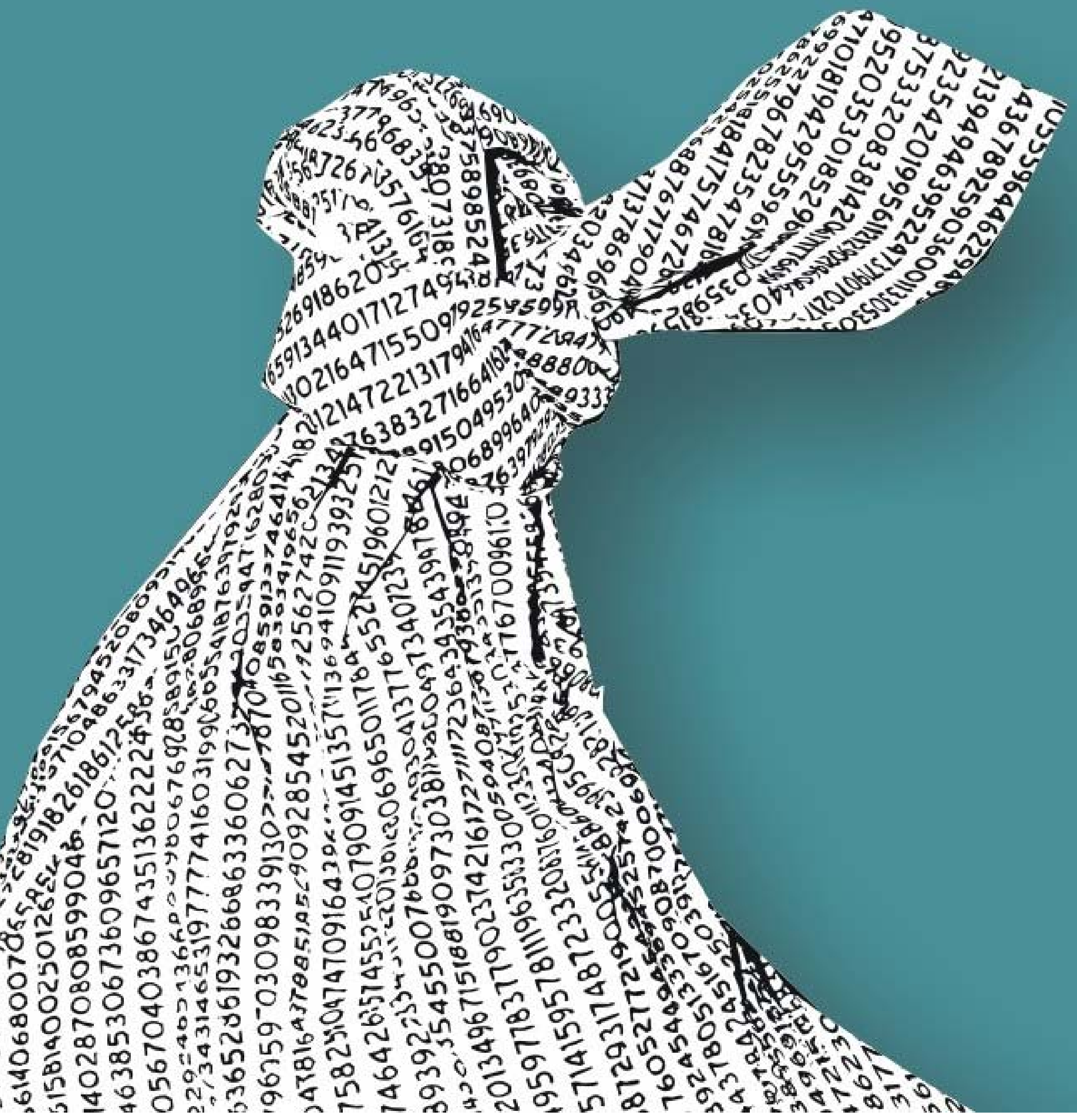
Zestaw wybranych wzorów matematycznych

materiały pomocnicze opracowane dla potrzeb egzaminu maturalnego i dopuszczone jako pomoce egzaminacyjne



Zestaw matematycznych wzorów został przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki. Zawiera wzory przydatne do rozwiązania zadań z wszystkich działów matematyki, dlatego może służyć zdającym nie tylko podczas egