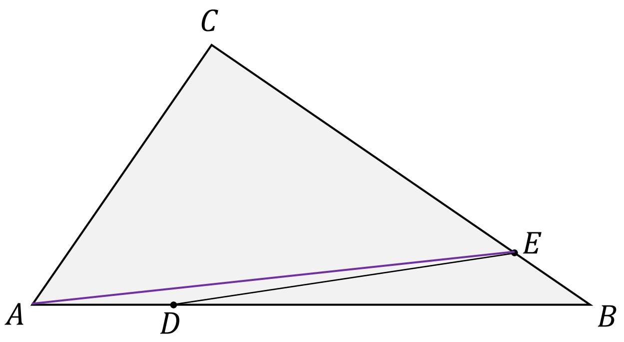
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Skorzystamy ze związków:

$$\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{3}{4} \qquad \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{1}{5}$$



1. Zauważmy, że trójkąty ABE i DBE mają wspólny wierzchołek E, a ich podstawy DB i AB leżą na jednej prostej. Zatem oba trójkąty mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka E. Stosunek pól tych trójkątów jest więc równy stosunkowi długości ich podstaw DB i AB.

$$\frac{P_{DBE}}{P_{ABE}} = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{3}{4}$$

2. Trójkąty ABE i ABC mają wspólny wierzchołek A, a ich podstawy BE i BC leżą na jednej prostej. Zatem oba trójkąty mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka A. Stosunek pól tych trójkątów jest więc równy stosunkowi długości ich podstaw BE i BC.

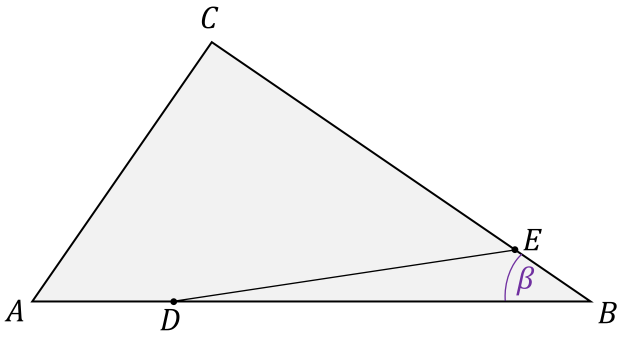
$$\frac{P_{ABE}}{P_{ABC}} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{1}{5}$$

3. Z punktów 1. i 2. otrzymujemy:

$$P_{DBE} = \frac{3}{4}P_{ABE} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot P_{ABC} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot 20 = 3$$

Sposób 2.

Oznaczmy $|\measuredangle DBE| = |\measuredangle ABC| = \beta$.



1. Zapiszemy wzór na pole trójkąta ABC i wykorzystamy dane zadania:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta$$

$$20 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta$$

stąd

$$|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta = 40$$

2. Zapiszemy wzór na pole trójkąta DBE i wykorzystamy warunki zadania:

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |BE| \cdot \sin\beta$$

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot |AB|\right) \cdot \left(\frac{1}{5}|BC|\right) \cdot \sin\beta$$

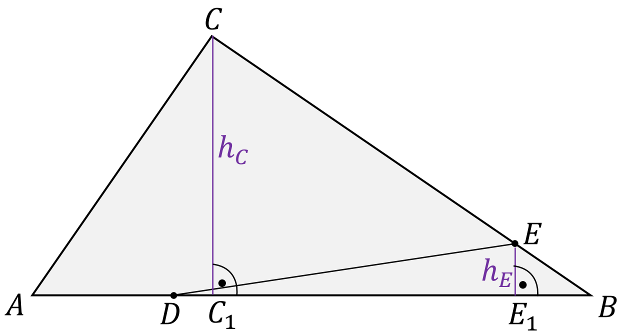
$$P_{DBE} = \frac{3}{40} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot sin\,\beta$$

3. Do otrzymanego wzoru na pole trójkąta DBE podstawimy wynik z punktu 1.:

$$P_{DBE} = \frac{3}{40} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta = \frac{3}{40} \cdot 40 = 3$$

Sposób 3.

Wysokości trójkątów ABC i DBE opuszczone – odpowiednio – z wierzchołków C i E oznaczymy jako h_C, h_E.



1. Zapiszemy wzór na pole trójkąta ABC i wykorzystamy dane zadania:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C$$

$$20 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C$$

stąd

$$|AB| \cdot h_C = 40$$

2. Zapiszemy wzór na pole trójkąta DBE i wykorzystamy warunek zadania:

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot h_E$$

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot |AB|\right) \cdot h_E$$

$$P_{DBE} = \frac{3}{8} \cdot |AB| \cdot h_E$$

3. Trójkąty C_1BC oraz E_1BE są podobne (na podstawie cechy: kąt – kąt – kąt), zatem:

$$\frac{|EE_1|}{|CC_1|} = \frac{|BE|}{|BC|} \qquad \text{stąd} \qquad \frac{h_E}{h_C} = \frac{1}{5}$$

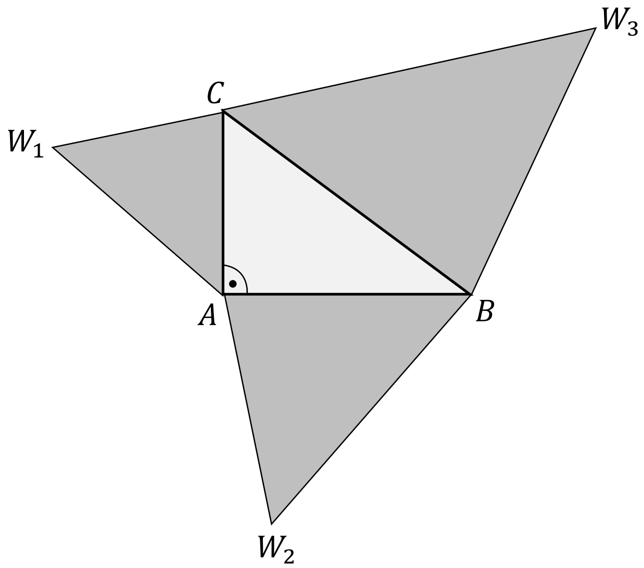
4. Do otrzymanego wzoru na pole trójkąta DBE (punkt 2.) podstawimy wynik z punktu 3. i wynik z punktu 1.:

$$P_{DBE} = \frac{3}{8} \cdot |AB| \cdot h_E = \frac{3}{8} \cdot |AB| \cdot \frac{h_C}{5} = \frac{3}{40} \cdot |AB| \cdot h_C = \frac{3}{40} \cdot 40 = 3$$

Zadanie 46. (0–3)

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa można udowodnić bardziej ogólną własność niż ta, o której mówi samo to twierdzenie.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech każdy z boków tego trójkąta: CA, AB, BC będzie podstawą trójkątów podobnych, odpowiednio: CAW_1, ABW_2, BCW_3. Trójkąty te mają odpowiadające sobie kąty o równych miarach, odpowiednio przy wierzchołkach: W_1, W_2, W_3.



Pola trójkątów: CAW_1, ABW_2, BCW_3 oznaczymy odpowiednio jako P_1, P_2, P_3.

Udowodnij, że

$$\boldsymbol{P_3 = P_1 + P_2}$$

Wymagania ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:
9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przeprowadzenie pełnego dowodu równania $P_3 = P_1 + P_2$.

2 pkt – zapisanie sumy pól trójkątów CAW_1, ABW_2 wyrażonej poprzez wysokość jednego z nich, np.: $P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot |CA| + \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{|AB|^2}{|CA|}$ **oraz** zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC: $|CA|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$

ALBO

– zapisanie zależności między polami figur płaskich a długościami odcinków trójkąta: $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{|AB|}{|CA|}\right)^2$, $\frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{|BC|}{|CA|}\right)^2$ **oraz** zapisanie sumy pól figur płaskich wyrażonej za pomocą długości boków trójkąta i jednego z pól, np.: $P_1 + P_2 = P_1 + \frac{|AB|^2}{|CA|^2} \cdot P_1$ **oraz** zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC: $|CA|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$,

ALBO

– poprawne wyprowadzenie i zapisanie wyrażenia postaci: $P_1 + P_2 = P_1 \cdot \frac{|BC|^2}{|CA|^2}$.

1 pkt – zapisanie wzorów na pola trójkątów **oraz** wyrażenie wysokości dwóch trójkątów (na mocy ich podobieństwa) poprzez wysokość trzeciego z nich, np.:

$P_1 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot |CA|$, $P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{|AB|^2}{|CA|}$, $P_3 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{|BC|^2}{|CA|}$

ALBO

– zapisanie zależności między polami figur płaskich a długościami odcinków trójkąta, np.: $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{|AB|}{|CA|}\right)^2$, $\frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{|BC|}{|CA|}\right)^2$,

ALBO

– zapisanie sumy pól figur płaskich wyrażonej za pomocą długości boków trójkąta oraz jednego z pól, np.: $P_1 + P_2 = P_1 + \frac{|AB|^2}{|CA|^2} \cdot P_1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

1. Wysokości trzech trójkątów: CAW_1, ABW_2, BCW_3, opuszczone z wierzchołków W_1, W_2, W_3 oznaczymy odpowiednio jako: h_1, h_2, h_3.
   Zapiszemy wzory na pola powierzchni tych trójkątów:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot |CA| \qquad P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot |AB| \qquad P_3 = \frac{1}{2} \cdot h_3 \cdot |BC|$$

2. Zapiszemy związki wynikające z podobieństwa trójkątów:

$$\Delta CAW_1 \sim \Delta ABW_2\,, \quad \text{zatem} \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{|AB|}{|CA|}\,, \quad \text{więc} \quad h_2 = h_1 \cdot \frac{|AB|}{|CA|}$$

$$\Delta CAW_1 \sim \Delta BCW_3\,, \quad \text{zatem} \quad \frac{h_3}{h_1} = \frac{|BC|}{|CA|}\,, \quad \text{więc} \quad h_3 = h_1 \cdot \frac{|BC|}{|CA|}$$

3. Ponownie zapiszemy wzory na pola trójkątów, wykorzystując powyższe zależności:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot |CA| \qquad P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{|AB|^2}{|CA|} \qquad P_3 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{|BC|^2}{|CA|}$$

4. Obliczymy sumę $P_1 + P_2$.

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot |CA| + \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{|AB|^2}{|CA|} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \left(|CA| + \frac{|AB|^2}{|CA|} \right)$$

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{|CA|^2 + |AB|^2}{|CA|}$$

5. Wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABC:

Ponieważ

$$|CA|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$$

to

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{|BC|^2}{|CA|}$$

6. Prawa strona powyższego równania, na mocy pkt 3., jest równa P_3:

$$P_1 + P_2 = P_3$$

To kończy dowód.

Sposób 2.

Obwody trójkątów: CAW_1, ABW_2, BCW_3 oznaczymy odpowiednio jako O_1, O_2, O_3.

1. Wykorzystamy zależności między obwodami a polami figur płaskich podobnych:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{O_2}{O_1}\right)^2 \qquad \frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{O_3}{O_1}\right)^2$$

2. Wykorzystamy fakt, że stosunki obwodów trójkątów podobnych są równe stosunkom długości podstaw tych trójkątów:

$$\frac{O_2}{O_1} = \frac{|AB|}{|CA|} \qquad \frac{O_3}{O_1} = \frac{|BC|}{|CA|}$$

3. Z zależności 1. i 2. wynika:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{|AB|}{|CA|}\right)^2 \qquad \frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{|BC|}{|CA|}\right)^2$$

$$P_2 = \frac{|AB|^2}{|CA|^2} \cdot P_1 \qquad P_3 = \frac{|BC|^2}{|CA|^2} \cdot P_1$$

4. Obliczymy sumę $P_1 + P_2$:

$$P_1 + P_2 = P_1 + \frac{|AB|^2}{|CA|^2} \cdot P_1 = P_1 \cdot \left(1 + \frac{|AB|^2}{|CA|^2}\right)$$

$$P_1 + P_2 = P_1 \cdot \frac{|CA|^2 + |AB|^2}{|CA|^2}$$

5. Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC:

$$|CA|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$$

Zatem równanie w drugim wierszu pkt 4. można zapisać w postaci:

$$P_1 + P_2 = P_1 \cdot \frac{|BC|^2}{|CA|^2}$$

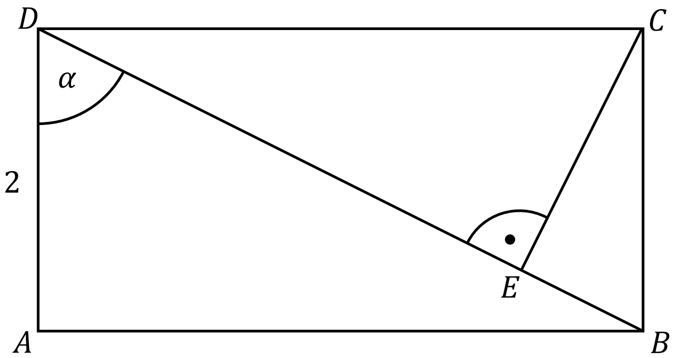
Prawa strona powyższego równania, na mocy pkt 3., jest równa P_3:

$$P_1 + P_2 = P_3$$

To kończy dowód.

Zadanie 47. (0–3)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 2$. Kąt BDA ma miarę α, taką, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Przekątna BD i prosta przechodząca przez wierzchołek C prostopadła do BD przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek).



Oblicz długość odcinka CE.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
12) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda i obliczenie długości odcinka CE: $|CE| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

2 pkt – obliczenie długości odcinka BD: $|BD| = 2\sqrt{5}$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą, wyrażającą długość odcinka CE, wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DEC lub BCE,

ALBO

– obliczenie sinusa kąta CBD: $\sin|\sphericalangle CBD| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ **oraz** zapisanie, że $\sin|\sphericalangle CBD| = \frac{|CE|}{|BC|}$.

1 pkt – obliczenie długości boku AB: $|AB| = 4$

ALBO

– stwierdzenie, że $|\sphericalangle CBD| = \alpha$ **oraz** zapisanie, że $\frac{|CE|}{|BE|} = 2$,

ALBO

– obliczenie sinusa kąta CBD: $\sin|\sphericalangle CBD| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha = 2$, to $|AB| = 4$. Zatem $|DC| = 4$.

Trójkąt BCD jest prostokątny. Odcinek CE jest wysokością trójkąta BCD poprowadzoną na przeciwprostokątną BD.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość odcinka BD

$$|BD|^2 = 2^2 + 4^2$$
$$|BD|^2 = 20$$
$$|BD| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Pole trójkąta BCD jest równe

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot |CE|$$

Ponadto pole trójkąta BCD można obliczyć jako połowę iloczynu długości przyprostokątnych

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

Zatem

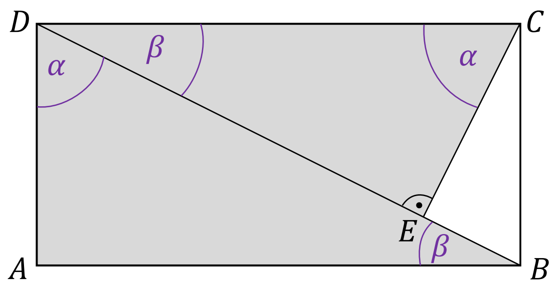
$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot |CE| = 4$$

$$|CE| = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka CE jest równa $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Sposób 2.

Wprowadźmy oznaczenie: $|\sphericalangle ABD| = \beta$.
Wyodrębnimy trójkąty prostokątne: ABD, EDC. W tych trójkątach wyznaczymy kąty ostre.
Skorzystamy z zależności, że $\alpha + \beta = 90°$ oraz z własności kątów naprzemianległych.



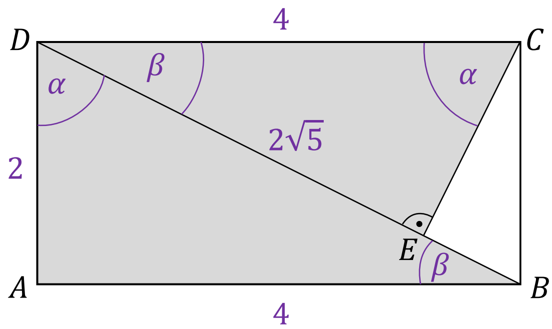
Na podstawie cechy kąt – kąt – kąt, stwierdzamy, że trójkąty ABD i EDC są podobne (zobacz rysunek).

Ponieważ $\text{tg}\,\alpha = 2$, to $|AB| = 4$. Zatem $|DC| = 4$.

Obliczymy $|BD|$ z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD:

$$|BD|^2 = |DA|^2 + |AB|^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$|BD| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



Z podobieństwa trójkątów ABD i EDC obliczymy długość odcinka CE.

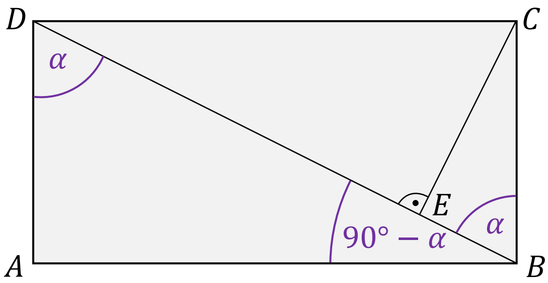
$$\frac{|DA|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|DC|}$$

$$\frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{|CE|}{4}$$

$$|CE| = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka CE jest równa $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

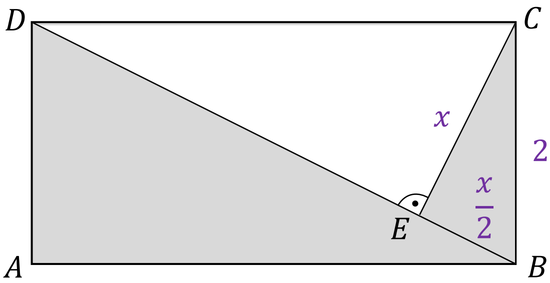
Sposób 3.
Ponieważ $|\sphericalangle BDA| = \alpha$, więc $|\sphericalangle ABD| = 90° - \alpha$.
Zatem $|\sphericalangle CBD| = 90° - |\sphericalangle ABD| = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$.



Oznaczmy: $|CE| = x$.

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha = 2$, więc $\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{x}{|BE|} = 2$.

Stąd $|BE| = \frac{x}{2}$.



Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta BEC:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2^2$$

$$x^2 + \frac{x^2}{4} = 4$$

$$\frac{5x^2}{4} = 4$$

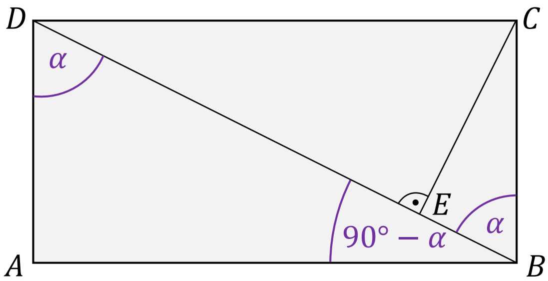
$$x^2 = \frac{16}{5}$$

$$x=\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka CE jest równa $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Sposób 4.

Ponieważ $|\sphericalangle BDA|=\alpha$, więc $|\sphericalangle ABD|=90^\circ-\alpha$.
Zatem $|\sphericalangle CBD|=90^\circ-|\sphericalangle ABD|=90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha$.



Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha=2$, zatem $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$. Stąd $\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha$.

Wykorzystując tę zależność oraz tożsamość $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ otrzymujemy

$$\sin^2\alpha+\left(\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\right)^2=1$$

$$\frac{5}{4}\cdot\sin^2\alpha=1$$

$$\sin^2\alpha=\frac{4}{5}$$

Stąd $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, ponieważ α jest kątem ostrym. Jednocześnie $\sin\alpha=\frac{|CE|}{|BC|}$.

Zatem

$$\frac{|CE|}{|BC|}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

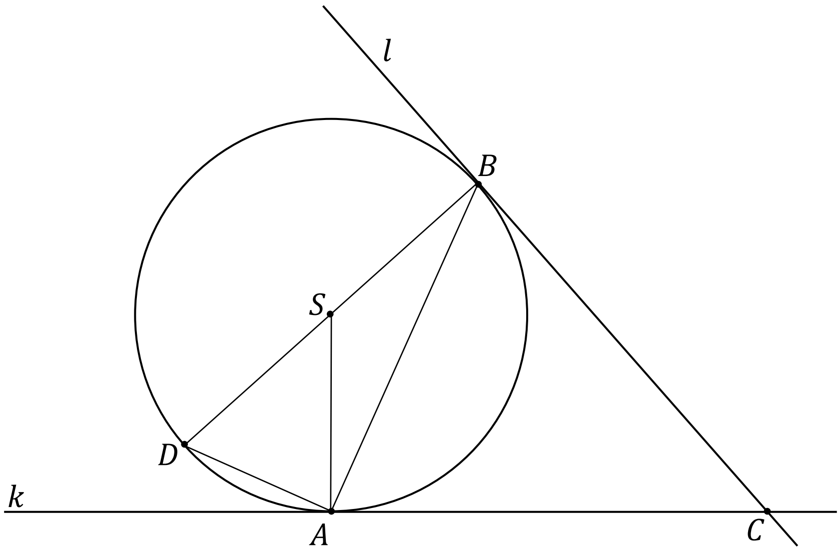
$$\frac{|CE|}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$|CE|=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

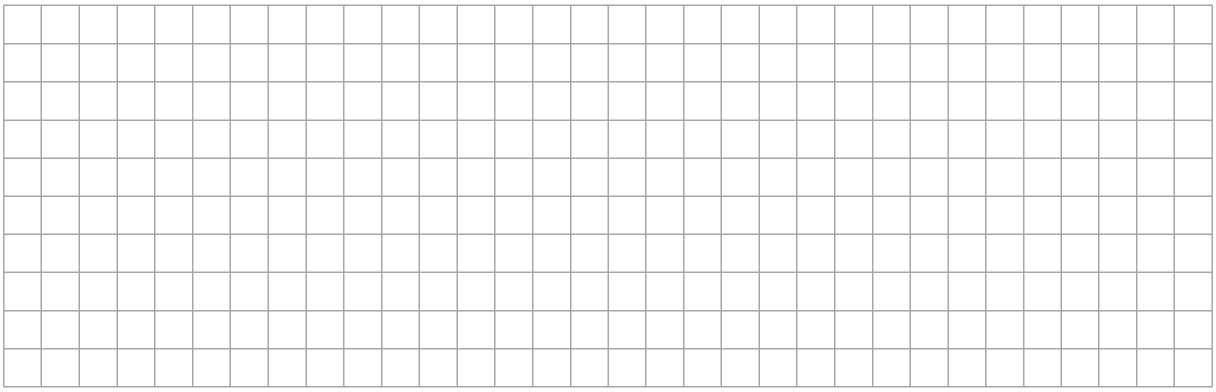
Długość odcinka CE jest równa $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Zadanie 48. (0–2)

Trzy różne punkty A, B i D leżą na okręgu o środku w punkcie S. Odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Styczne k i l do tego okręgu, odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punkcie C (zobacz rysunek poniżej).



Wykaż, że trójkąty ACB i ASD są podobne.



Wymagania ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Wymagania szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przeprowadzenie pełnego dowodu podobieństwa trójkątów ACB i ASD.
1 pkt – zapisanie, że trójkąty ACB i ASD są równoramienne **oraz** wskazanie / zapisanie równości odpowiednich ramion.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Zauważmy, że:

- trójkąt ACB jest równoramienny, gdzie: $|AC| = |CB|$ (na mocy twierdzenia o odcinkach stycznych).
- trójkąt ASD jest równoramienny, gdzie: $|SD| = |SA|$ (odcinki SD i SA są promieniami okręgu).
- $|\sphericalangle SAC| = 90°$ (promień poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do stycznej)
- $|\sphericalangle BAD| = 90°$ (kąt BAD jest kątem wpisanym w okrąg, opartym na średnicy BD).

Oznaczmy: $|\sphericalangle BAC| = \beta$.

Wtedy $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SAC| - |\sphericalangle BAC| = 90° - \beta$.

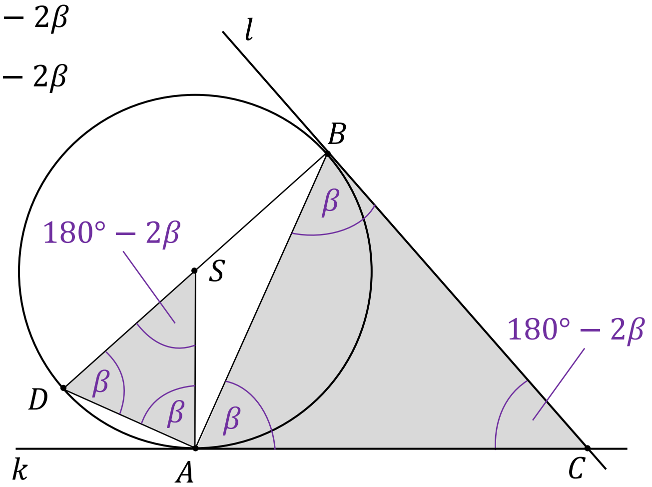
Stąd $|\sphericalangle SAD| = |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle SAB| = 90° - (90° - \beta) = \beta$.

Ponieważ trójkąty ACB oraz ASD są równoramienne, stąd wynika, że:

$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAC| = \beta$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 180° - 2\beta$

$|\sphericalangle SDA| = |\sphericalangle DAS| = \beta$ oraz $|\sphericalangle ASD| = 180° - 2\beta$

Trójkąty ACB i ASD są podobne na podstawie cechy kąt – kąt – kąt podobieństwa trójkątów.



Sposób 2.

Zauważmy, że:

- trójkąt ACB jest równoramienny, gdzie: $|AC| = |CB|$ (na mocy twierdzenia o odcinkach stycznych).
- trójkąt ASD jest równoramienny, gdzie: $|SD| = |SA|$ (odcinki SD i SA są promieniami okręgu).
- trójkąt ASB jest równoramienny, gdzie: $|SA| = |SB|$ (odcinki SA i SB są promieniami okręgu).
- $|\sphericalangle SAC| = 90°$ (promień poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do stycznej)

Oznaczmy: $|\sphericalangle BAC| = \beta$.

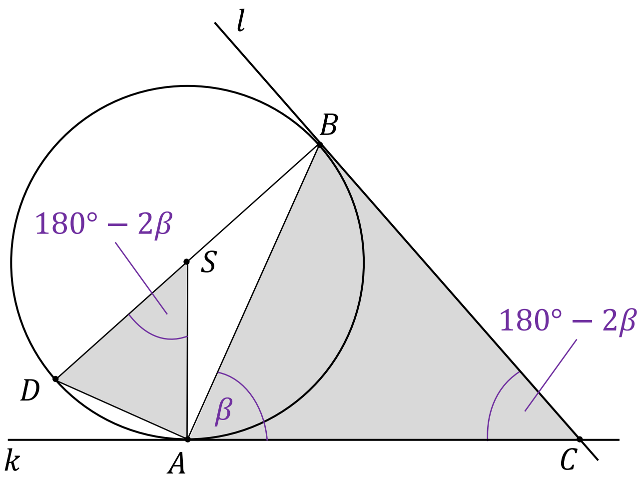
Ponieważ trójkąt ACB jest równoramienny, więc

$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAC| = \beta$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 180° - 2\beta$

Wtedy $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SAC| - |\sphericalangle BAC| = 90° - \beta$.

Ponieważ trójkąt ASB jest równoramienny, więc $|\sphericalangle SBA| = 90° - \beta$.

Kąt DSA jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany SBA, zatem:
$|\sphericalangle DSA| = 2 \cdot |\sphericalangle SBA| = 2 \cdot (90° - \beta) = 180° - 2\beta$.



Długości dwóch boków trójkąta ACB są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta ASD i kąty między tymi parami boków są przystające:

$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{|BC|}{|DS|} \quad \text{i} \quad |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DSA| = 180° - 2\beta$$

Trójkąty ACB i ASD są podobne na podstawie cechy bok – kąt – bok podobieństwa trójkątów.

Sposób 3.

Zauważmy, że:

- trójkąt ACB jest równoramienny, gdzie: $|AC| = |CB|$ (na mocy twierdzenia o odcinkach stycznych).
- trójkąt ASD jest równoramienny, gdzie: $|SD| = |SA|$ (odcinki SD i SA są promieniami okręgu).
- $|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SBC| = 90^\circ$ (promień poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do stycznej)

Oznaczmy $|\sphericalangle ACB| = \alpha$.

Rozważmy czworokąt $ACBS$. Ponieważ suma miar kątów w czworokącie jest równa 360°, a kąty SAC oraz SBC są proste, to:

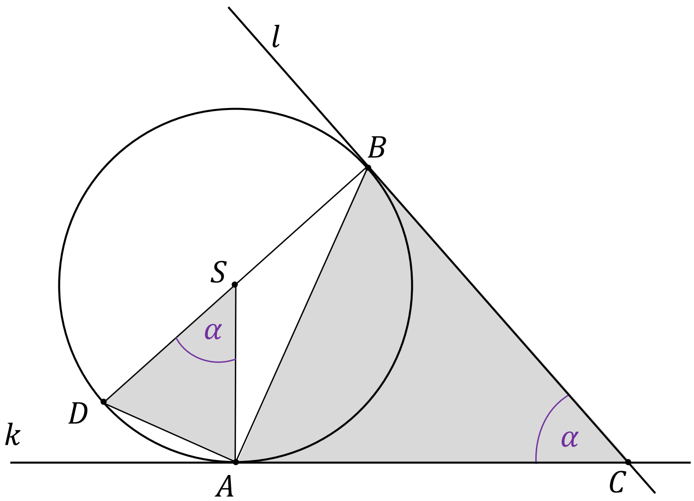
$$|\sphericalangle ASB| = 360^\circ - |\sphericalangle SAC| - |\sphericalangle SBC| - |\sphericalangle ACB|$$

Zatem:

$$|\sphericalangle ASB| = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$$

Kąt DSA jest przyległy do kąta ASB, zatem:

$$|\sphericalangle DSA| = 180^\circ - |\sphericalangle ASB| = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha.$$



Długości dwóch boków trójkąta ACB są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta ASD i kąty między tymi parami boków są przystające:

$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{|BC|}{|DS|} \quad \text{i} \quad |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DSA| = \alpha$$

Trójkąty ACB i ASD są podobne na podstawie cechy bok – kąt – bok podobieństwa trójkątów.

Zadanie 49. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$.

Oblicz sinus najmniejszego kąta wewnętrznego trójkąta ABC.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
   2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;
   3) stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

VIII. Planimetria. Zdający:
   2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie sinusa kąta ACB: $\sin|\measuredangle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

2 pkt – obliczenie cosinusa kąta ACB: $\cos|\measuredangle ACB| = \frac{3}{4}$.

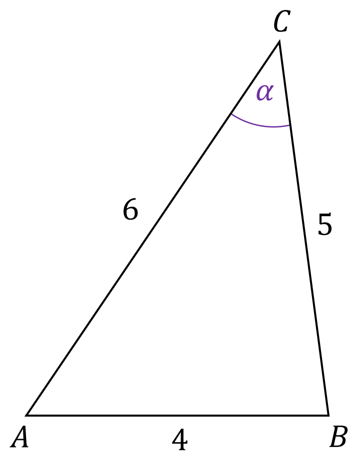
1 pkt – zapisanie, że najmniejszym kątem trójkąta jest kąt ACB.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

W trójkącie naprzeciw najmniejszego kąta wewnętrznego leży najkrótszy bok, więc musimy obliczyć sinus kąta ACB.

Oznaczmy: $|\measuredangle ACB| = \alpha$.



Z twierdzenia cosinusów obliczymy $\cos\alpha$:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\alpha$$

$$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$$

$$16 = 36 + 25 - 60 \cdot \cos\alpha$$

$$60 \cdot \cos\alpha = 61 - 16$$

$$\cos\alpha = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

Z „jedynki trygonometrycznej” obliczymy $\sin\alpha$:

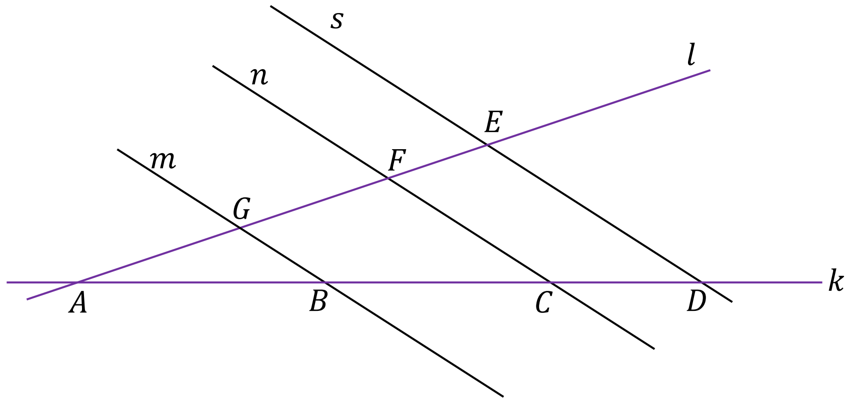
$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Zadanie 50. (0–1)

Proste k i l przecinają się w punkcie A. Proste m, n i s są wzajemnie równoległe i przecinają obie proste k i l w punktach B, C, D, E, F, G (zobacz rysunek poniżej), w taki sposób, że: $|BC| = 30$, $|CD| = 20$, $|GF| = 21$.



Oblicz długość odcinka FE.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

2) Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Wymaganie szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:

7) stosuje twierdzenie Talesa.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawna metoda rozwiązania **oraz** zapisanie wyniku $|FE| = 14$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zastosujemy twierdzenie Talesa:

$$\frac{|GF|}{|BC|} = \frac{|FE|}{|CD|}, \qquad \text{stąd} \qquad \frac{21}{30} = \frac{|FE|}{20}, \qquad \text{zatem} \qquad |FE| = 14$$

Zadanie 51. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest okrąg $\mathcal{O}$ określony równaniem:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.

1. Środek S okręgu $\mathcal{O}$ ma współrzędne

A. $S = (2, -3)$

B. $S = (-2, -3)$

C. $S = (-2, 3)$

D. $S = (-2, 3)$

2. Promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy

E. $r = 16$

F. $r = 4$

G. $r = 5$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:

4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

AF

Zadanie 52. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są punkty $A = (1, 2)$ oraz $B = (3, 7)$.
Punkty A_O oraz B_O są odpowiednio obrazami punktów A i B w symetrii środkowej o środku w punkcie $O = (0, 0)$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A_O i B_O jest równy

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\left(-\frac{5}{2}\right)$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\left(-\frac{2}{5}\right)$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
  2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość do innej prostej);
  5) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 53. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest trapez $ABCD$, w którym boki AB i CD są równoległe oraz $C = (3, 15)$. Wierzchołki A i B tego trapezu leżą na prostej o równaniu $3x - y + 10 = 0$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Bok CD tego trapezu zawiera się w prostej o równaniu

A. $y = 3x + 15$

B. $y = 3x + 6$

C. $y = \frac{5}{3}x + 10$

D. $y = -\frac{1}{3}x + 16$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość do innej prostej).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 54. (0–3)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), punkty $A = (-1, -5)$, $B = (2, -7)$, $C = (6, 9)$ i $D = (-2, 9)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.

Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
   1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
   2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość do innej prostej).

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia współrzędnych punktu P **oraz** podanie poprawnego wyniku: $P = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

2 pkt – wyznaczenie równania prostej AC: $y = 2x - 3$ **oraz** wyznaczenie równania prostej BD: $y = -4x + 1$.

1 pkt – wyznaczenie równania prostej AC: $y = 2x - 3$
ALBO
– wyznaczenie równania prostej BD: $y = -4x + 1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech P oznacza punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$.
Punkt P jest punktem przecięcia prostych AC i BD.

Skorzystamy ze wzoru na równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*).

Wyznaczamy równanie prostej AC:

$$(y+5)(6+1)-(9+5)(x+1)=0$$
$$7y+35-14x-14=0$$
$$7y=14x-21$$
$$y=2x-3$$

Wyznaczamy równanie prostej BD:

$$(y+7)(-2-2)-(9+7)(x-2)=0$$
$$-4y-28-16x+32=0$$
$$-4y=16x-4$$
$$y=-4x+1$$

Punkt P jest punktem przecięcia prostych AC i BD, więc jego współrzędne obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=-4x+1 \end{cases}$$

Stąd

$$2x-3=-4x+1$$
$$6x=4$$
$$x=\frac{2}{3}$$
$$y=-\frac{5}{3}$$

Zatem punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$ ma współrzędne $\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

Zadanie 55. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = \left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$. Bok AB tego równoległoboku zawiera się w prostej o równaniu $y = x - 2$, a bok AD zawiera się w prostej o równaniu $y = 3x - 6$.

Oblicz współrzędne wierzchołka B.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
 2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość do innej prostej).

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia współrzędnych punktu B **oraz** podanie poprawnego wyniku: $B = (4, 2)$.

3 pkt – wyznaczenie równania prostej BC: $y = 3x - 10$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu A: $A = (2, 0)$ **oraz** obliczenie współrzędnych środka M_{AB} boku AB: $M_{AB} = (3, 1)$.

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C: $C = (9, 17)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka M_{AB} boku AB: $M_{AB} = (3, 1)$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu A: $A = (2, 0)$ **oraz** wyznaczenie równania prostej SM_{AB} (gdzie M_{AB} jest środkiem boku AB): $y = 3x - 8$.

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktu A: $A = (2, 0)$
ALBO
– wyznaczenie równania prostej SM_{AB} (gdzie M_{AB} jest środkiem odcinka AB): $y = 3x - 8$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Stąd

$$x - 2 = 3x - 6$$

$$-2x = -4$$

$$x = 2$$

$$y = 0$$

Zatem $A = (2,0)$.

Punkt S jest środkiem odcinka AC, więc

$$\frac{2 + x_c}{2} = \frac{11}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{0 + y_c}{2} = \frac{17}{2}$$

$$x_c = 9 \quad \text{oraz} \quad y_c = 17$$

Zatem $C = (9, 17)$.

Prosta BC jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy 3.

Wyznaczamy równanie prostej BC. Skorzystamy ze wzoru na równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym, która przechodzi przez dany punkt (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*).

$$y = 3(x - 9) + 17$$

$$y = 3x - 10$$

Punkt B jest punktem wspólnym prostych AB i BC, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 3x - 10 \end{cases}$$

Stąd

$$x - 2 = 3x - 10$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4$$

$$y = 2$$

Zatem $B = (4, 2)$.

Sposób 2.

Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Stąd

$$x - 2 = 3x - 6$$
$$-2x = -4$$
$$x = 2$$
$$y = 0$$

Zatem $A = (2,0)$.

Oznaczmy przez M_{AB} środek odcinka AB. Prosta SM_{AB} jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej SM_{AB} jest równy 3.

Wyznaczamy równanie prostej SM_{AB}. Skorzystamy ze wzoru na równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym, która przechodzi przez dany punkt (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*).

$$y = 3\left(x - \frac{11}{2}\right) + \frac{17}{2}$$
$$y = 3x - 8$$

Punkt M_{AB} jest punktem wspólnym prostych AB i SM_{AB}, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

Stąd

$$x - 2 = 3x - 8$$
$$-2x = -6$$
$$x = 3$$
$$y = 1$$

Zatem $M_{AB} = (3, 1)$.

Punkt M_{AB} jest środkiem odcinka AB, więc

$$\frac{2 + x_b}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad \frac{0 + y_b}{2} = 1$$
$$x_b = 4 \quad \text{oraz} \quad y_b = 2$$

Zatem $B = (4, 2)$.

Zadanie 56. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (2, 8)$ oraz $B = (10, 2)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABP, w którym $|AP| = |BP|$.
Wierzchołek P leży na osi Ox układu współrzędnych.

Oblicz współrzędne punktu P oraz długość odcinka AP.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.

Wymagania szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
   3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia współrzędnych punktu P **oraz** długości odcinka AP **oraz** poprawne wyniki: $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$, $|AP| = \frac{5\sqrt{41}}{4}$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu P: $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

2 pkt – zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, np.

$$\sqrt{\left(x_p - 2\right)^2 + \left(y_p - 8\right)^2} = \sqrt{\left(x_p - 10\right)^2 + \left(y_p - 2\right)^2} \quad \text{i} \quad y_p = 0.$$

1 pkt – zapisanie drugiej współrzędnej punktu P np.: $y_p = 0$, $P = \left(x_p, 0\right)$

ALBO

– zapisanie równości $|AP| = |BP|$ w zależności od współrzędnych punktu $P = \left(x_p, y_p\right)$, np.

$$\sqrt{\left(x_p - 2\right)^2 + \left(y_p - 8\right)^2} = \sqrt{\left(x_p - 10\right)^2 + \left(y_p - 2\right)^2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ punkt P leży na osi Ox, więc jego współrzędne są równe $P = \left(x_p, 0\right)$.

Stąd, że $|AP| = |BP|$ i ze wzoru na odległość między dwoma punktami otrzymujemy równanie

$$\sqrt{\left(x_p - 2\right)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{\left(x_p - 10\right)^2 + (0 - 2)^2}$$

$$\left(x_p - 2\right)^2 + (0 - 8)^2 = \left(x_p - 10\right)^2 + (0 - 2)^2$$

$$x_p^2 - 4x_p + 4 + 64 = x_p^2 - 20x_p + 100 + 4$$

$$16x_p = 36$$

$$x_p = \frac{9}{4}$$

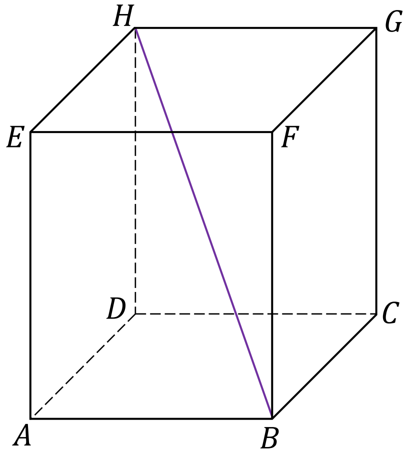
Zatem $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

Obliczamy długość odcinka AP:

$$|AP| = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 2\right)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (-8)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + 64} = \sqrt{\frac{1025}{16}} = \frac{5\sqrt{41}}{4}$$

Zadanie 57.

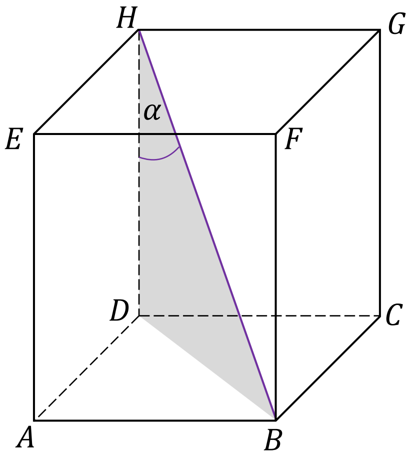
Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są jego podstawami. Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.



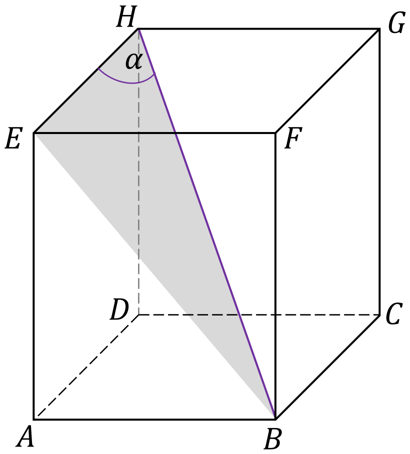
Zadanie 57.1. (0–1)

Na którym rysunku prawidłowo oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu a jego ścianą boczną $ADHE$? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

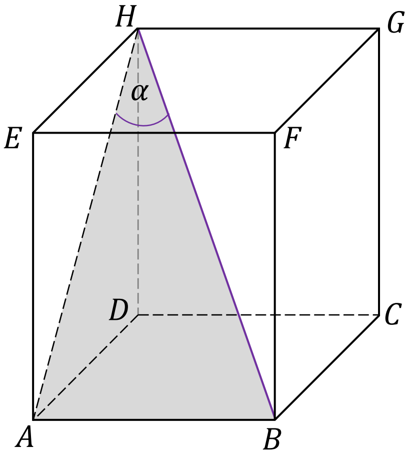
A. $\alpha = \measuredangle BHD$



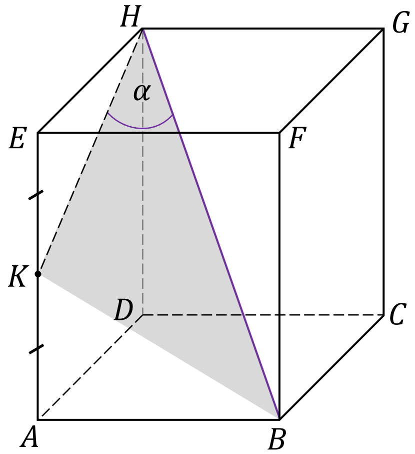
B. $\alpha = \measuredangle BHE$



C. $\alpha = \measuredangle BHA$



D. $\alpha = \measuredangle BHK$, gdzie K jest środkiem krawędzi AE.



Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:
   2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
   3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

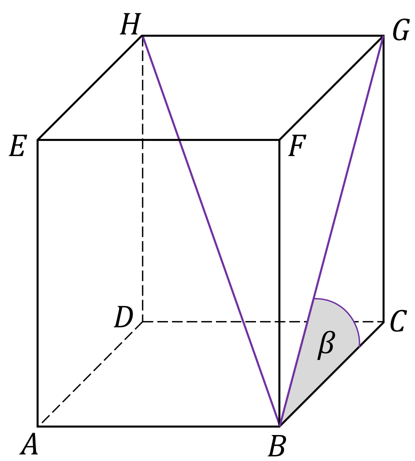
C

Zadanie 57.2. (0–4)

W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{7} \qquad |BG| = 2\sqrt{130} \qquad |BH| = 2\sqrt{194}$$

gdzie odcinek BH jest przekątną prostopadłościanu, odcinek BG jest przekątną ściany bocznej $BCGF$, β jest miarą kąta GBC. Sytuację ilustruje rysunek poniżej.



Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:
   3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) […];
   5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów […] również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia pola powierzchni całkowitej graniastosłupa **oraz** podanie poprawnego wyniku: $P_c = 1528$.

3 pkt – poprawne obliczenie długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu: $|BC| = 14,\ |CG| = 18,\ |GH| = 16$.

2 pkt – obliczenie długości dwóch krawędzi BC oraz CG: $|BC| = 14$ oraz $|CG| = 18$

ALBO

– obliczenie długości krawędzi GH: $|GH| = 16$ **oraz** zapisanie układu równań z niewiadomymi $|BC|$ oraz $|CG|$ np.: $|BC|^2 + |CG|^2 = \left(2\sqrt{130}\right)^2$ oraz $\frac{|CG|}{|BC|} = \frac{9}{7}$.

1 pkt – zapisanie układu równań z niewiadomymi $|BC|$ oraz $|CG|$ np.:

$|BC|^2 + |CG|^2 = \left(2\sqrt{130}\right)^2$ oraz $\frac{|CG|}{|BC|} = \frac{9}{7}$

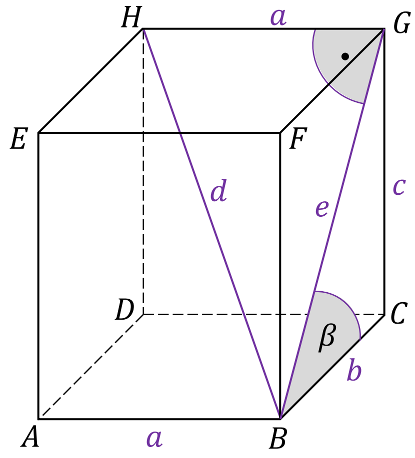
ALBO

– obliczenie długości krawędzi GH: $|GH| = 16$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia dla odcinków (jak na rysunku obok) – długości krawędzi prostopadłościanu oznaczmy przez a, b, c, a przekątną prostopadłościanu i przekątną ściany $BCGF$ oznaczmy przez d oraz e. Warunki zadania zapiszmy jako:



$$\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{7} \qquad e = 2\sqrt{130} \qquad d = 2\sqrt{194}$$

1. Wyznaczymy zależność między b oraz c w trójkącie BCG:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{b} = \frac{9}{7}, \qquad \text{stąd} \qquad c = \frac{9}{7}b$$

2. Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BCG, w celu obliczenia b i c:

$$b^2 + c^2 = e^2$$

Wykorzystamy związek z pkt. 1:

$$b^2 + \left(\frac{9}{7}b\right)^2 = \left(2\sqrt{130}\right)^2$$

$$\frac{130}{49}b^2 = 520$$

$$b^2 = 196$$

zatem

$$b = 14 \qquad \text{oraz} \qquad c = \frac{9}{7}\cdot 14 = 18$$

3. Zauważmy, że trójkąt BGH jest prostokątny (kąt prosty jest przy wierzchołku G). Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BGH, w celu obliczenia a.

$$e^2 + a^2 = d^2$$

$$\left(2\sqrt{130}\right)^2 + a^2 = \left(2\sqrt{194}\right)^2$$

$$a^2 = 256$$

$$a = 16$$

4. Obliczymy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu:

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$$

$$P_c = 2\cdot 16\cdot 14 + 2\cdot 14\cdot 18 + 2\cdot 16\cdot 18$$

$$P_c = 1528$$

Zadanie 58. (0–1)

Dane są dwa prostopadłościany podobne: $\mathcal{B}_1$ oraz $\mathcal{B}_2$. Objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równa V, a objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równe P.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równe

<table>
<tr><td>A.</td><td>$27P$,</td><td rowspan="3">ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy</td><td>1.</td><td>stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>$9P$,</td><td>2.</td><td>pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.</td></tr>
<tr><td>C.</td><td>$3\sqrt{3}P$,</td><td>3.</td><td>kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.</td></tr>
</table>

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Wymaganie szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:
   6) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

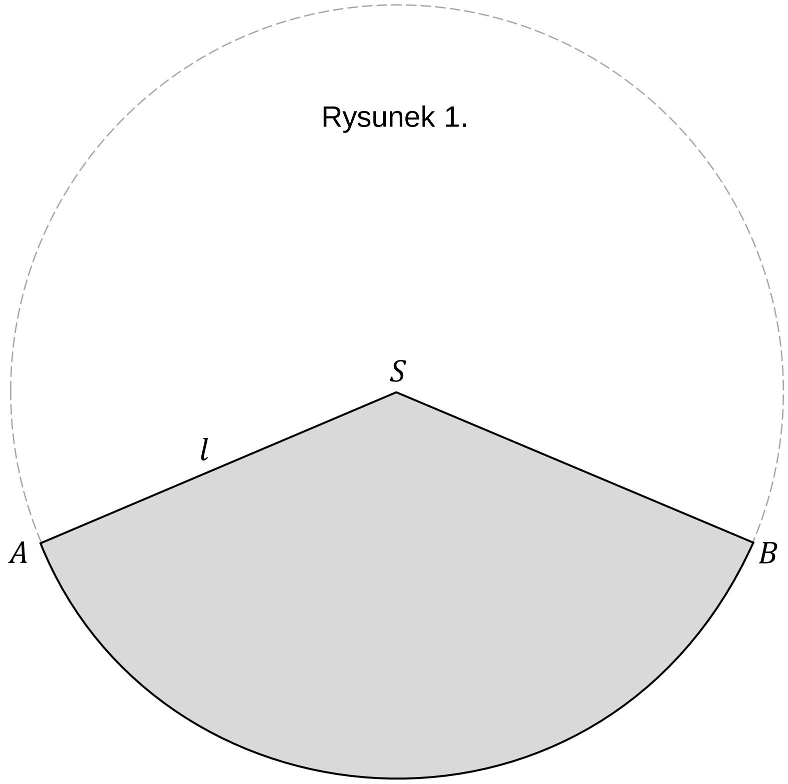
B3

Zadanie 59.

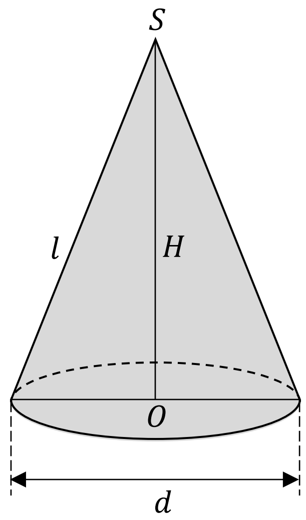
Hania zaprojektowała i wykonała czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka miała kształt <u>powierzchni bocznej stożka</u> o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l.

Żeby wykonać czapeczkę, Hania najpierw narysowała na kartonie figurę płaską ABS o kształcie <u>wycinka koła</u> o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z kartonu, odpowiednio ją wymodelowała i skleiła odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.).

Do obliczeń przyjmij, że rzeczywiste figury są idealne.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Zadanie 59.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapeczka, ma miarę (w zaokrągleniu do $1°$)

A. $44°$ **B.** $136°$ **C.** $134°$ **D.** $68°$

Wskazówka: skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:
   4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów.

VII. Trygonometria. Zdający:
   4) oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty prostokątne, w tym z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 59.2. (0–3)

Oblicz miarę kąta BSA wycinka koła, z którego powstała powierzchnia boczna stożka opisanego we wstępie do zadania. Miarę kąta BSA podaj w zaokrągleniu do jednego stopnia.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
  1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:
  6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu.

X. Stereometria. Zdający:
  5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia miary kąta BSA **oraz** podanie poprawnego wyniku $|\sphericalangle BSA| \approx 134°$.

2 pkt – poprawne wyprowadzenie i zapisanie związku $\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360°$ **oraz** zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa: $l^2 = r^2 + H^2$.

1 pkt – zapisanie równania $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi l = 2\pi r$

ALBO

– zapisanie równania $\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi l^2 = \pi r l$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

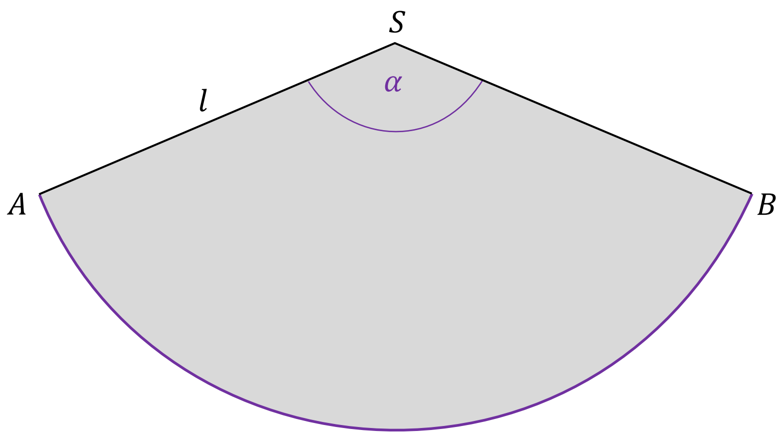
Przykładowe pełne rozwiązanie

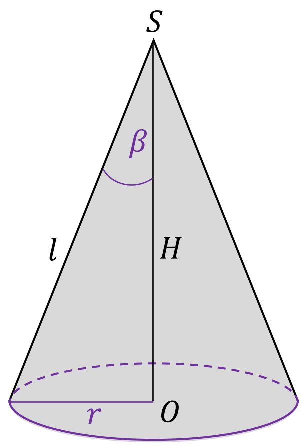
Wprowadzimy oznaczenia:

$r = \frac{d}{2}$ – promień okręgu w podstawie stożka

$\alpha = |\sphericalangle BSA|$ – miara kąta BSA wycinka koła

β – połowa miary kąta rozwarcia stożka





Wyprowadzimy wzór końcowy na symbolach danych (pominiemy obliczenia pośrednie).

1. Zauważmy, że pole ABS wycinka koła jest równe polu powierzchni bocznej stożka (polu powierzchni czapeczki). Zastosujemy wzór na pole ABS wycinka koła oraz wzór na pole powierzchni bocznej stożka:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi l^2 = \pi r l$$

$$\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$$

Uwaga

Zauważmy, że otrzymany wzór zadaje nadzwyczaj prostą relację między kątem wycinka koła i kątem rozwarcia stożka:

$$\alpha = \sin\beta \cdot 360^\circ$$

2. Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa i wyrazimy l poprzez H i d:

$$l^2 = H^2 + r^2$$

$$l^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$l = \sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

3. Zapiszemy wzór na miarę kąta α i ją obliczymy:

$$\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \frac{10}{\sqrt{25^2 + 10^2}} \cdot 360^\circ$$

$$\alpha \approx 134^\circ$$

Zadanie 60. (0–4)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$, a krawędź podstawy ma długość równą $6\sqrt{3}$.

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymaganie szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:
   5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej ostrosłupa **oraz** poprawne wyniki: $V = 108$ i $P_c = 108 + 72\sqrt{3}$.

3 pkt – obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 108$ **oraz** obliczenie wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $h_{śb} = 6$
ALBO
– obliczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa: $P_c = 108 + 72\sqrt{3}$ **oraz** obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 3$.

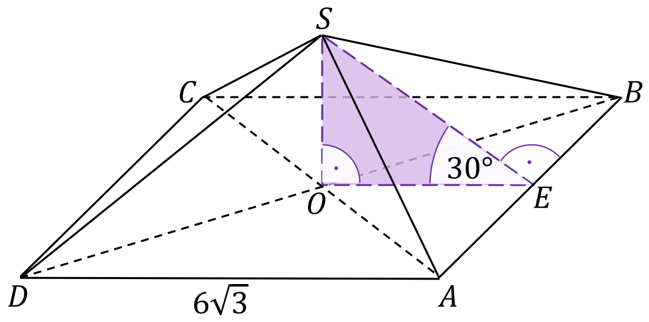
2 pkt – obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 3$ **oraz** obliczenie wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $h_{śb} = 6$
ALBO
– obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 108$,
ALBO
– obliczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa: $P_c = 108 + 72\sqrt{3}$.

1 pkt – obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 3$
ALBO
– obliczenie wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $h_{śb} = 6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:



Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, to $|OE| = 3\sqrt{3}$.

W trójkącie prostokątnym SOE mamy

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|SO|}{|OE|} = \frac{|SO|}{3\sqrt{3}}$$

Zatem

$$|SO| = 3\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3 = 108$$

Ponadto

$$\cos 30^\circ = \frac{|OE|}{|SE|} = \frac{3\sqrt{3}}{|SE|}$$

Stąd

$$|SE| \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}$$

$$|SE| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$|SE| = 6$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c ostrosłupa:

$$P_c = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 = 108 + 72\sqrt{3}$$

Zadanie 61. (0–1)

Pole powierzchni bocznej walca jest równe 16π, a promień jego podstawy ma długość 2.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego walca jest równa

A. 16 **B.** 32 **C.** 16π **D.** 32π

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymaganie szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:
   5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

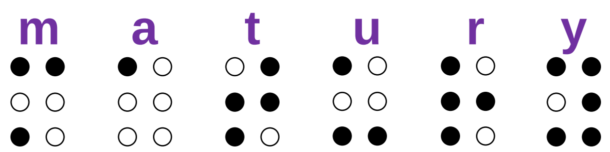
Rozwiązanie

C

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

Zadanie 62. (0–2)

Pojedynczy znak w piśmie Braille'a dla niewidomych jest kombinacją od 1 do 6 wypukłych punktów, które mogą zajmować miejsca ułożone w dwóch kolumnach po trzy miejsca w każdej kolumnie. Poniżej podano przykład napisu w piśmie Braille'a. Czarne kropki w znaku oznaczają wypukłości, a białe kropki oznaczają brak wypukłości. Pojedynczy znak w piśmie Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły.



Oblicz, ile różnych pojedynczych znaków można zapisać w piśmie Braille'a.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym […].

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:
   1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
   2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) […].

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody do obliczenia wszystkich znaków, uwzględnienie warunku zadania i podanie wyniku: 63.

1 pkt – zapisanie wzoru na liczbę wszystkich możliwych znaków bez uwzględnienia warunku zadania (tzn. łącznie ze znakiem bez punktu wypukłego): $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

ALBO

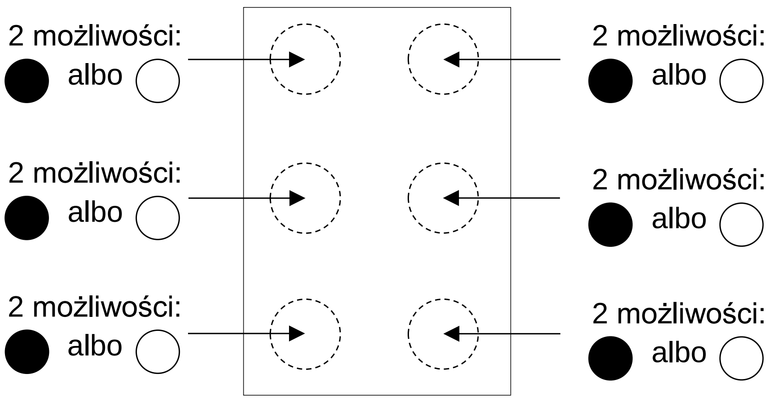
– zastosowanie metody dodawania polegającej na bezpośrednim zliczeniu i dodaniu liczby znaków: z jednym punktem wypukłym, z dwoma punktami wypukłymi, z trzema punktami wypukłymi, z czterema punktami wypukłymi, z pięcioma punktami wypukłymi i z sześcioma punktami wypukłymi **oraz** poprawne zliczenie znaków w co najmniej trzech spośród sześciu wymienionych grup.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasady mnożenia)

Zastosujemy regułę mnożenia. Zauważmy, że utworzenie znaku polega na podjęciu kolejno 6 decyzji o tym, jaki ma być rodzaj punktu – elementu znaku. Punkt może być wypukły albo może nie być wypukły. Zatem mamy dwie możliwości wyboru rodzaju punktu: ● albo ○ .



Zgodnie z regułą mnożenia, w takich przypadkach liczbę możliwości wyboru składnika/elementu obiektu mnożymy przez siebie tyle razy, z ilu elementów składa się obiekt:

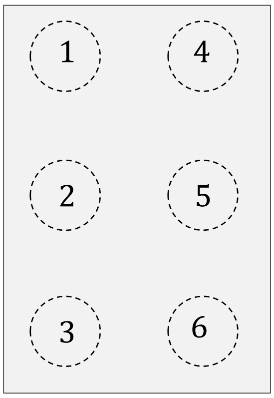
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

Wszystkich możliwości (łącznie z utworzeniem konfiguracji 6 braków wypukłości) jest 64. Ponieważ znak Braille’a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły, to wszystkich znaków jest:

$$64 - 1 = 63$$

Sposób 2. (bezpośrednie zliczenie liczby znaków z zastosowaniem zasady dodawania)

Będziemy kolejno zliczać znaki: z jednym punktem wypukłym, z dwoma punktami wypukłymi, z trzema punktami wypukłymi, z czterema punktami wypukłymi, z pięcioma punktami wypukłymi i z sześcioma punktami wypukłymi. Zbiory znaków z daną liczbą punktów wypukłych oznaczymy odpowiednio jako: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.



Aby zliczanie przeprowadzić metodycznie, ułatwimy sobie zadanie <u>numerując punkty</u> w polu znaku, jak na rysunku obok.
W takiej konwencji, przykładowo:

– znak ○○ / ●○ / ○○ oznaczymy jedną cyfrą: (2);

– znak ●● / ○○ / ●○ oznaczymy trójką cyfr: (1,3,4) – przy czym kolejność zapisu tych cyfr nie ma znaczenia.

$A_1 = \{(1), (2), (3), (4), (5), (6)\}$, zatem $|A_1| = 6$

$$A_2 = \left\{\begin{matrix} (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,5), (4,6), \\ (5,6) \end{matrix}\right\}, \text{ zatem } |A_2| = 15$$

$$A_3 = \left\{\begin{matrix} (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,2,6), \\ (1,3,4), (1,3,5), (1,3,6), \\ (1,4,5), (1,4,6), (1,5,6), \\ (2,3,4), (2,3,5), (2,3,6), \\ (2,4,5), (2,4,6), (2,5,6), \\ (3,4,5), (3,4,6), (3,5,6), \\ (4,5,6) \end{matrix}\right\}, \text{ zatem } |A_3| = 20$$

Zauważmy, że każdemu znakowi z dwoma punktami wypukłymi możemy przyporządkować znak z czterema punktami wypukłymi, zamieniając punkty wypukłe na niewypukłe i odwrotnie:

Np. znakowi ●○ / ○○ / ●○ przyporządkujemy znak ○● / ●● / ○●.

Zatem znaków z czterema punktami wypukłymi jest tyle samo, co znaków z dwoma punktami wypukłymi. Podobnie argumentujemy, że znaków z pięcioma punktami wypukłymi jest tyle samo co znaków z jednym punktem wypukłym. Stąd $|A_4| = |A_2| = 15$ oraz $|A_5| = |A_1| = 6$.

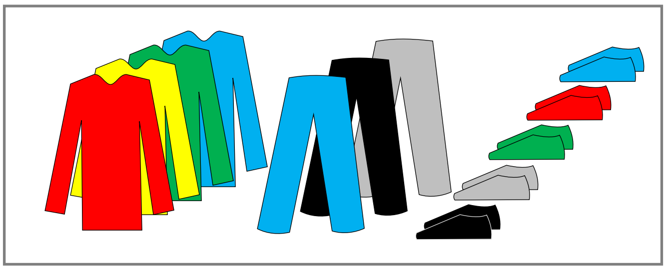
$A_6 = \{(1,2,3,4,5,6)\}$, zatem $|A_6| = 1$

Wszystkich znaków w piśmie Braille'a jest: $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$.

Zadanie 63.

Andrzej ma w szafie 4 koszule: czerwoną, żółtą, zieloną i niebieską; 3 pary spodni: niebieskie, czarne i szare; oraz 5 par butów: czarne, szare, zielone, czerwone i niebieskie.

Andrzej wybiera z szafy zestaw ubrania: jedną koszulę, jedną parę spodni i jedną parę butów. Zestawy ubrania wybierane przez Andrzeja określimy jako różne, gdy będą różniły się kolorem chociaż jednego rodzaju elementu ubioru w zestawie.



Zadanie 63.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów ubrania, jakie może wybrać Andrzej, jest równa

A. 12 **B.** 72 **C.** 60 **D.** 720

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:
   1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
   2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 63.2. (0–3)

Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw, w którym dokładnie jeden element ubioru będzie niebieski.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:
   1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
   2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) […].

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne zastosowanie reguły mnożenia oraz reguły dodawania do obliczenia liczby zestawów z jednym elementem niebieskim i podanie poprawnego wyniku: 26.

2 pkt – zastosowanie reguły mnożenia do obliczenia liczby zestawów, w których kolor niebieski ma albo koszula, albo spodnie, albo buty, i poprawne obliczenie liczby zestawów w każdym takim przypadku: $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 2 = 6$.

1 pkt – rozpisanie zestawów ubrań na trzy grupy: w których jeden element jest niebieski, a pozostałe elementy są innych kolorów

ALBO

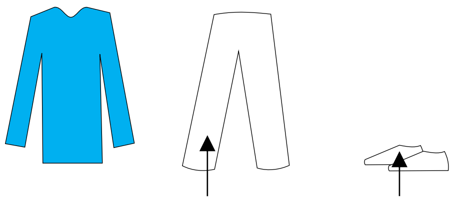
– zastosowanie reguły mnożenia do obliczenia liczby zestawów, w których kolor niebieski ma albo koszula, albo spodnie, albo buty, i poprawne obliczenie liczby zestawów w jednym takim przypadku: $2 \cdot 4 = 8$ albo $3 \cdot 4 = 12$ albo $3 \cdot 2 = 6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpiszemy schematy zestawów ubrań, w których jeden element jest niebieski.

1. Gdy w zestawie jest niebieska koszula, to spodnie mogą być wybrane na 2 sposoby (bez niebieskich), a buty na 4 sposoby (bez niebieskich).

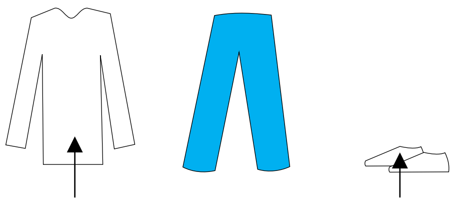


czarne albo szare (2 możliwości)

czarne albo szare, albo zielone, albo czerwone (4 możliwości)

Zestawów z niebieską koszulą jest $2 \cdot 4 = 8$.

2. Gdy w zestawie są niebieskie spodnie, to koszule mogą być wybrane na 3 sposoby (bez niebieskiej), a buty na 4 sposoby (bez niebieskich).

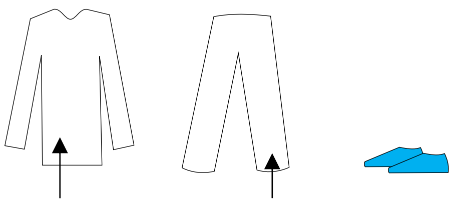


czerwona albo żółta, albo zielona (3 możliwości)

czarne albo szare, albo zielone, albo czerwone (4 możliwości)

Zestawów z niebieskimi spodniami jest $3 \cdot 4 = 12$.

3. Gdy w zestawie są niebieskie buty, to koszule mogą być wybrane na 3 sposoby (bez niebieskiej), a spodnie na 2 sposoby (bez niebieskich).



czerwona albo żółta, albo zielona (3 możliwości)

czarne albo szare (2 możliwości)

Zestawów z niebieskimi butami jest $3 \cdot 2 = 6$.

4. Zestaw z jednym elementem niebieskim może być: zestawem z niebieską koszulą <u>lub</u> zestawem z niebieskimi spodniami, <u>lub</u> zestawem z niebieskimi butami.

Zatem takich zestawów można wybrać $8 + 12 + 6 = 26$.

Zadanie 64. (0–4)

Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:
   2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) […].

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
   1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P(A) = \frac{1}{25}$.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile jest wszystkich całkowitych liczb czterocyfrowych dodatnich **oraz** ile pośród nich jest liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3 **oraz** podanie poprawnych wyników: $|\Omega| = 9\,000$, $|A| = 360$.

2 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile jest czterocyfrowych, dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3, **oraz** podanie poprawnego wyniku: $|A| = 360$
ALBO
– zapisanie $|\Omega| = 9\,000$ **oraz** rozpisanie zbioru zdarzeń sprzyjających z poprawnie określonymi wszystkimi możliwymi pozycjami cyfr 2 i 3,
ALBO

– zapisanie $|\Omega| = 9\,000$ **oraz** poprawna metoda zliczenia czterocyfrowych liczb parzystych z ostatnią (i dokładnie jedną) cyfrą 2 oraz dokładnie jedną cyfrą 3 w zapisie, łącznie z podaniem wyniku: 176,
ALBO
– zapisanie $|\Omega| = 9\,000$ **oraz** poprawna metoda zliczenia czterocyfrowych liczb parzystych z ostatnią cyfrą parzystą różną od 2 oraz dokładnie jedną cyfrą 3 i dokładnie jedną cyfrą 2 w zapisie, łącznie z podaniem wyniku: 184.

1 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile jest wszystkich całkowitych liczb czterocyfrowych dodatnich, i zapisanie wyniku: $|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$
ALBO
– rozpisanie zbioru zdarzeń sprzyjających z poprawnie określonymi wszystkimi możliwymi pozycjami cyfr 2 i 3,
ALBO
– poprawna metoda zliczenia czterocyfrowych liczb parzystych z ostatnią (i dokładnie jedną) cyfrą 2 oraz dokładnie jedną cyfrą 3 w zapisie, łącznie z podaniem wyniku: 176,
ALBO
– poprawna metoda zliczenia czterocyfrowych liczb parzystych z ostatnią cyfrą parzystą różną od 2 oraz dokładnie jedną cyfrą 3 i dokładnie jedną cyfrą 2 w zapisie, łącznie z podaniem wyniku: 184.

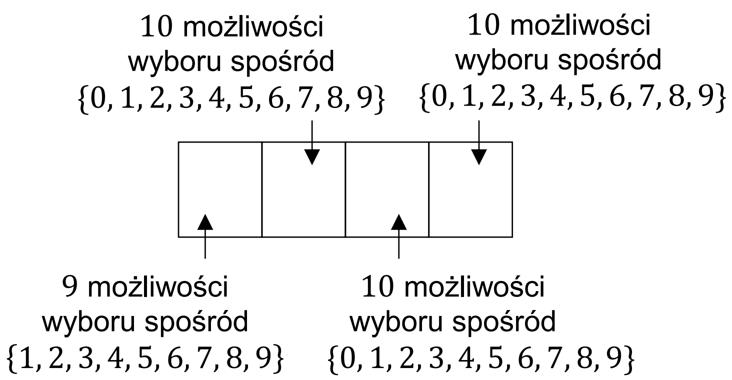
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Zbiór zdarzeń elementarnych Ω składa się ze wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich.

Sposób 1. obliczenia mocy zbioru Ω.

Na diagramie poniżej rozpiszemy schemat liczby czterocyfrowej, gdzie dla każdej pozycji w zapisie dziesiętnym określimy, ile jest możliwości jej uzupełnienia.

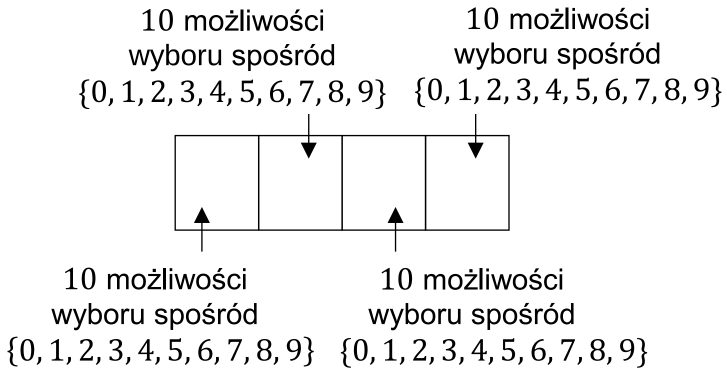


Zgodnie z zasadą mnożenia, wszystkich liczb czterocyfrowych dodatnich jest:

$$|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$$

Sposób 2. obliczenia mocy zbioru Ω.

Obliczymy liczbę wszystkich ciągów czterech cyfr (także z zerem na pierwszej pozycji).



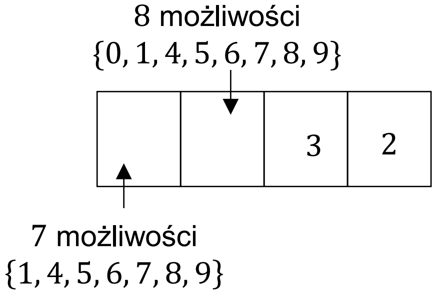
Wszystkich ciągów czterech cyfr (także z zerem na pierwszej pozycji) jest $10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10\,000$. Od tej liczby należy odjąć liczbę takich ciągów czterech cyfr, w których na pierwszej pozycji występuje zero – jest ich $10\cdot 10\cdot 10 = 1\,000$.
Zatem wszystkich liczb czterocyfrowych dodatnich jest:

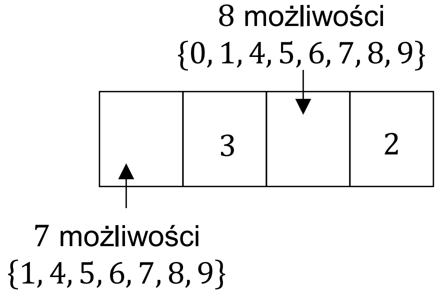
$$|\Omega| = 10\,000 - 1\,000 = 9\,000$$

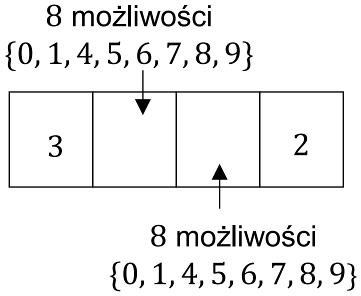
(ciąg dalszy rozwiązania)

Określimy zdarzenie A jako zbiór takich czterocyfrowych dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3. Na poniższych diagramach z pozycjami cyfr rozpiszemy schematy liczb czterocyfrowych, spełniających te warunki.

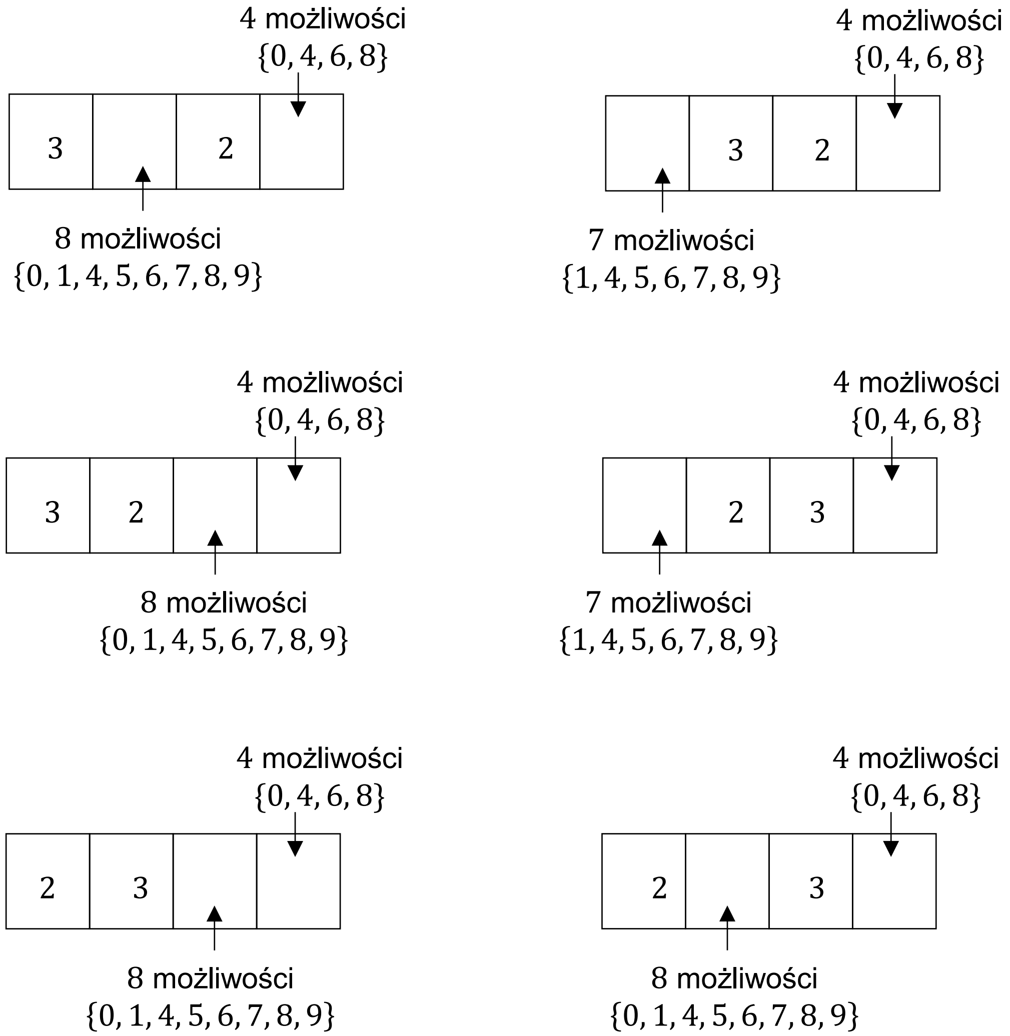
- Liczby parzyste, które mają cyfrę 2 na pozycji czwartej oraz cyfrę 3 na pozycjach trzeciej, drugiej lub pierwszej:







- Liczby parzyste, które na ostatniej pozycji mają cyfrę parzystą różną od cyfry 2 oraz cyfry 2 i 3 (dokładnie po jednej) na różnych pozycjach od pierwszej do trzeciej:



Liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających A obliczymy z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania łącznie:

$$|A| = 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 360$$

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{360}{9000} = \frac{1}{25}$$

Zadanie 65.

Na wykresie słupkowym poniżej podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie $\mathcal{F}$. Na osi poziomej podano – wyrażone w tysiącach złotych – miesięczne wynagrodzenie netto pracowników firmy $\mathcal{F}$, a na osi pionowej przedstawiono liczbę osób, która osiąga podane zarobki.

Zadanie 65.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dominantą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest

A.	10 tys. zł,	ponieważ	**1.**	tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie $\mathcal{F}$.
B.	4,5 tys. zł,		**2.**	ta wartość zarobków jest największa w firmie $\mathcal{F}$.
C.	4 tys. zł,		**3.**	iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie $\mathcal{F}$.

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:

2) […] znajduje […] dominantę.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C1

Zadanie 65.2. (0–1)
Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Medianą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest .... tys. zł.

Wymaganie ogólne
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe
XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
2) […] znajduje medianę […].

Zasady oceniania
1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie
Medianą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest ...4,5... tys. zł.

Komentarz
Medianą zarobków jest wartość znajdująca się pośrodku w uporządkowanym rosnąco zestawie zarobków wszystkich 75 pracowników firmy $\mathcal{F}$. Zatem będzie to wartość 4,5 tys. zł, znajdująca się na 38 pozycji w tak uporządkowanym zestawie danych.

Zadanie 65.3. (0–2)

Oblicz średnią miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$. Wynik podaj bez zaokrąglania.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

I. Sprawność rachunkowa.
   Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
   2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia średniej miesięcznych zarobków **oraz** podanie poprawnego wyniku: $\overline{x} = 4{,}48$ tys. zł.

1 pkt – obliczenie sumy zarobków wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$: 336 tys. zł.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Na podstawie danych z wykresu obliczymy średnią miesięcznych zarobków pracowników firmy $\mathcal{F}$:

$$\overline{x} = \frac{(1\cdot 1{,}5 + 1\cdot 2 + 4\cdot 2{,}5 + 7\cdot 3 + 10\cdot 3{,}5 + 14\cdot 4 + 13\cdot 4{,}5 + 9\cdot 5 + 6\cdot 5{,}5)\text{ tys. zł}}{(1+1+4+7+10+14+13+9+6+3+2+1+1+1+2)} +$$

$$+\frac{(3\cdot 6 + 2\cdot 6{,}5 + 1\cdot 7 + 1\cdot 7{,}5 + 1\cdot 8{,}5 + 2\cdot 10)\text{ tys. zł}}{(1+1+4+7+10+14+13+9+6+3+2+1+1+1+2)} = \frac{336\text{ tys. zł}}{75}$$

$\overline{x} = 4{,}48$ tys. zł

Zadanie 65.4. (0–2)

Oblicz, jaki procent liczby wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$ stanowi liczba osób zarabiających $5,5$ tys. zł lub mniej. Wynik podaj w zaokrąglaniu do 1%.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

I. Sprawność rachunkowa.
   Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia jaki % wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$ stanowią osoby zarabiające $5{,}5$ tys. zł lub mniej **oraz** podanie wyniku 87%.

1 pkt – obliczenie liczby wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$ zarabiających $5{,}5$ tys. zł lub mniej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczymy, ile jest łącznie takich osób w firmie $\mathcal{F}$, które zarabiają miesięcznie 5,5 tys. zł lub mniej:

$$1 + 1 + 4 + 7 + 10 + 14 + 13 + 9 + 6 = 65$$

Określimy, jaki procent wszystkich osób w firmie stanowią łącznie osoby zarabiające miesięcznie $5{,}5$ tys. zł lub mniej:

$$\frac{65}{75} = 0{,}8(6) \approx 87\%$$

Osoby zarabiające $5{,}5$ tys. zł lub mniej stanowią 87% wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$.

Zadanie 66. (0–2)

Ze zbioru sześciu liczb $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że pierwsza wylosowana liczba będzie większa od drugiej wylosowanej liczby.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{15}{36}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 6 \cdot 6$ lub sporządzenie tabeli o 36 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, z których co najmniej jedno pole jest wypełnione, lub sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego

ALBO

– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego,

ALBO

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 15$, jeśli nie została otrzymana w wyniku zastosowania błędnej metody,

ALBO

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, który zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y), gdzie $x, y \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.
W tabeli literą A zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

II losowanie

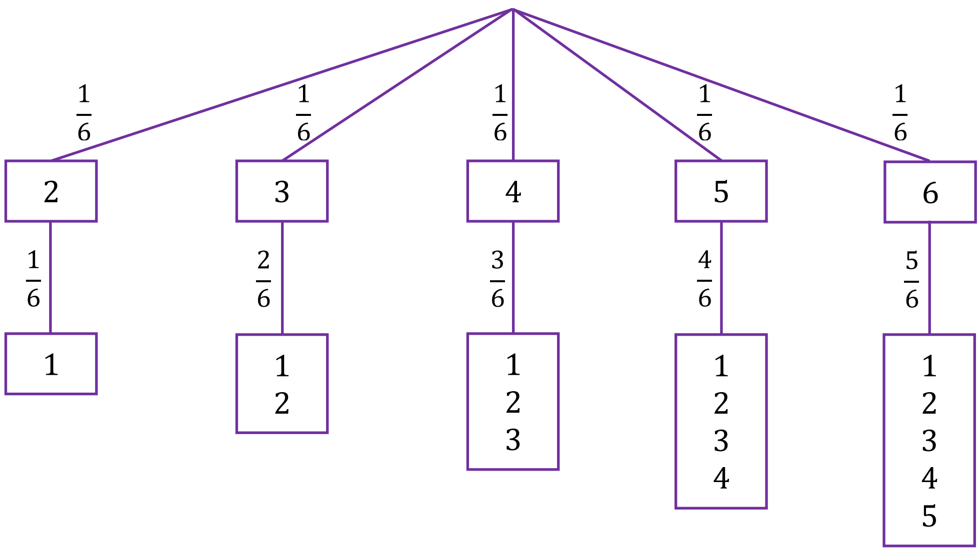
I losowanie

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2	A					
3	A	A				
4	A	A	A			
5	A	A	A	A		
6	A	A	A	A	A	

Moc zbioru Ω jest równa 36. Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 15.
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Sposób II (drzewo stochastyczne)

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

3. Informacja o egzaminie maturalnym z matematyki dla absolwentów niesłyszących

Informacje o egzaminie maturalnym z matematyki przedstawione w rozdziale *1. Opis egzaminu maturalnego z matematyki* dotyczą również egzaminu dla absolwentów niesłyszących. Ponadto zdający niesłyszący przystępują do egzaminu maturalnego w warunkach i formie dostosowanych do potrzeb wynikających z ich niepełnosprawności.

Dostosowanie warunków przeprowadzenia egzaminu maturalnego dla absolwentów niesłyszących obejmuje m.in. czas trwania egzaminu. Dostosowanie formy egzaminu maturalnego z matematyki dla absolwentów niesłyszących polega na przygotowaniu odpowiednich arkuszy, w których uwzględnia się zmianę sposobu formułowania treści niektórych zadań i poleceń. Zmiany te dotyczą zamiany pojedynczych słów, zwrotów lub całych zdań – jeśli mogłyby one być niezrozumiałe lub błędnie zrozumiane przez osoby niesłyszące. Zadania mogą być dodatkowo uzupełnione szkicem, tabelą lub inną formą graficzną ilustrującą ich treść. Jednak takie zmiany nie mogą wpływać na merytoryczną treść zadania oraz nie mogą dotyczyć terminów typowych dla danej dziedziny wiedzy.

Szczegółowe informacje z tym związane określone są w *Komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sprawie szczegółowych sposobów dostosowania warunków i form przeprowadzania egzaminu maturalnego* w danym roku szkolnym.

W dalszej części tego rozdziału zostały przedstawione przykładowe zadania z matematyki na poziomie podstawowym, które ilustrują sposób dostosowania niektórych zadań wybranych z rozdziału *2. Przykładowe zadania z rozwiązaniami.* Zachowano tę samą numerację zadań.

Zadanie 9. (0–1)

Klient banku wpłacił na długoterminową lokatę pewną kwotę. Oprocentowanie na tej lokacie wynosi 3% w skali roku (po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnej kwoty znajdującej się na lokacie – zgodnie z procentem składanym.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po 10 latach oczekiwania (bez wypłacania pieniędzy z tej lokaty) klient będzie miał na lokacie kwotę większą od kwoty wpłaconej na początku o (w zaokrągleniu do 1%)

A. 30% **B.** 34% **C.** 36% **D.** 43%

Zasady oceniania

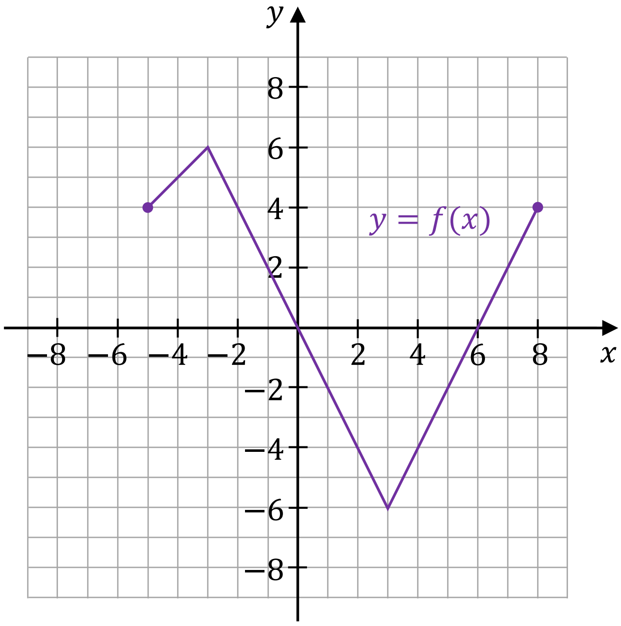
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 27.

Dana jest funkcja $y = f(x)$. Wykres tej funkcji przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y).



Zadanie 27.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym zbiór wszystkich argumentów, dla których prawdziwa jest nierówność:

$$\boldsymbol{f(x) > 2}$$

....

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$[-5, -1) \cup (7,8]$

Zadanie 27.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest malejąca w przedziale

A. $[-5, -3]$ **B.** $[3, 8]$ **C.** $[0, 6]$ **D.** $[-3, 3]$

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 27.3. (0–2)

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach.

1. Największa wartość funkcji f jest równa ……… .
2. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[6, 8]$ jest równa ……… .

Zasady oceniania

2 pkt – poprawnie uzupełnione dwie luki.
1 pkt – poprawnie uzupełniona jedna luka.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Pełne rozwiązanie

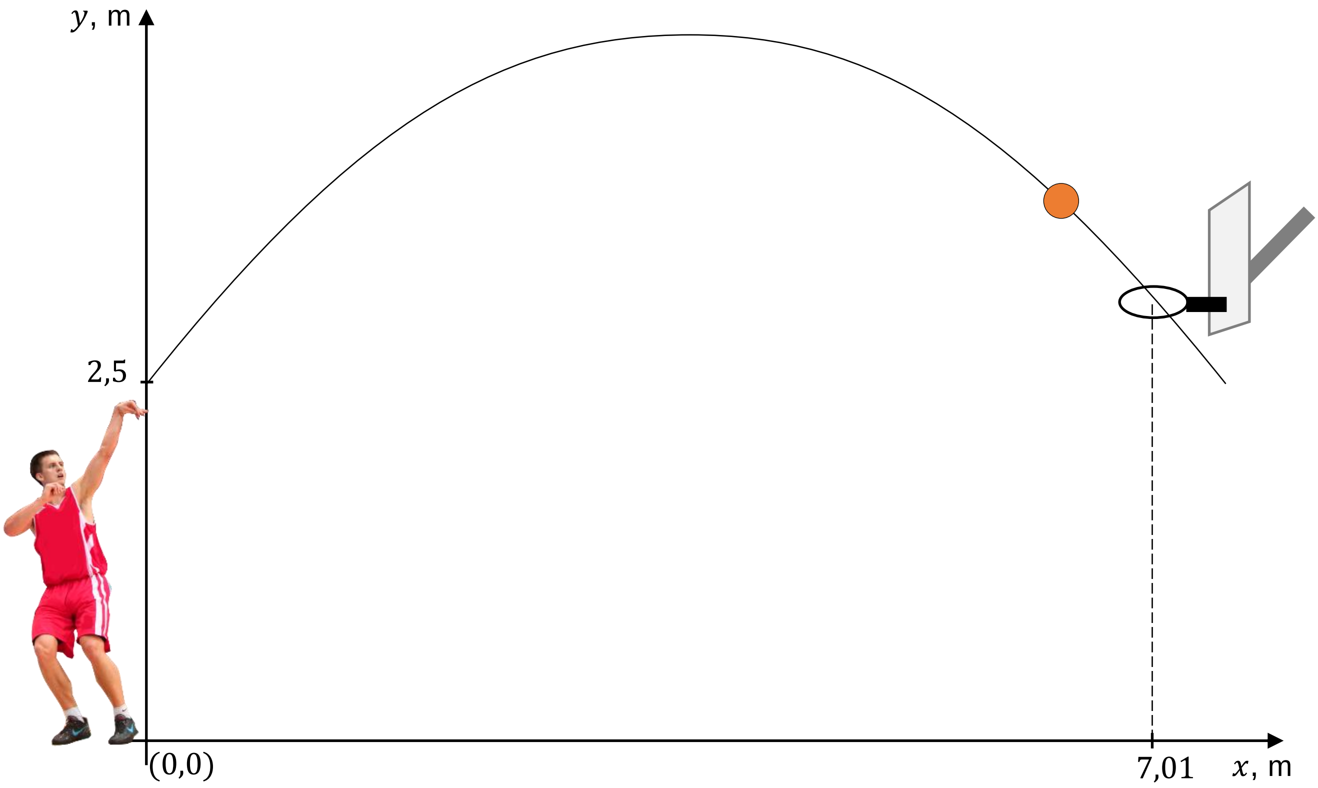
1. Największa wartość funkcji f jest równa …6…. .
2. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[6, 8]$ jest równa …0…. .

Zadanie 32.

Z fizyki wiemy, że torem ruchu rzuconej piłki – przy pominięciu oporów powietrza – jest fragment paraboli. Koszykarz rzucił piłkę do kosza z odległości $x_k = 7{,}01$ m (to odległość od środka piłki do środka obręczy kosza w linii poziomej). Tor ruchu opiszemy w układzie współrzędnych. W chwili początkowej <u>środek piłki</u> był w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2{,}50$ m. Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem:

$$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$

Rzut był celny, a środek piłki przeszedł <u>dokładnie przez środek obręczy</u> kosza.
Na rysunku poniżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.



Zadanie 32.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obręcz kosza jest na wysokości (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do $0{,}01$ m)

A. $3{,}04$ m **B.** $3{,}06$ m **C.** $3{,}8$ m **D.** $4{,}93$ m

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 32.2. (0–2)
Oblicz wysokość maksymalną, na jakiej będzie środek piłki podczas opisanego rzutu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zasady oceniania
2 pkt – poprawna metoda rozwiązania **oraz** zapisanie wyniku $4{,}93$ m.
1 pkt – zastosowanie wzoru na wierzchołek paraboli **oraz** prawidłowe podstawienie wszystkich danych liczbowych do tego wzoru
ALBO
– zapisanie wzoru funkcji w postaci $y = -0{,}174(x-p)^2 + q$ **oraz** zidentyfikowanie q jako współrzędnej wierzchołka paraboli lub wysokości maksymalnej rzutu.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób 1.

Wysokość maksymalna, na jakiej będzie środek piłki, jest równa współrzędnej y wierzchołka paraboli. Skorzystamy ze wzoru na wierzchołek paraboli (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

$$h_{max} = y_w = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1{,}3^2 + 4 \cdot 0{,}174 \cdot 2{,}5}{4 \cdot (-0{,}174)} \approx 4{,}93 \text{ m}$$

Sposób 2.

Wysokość maksymalna, na jakiej będzie środek piłki, jest równa współrzędnej y wierzchołka paraboli. Wartość tę możemy wyznaczyć przekształcając wzór funkcji kwadratowej $y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$ do postaci kanonicznej:

$$y = -0{,}174(x-p)^2 + q$$

gdzie:

$$h_{max} = y_w = q$$

$$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5 = -0{,}174\left(x^2 - \frac{1{,}3}{0{,}174}x\right) + 2{,}5 =$$

$$= -0{,}174 \cdot \left[\left(x - \frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 - \left(\frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2\right] + 2{,}5 =$$

$$= -0{,}174 \cdot \left(x - \frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 + 0{,}174 \cdot \left(\frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 + 2{,}5$$

Zatem:

$$h_{max} = y_w = q = 0{,}174 \cdot \left(\frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 + 2{,}5 \approx 4{,}93 \text{ m}$$

Zadanie 32.3. (0–3)

W opisanym rzucie piłka przeleciała przez obręcz kosza i upadła na podłogę. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej przeszkody. Promień piłki wynosi $0{,}12$ m.

Oblicz współrzędną x <u>środka piłki</u> w momencie, w którym piłka dotknęła podłogi. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia współrzędnej x **oraz** zapisanie wyniku $8{,}99$ m.

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38 = 0$.

1 pkt – zapisanie równania $0{,}12 = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że w momencie gdy piłka upadła i dotknęła podłogi, to środek piłki należy do paraboli oraz jest na wysokości $0{,}12$ m ponad podłogą. Zatem współrzędne środka piłki (x, y) spełniają równanie paraboli, a współrzędna $y = 0{,}12$ m.

$$0{,}12 = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$

$$0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.
Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38$ (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

$$\Delta = (-1{,}3)^2 - 4 \cdot 0{,}174 \cdot (-2{,}38) = 3{,}34648$$

Rozwiązaniami powyższego równania kwadratowego są liczby:

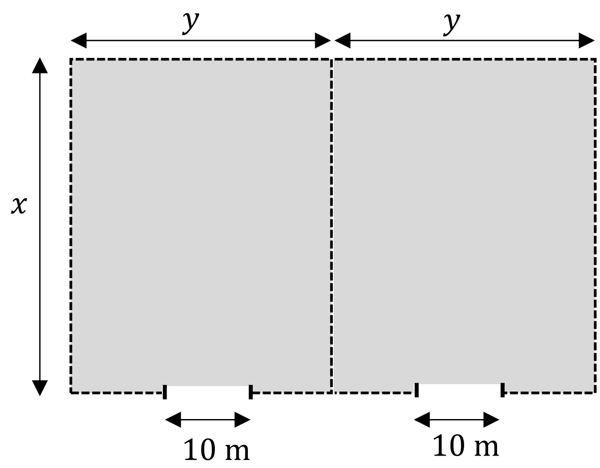
$$x_1 = \frac{1{,}3 - \sqrt{3{,}34648}}{0{,}348} \qquad x_1 = \frac{1{,}3 + \sqrt{3{,}34648}}{0{,}348}$$

$$x_1 \approx -1{,}52 \qquad x_2 \approx 8{,}99$$

Współrzędna x środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła podłogi, jest równa w przybliżeniu $8{,}99$ m.

Zadanie 38. (0–4)

Powierzchnia magazynowa będzie na dwóch takich samych prostokątnych działkach. Działki te będą miały jeden wspólny bok. Całość będzie ogrodzona płotem. Dodatkowo działki rozdzieli wspólny płot. W ogrodzeniu będą dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego dwie działki to 580 metrów. Szerokości dwóch bram wjazdowych nie wlicza się w długość płotu.



Oblicz wymiary x oraz y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia obu wymiarów działki **oraz** podanie poprawnych wyników: $x = 100$ m oraz $y = 75$ m.

3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole działki w zależności od jednej zmiennej **oraz** poprawne obliczenie współrzędnej x wierzchołka paraboli: $x = 100$ m.

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej w zależności od jednej zmiennej:

$P(x) = 2x(150 - \frac{3}{4}x)$ dla $x \in \left(0, \frac{560}{3}\right)$.

1 pkt – zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej: $P = x \cdot 2y$

ALBO

– zapisanie związku między wymiarami działki: $3x + 4y - 20 = 580$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu. Całkowitą długość płotu – po uwzględnieniu warunków zadania – można zapisać równaniem:

$$3x + 4y - 2 \cdot 10 = 580$$

Powyższe równanie określa związek między wymiarami x i y. Wymiar y jednej działki musi być większy od 10 m, ze względu na ustaloną szerokość bramy wjazdowej. W związku z tym, w modelu matematycznym uwzględniającym warunki zadania, wymiary x i y spełniają:

$$x > 0 \quad \text{i} \quad y > 10$$

Pole P całkowitej powierzchni magazynowej jest równe polu prostokąta o bokach długości x oraz $2y$. Zatem:

$$P = x \cdot 2y$$

Pole powierzchni magazynowej wyrazimy jako funkcję jednej zmiennej x. W tym celu najpierw wyznaczymy y:

$$3x + 4y - 2 \cdot 10 = 580$$

$$4y = 600 - 3x$$

$$y = 150 - \frac{3}{4}x$$

Następnie podstawimy wyznaczone y do wzoru na pole $P = x \cdot 2y$:

$$P(x) = 2x\left(150 - \frac{3}{4}x\right)$$

Wyznaczymy dziedzinę funkcji P. Wykorzystamy związek między wymiarami x i y oraz wykorzystamy warunki, jakie te wymiary spełniają:

$$y = 150 - \frac{3}{4}x \quad \text{oraz} \quad y > 10 \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

Zatem:

$$150 - \frac{3}{4}x > 10 \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

$$x < \frac{560}{3} \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

Zmienna x może przyjmować wartości:

$$x \in \left(0, \frac{560}{3}\right)$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli $\mathcal{P}$ skierowanej ramionami do dołu. Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$. Współrzędną x wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$ obliczymy z miejsc zerowych funkcji kwadratowej, która jest równaniem tej paraboli. Rozwiążemy zatem równanie:

$$2x\left(150 - \frac{3}{4}x\right) = 0$$

Z powyższego równania wynika, że:

$$2x = 0 \qquad \text{lub} \qquad 150 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad \text{lub} \qquad x_2 = 200$$

Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$, czyli dla:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 100\ \text{m}$$

Obliczymy drugi wymiar działki, dla którego pole powierzchni magazynowej jest największe:

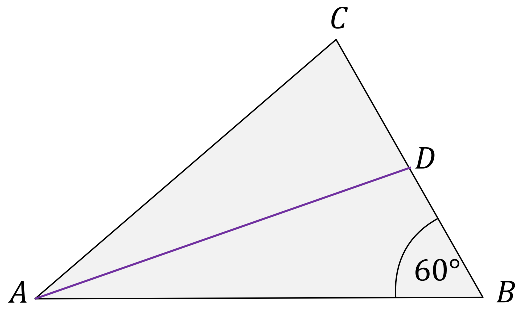
$$y = 150\ \text{m} - \frac{3}{4} \cdot 100\ \text{m} = 75\ \text{m}$$

Całkowite pole powierzchni magazynowej jest największe dla działki o wymiarach:

$$x = 100\ \text{m} \quad \text{oraz} \quad y = 75\ \text{m}.$$

Zadanie 40. (0–2)

W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków $|AB| = 12$, $|BC| = 8$ oraz miara kąta $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Punkt D jest środkiem boku BC. Zobacz rysunek poniżej.



Oblicz długość środkowej tego trójkąta, poprowadzonej z wierzchołka A.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

2 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD **oraz** poprawne obliczenie długości środkowej: $|AD| = 4\sqrt{7}$.

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD, np.:

$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|$

$|AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos 60°$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 2.

2 pkt – poprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AGD **oraz** poprawne obliczenie długości środkowej $|AD| = 4\sqrt{7}$.

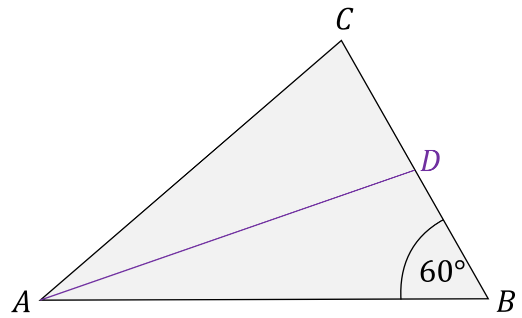
1 pkt – wyodrębnienie trójkąta prostokątnego AGD **oraz** trójkąta GBD o kątach: $30°$, $60°$, $90°$, łącznie z poprawnym określeniem długości jego boków: $|GB| = 2$, $|DG| = 2\sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie twierdzenia cosinusów)

Ponieważ AD jest środkową, to $|BD| = 4$.



Do obliczenia długości środkowej AD zastosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABD:

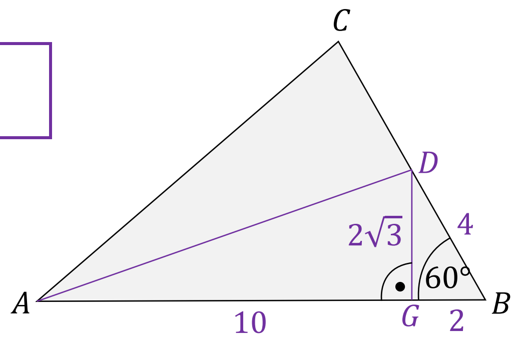
$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos|\measuredangle ABC|$$

$$|AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 112$$

$$|AD| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Sposób 2. (zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i własności trójkąta o kątach $30°$, $60°$, $90°$)

Uzupełnimy rysunek pomocniczy (zobacz obok).



W celu obliczenia długości środkowej AD zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AGD.

Ponieważ AD jest środkową, to $|BD| = 4$.

Rozważmy dalej trójkąt GBD .

Trójkąt GBD ma kąty o miarach: $30°$, $60°$, $90°$, skąd wynika, że przyprostokątne tego trójkąta mają długości:

$$|GB| = 2$$

$$|DG| = 2\sqrt{3}$$

zatem długość przyprostokątnej AG trójkąta AGD jest równa:

$$|AG| = 12 - 2 = 10$$

Obliczymy długość środkowej AD z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AGD:

$$|AD|^2 = |AG|^2 + |GD|^2$$

$$|AD|^2 = 10^2 + (2\sqrt{3})^2 = 112$$

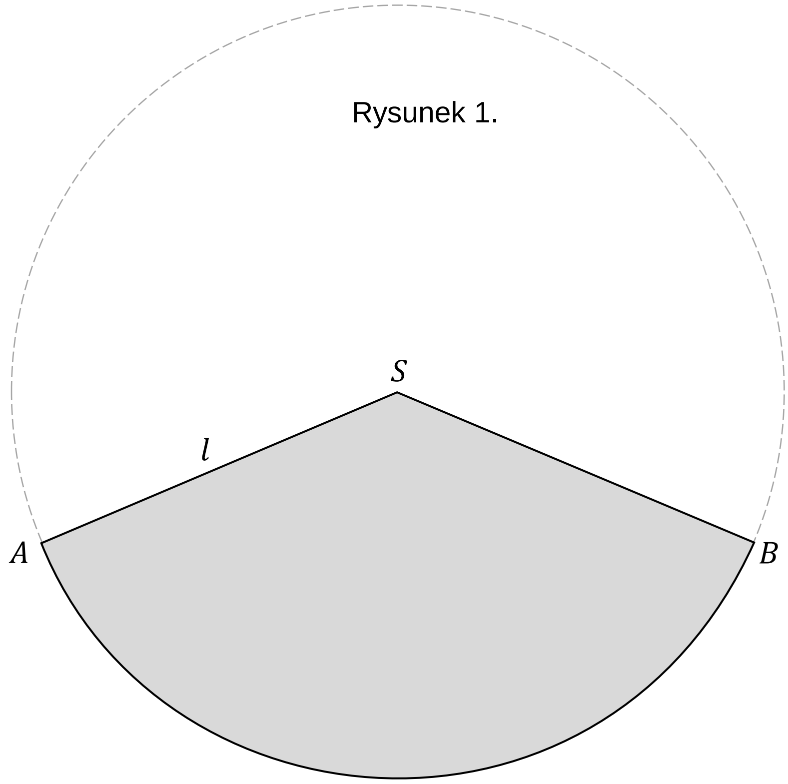
$$|AD| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Zadanie 59.

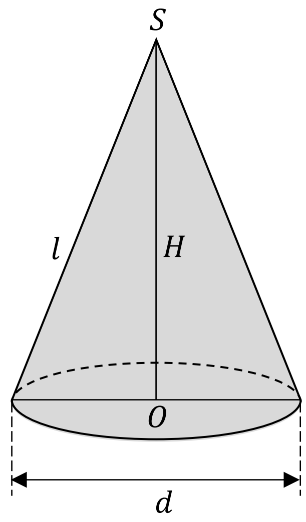
Hania zrobiła czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka ma kształt <u>powierzchni bocznej stożka</u> o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l.

Żeby wykonać czapeczkę, Hania najpierw narysowała na papierze figurę płaską ABS o kształcie <u>wycinka koła</u> o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z papieru, wygięła ją i połączyła odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.). W ten sposób otrzymała kształt stożka.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Zadanie 59.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapeczka (rysunek 2.), ma miarę (w zaokrągleniu do 1°)

A. $44°$ **B.** $136°$ **C.** $134°$ **D.** $68°$

Wskazówka: skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 59.2. (0–3)
Oblicz miarę kąta BSA wycinka koła (rysunek 1.), z którego powstała czapeczka. Miarę kąta BSA podaj w zaokrągleniu do jednego stopnia.

Zasady oceniania
3 pkt – poprawna metoda obliczenia miary kąta BSA **oraz** podanie poprawnego wyniku $|\sphericalangle BSA| \approx 134°$.

2 pkt – poprawne wyprowadzenie i zapisanie związku $\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360°$ **oraz** zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa: $l^2 = r^2 + H^2$.

1 pkt – zapisanie równania $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi l = 2\pi r$

ALBO

– zapisanie równania $\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi l^2 = \pi r l$.

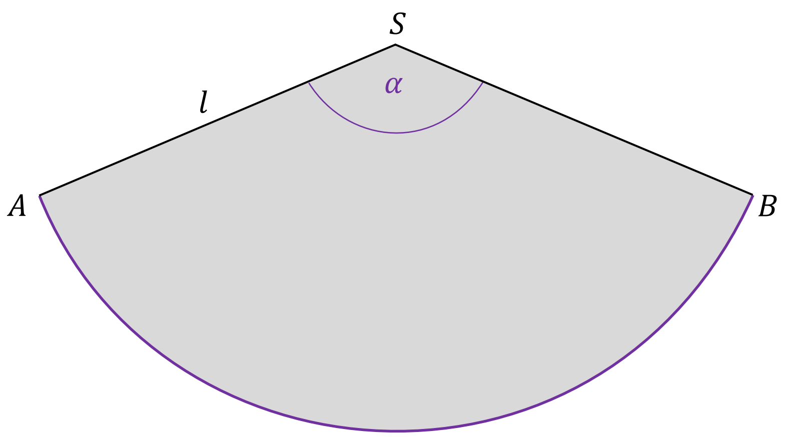
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

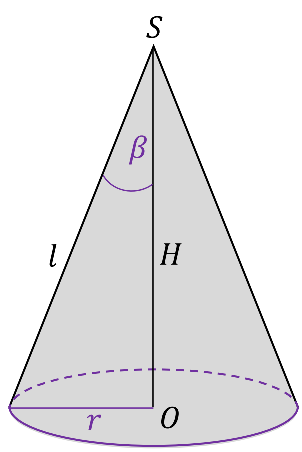
Przykładowe pełne rozwiązanie
Wprowadzimy oznaczenia:

$r = \frac{d}{2}$ – promień okręgu w podstawie stożka

$\alpha = |\sphericalangle BSA|$ – miara kąta BSA wycinka koła

β – połowa miary kąta rozwarcia stożka





Wyprowadzimy wzór końcowy na symbolach danych (pominiemy obliczenia pośrednie).

1. Zauważmy, że pole ABS wycinka koła jest równe polu powierzchni bocznej stożka (polu powierzchni czapeczki). Zastosujemy wzór na pole ABS wycinka koła oraz wzór na pole powierzchni bocznej stożka:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi l^2 = \pi r l$$

$$\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$$

Uwaga

Zauważmy, że otrzymany wzór zadaje nadzwyczaj prostą relację między kątem wycinka koła i kątem rozwarcia stożka:

$$\alpha = \sin\beta \cdot 360^\circ$$

2. Wyrazimy l poprzez H i d na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$l^2 = H^2 + r^2$$

$$l^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$l = \sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

3. Zapiszemy wzór na miarę kąta α i ją obliczymy:

$$\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \frac{10}{\sqrt{25^2 + 10^2}} \cdot 360^\circ$$

$$\alpha \approx 134^\circ$$

Zadanie 62. (0–2)

Pojedynczy znak (np. litera, przecinek, wykrzyknik, itp.) w piśmie Braille'a dla niewidomych jest kombinacją od 1 do 6 wypukłych punktów. Punkty te mogą zajmować miejsca ułożone w dwóch kolumnach po trzy miejsca w każdej kolumnie. Poniżej podano przykład napisu w piśmie Braille'a. Czarne kropki w znaku oznaczają wypukłości, a białe kropki oznaczają brak wypukłości. Pojedynczy znak w piśmie Braille'a <u>musi zawierać</u> co najmniej jeden punkt wypukły.

m	a	t	u	r	y
● ●	● ○	○ ●	● ○	● ○	● ●
○ ○	○ ○	● ●	○ ○	● ●	○ ●
● ○	○ ○	● ○	● ●	● ○	● ●

Oblicz, ile różnych pojedynczych znaków można zapisać w piśmie Braille'a.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody do obliczenia wszystkich znaków, uwzględnienie warunku zadania i podanie wyniku: 63.

1 pkt – zapisanie wzoru na liczbę wszystkich możliwych znaków bez uwzględnienia warunku zadania (tzn. łącznie ze znakiem bez punktu wypukłego): $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

ALBO

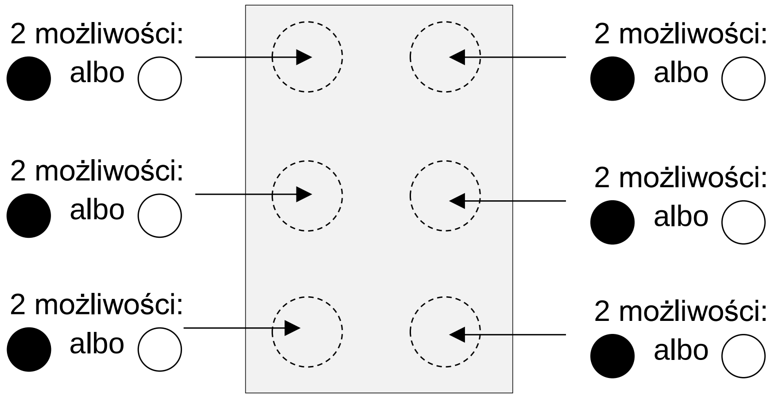
– zastosowanie metody dodawania polegającej na bezpośrednim zliczeniu i dodaniu liczby znaków: z jednym punktem wypukłym, z dwoma punktami wypukłymi, z trzema punktami wypukłymi, z czterema punktami wypukłymi, z pięcioma punktami wypukłymi i z sześcioma punktami wypukłymi <u>oraz</u> poprawne zliczenie znaków w co najmniej <u>trzech</u> spośród sześciu wymienionych grup.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasady mnożenia)

Zastosujemy regułę mnożenia. Zauważmy, że utworzenie znaku polega na podjęciu kolejno 6 decyzji o tym, jaki ma być rodzaj punktu – elementu znaku. Punkt może być wypukły albo może nie być wypukły. Zatem mamy <u>dwie możliwości</u> wyboru rodzaju punktu: albo .



Zgodnie z regułą mnożenia, w takich przypadkach liczbę możliwości wyboru składnika/elementu obiektu mnożymy przez siebie tyle razy, z ilu elementów składa się obiekt:

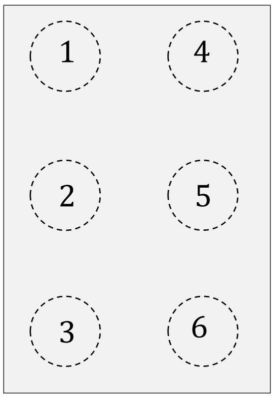
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

Wszystkich możliwości jest 64. Ponieważ znak Braille’a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły, to odrzucamy znak bez wypukłości (sześć białych kropek na schemacie powyżej). Wszystkich znaków jest zatem:

$$64 - 1 = 63$$

Sposób 2. (bezpośrednie zliczenie liczby znaków z zastosowaniem zasady dodawania)

Będziemy kolejno zliczać znaki: z jednym punktem wypukłym, z dwoma punktami wypukłymi, z trzema punktami wypukłymi, z czterema punktami wypukłymi, z pięcioma punktami wypukłymi i z sześcioma punktami wypukłymi. Zbiory znaków z daną liczbą punktów wypukłych oznaczymy odpowiednio jako: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.



Aby zliczanie przeprowadzić metodycznie, ułatwimy sobie zadanie <u>numerując punkty</u> w polu znaku, jak na rysunku obok.
W takiej konwencji, przykładowo:

– znak $\begin{matrix} \circ & \circ \\ \bullet & \circ \\ \circ & \circ \end{matrix}$ oznaczymy jedną cyfrą: (2);

– znak $\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \circ & \circ \\ \bullet & \circ \end{matrix}$ oznaczymy trójką cyfr: $(1,3,4)$ – przy czym kolejność zapisu tych cyfr nie ma znaczenia.

$A_1 = \{(1),(2),(3),(4),(5),(6)\}$, zatem $|A_1| = 6$

$$A_2 = \left\{\begin{matrix} (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,5),(4,6), \\ (5,6) \end{matrix}\right\}, \text{ zatem } |A_2| = 15$$

$$A_3 = \left\{\begin{matrix} (1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6), \\ (1,3,4),(1,3,5),(1,3,6), \\ (1,4,5),(1,4,6),(1,5,6), \\ (2,3,4),(2,3,5),(2,3,6), \\ (2,4,5),(2,4,6),(2,5,6), \\ (3,4,5),(3,4,6),(3,5,6), \\ (4,5,6) \end{matrix}\right\}, \text{ zatem } |A_3| = 20$$

Zauważmy, że każdemu znakowi z dwoma punktami wypukłymi możemy przyporządkować znak z czterema punktami wypukłymi, zamieniając punkty wypukłe na niewypukłe i odwrotnie:

Np. znakowi $\begin{matrix} \bullet & \circ \\ \circ & \circ \\ \bullet & \circ \end{matrix}$ przyporządkujemy znak $\begin{matrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet \end{matrix}$.

Zatem znaków z czterema punktami wypukłymi jest tyle samo, co znaków z dwoma punktami wypukłymi. Podobnie argumentujemy, że znaków z pięcioma punktami wypukłymi jest tyle samo co znaków z jednym punktem wypukłym. Stąd $|A_4| = |A_2| = 15$ oraz $|A_5| = |A_1| = 6$.

$A_6 = \{(1,2,3,4,5,6)\}$, zatem $|A_6| = 1$

Wszystkich znaków w piśmie Braille'a jest: $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$.

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

MATEMATYKA

Poziom podstawowy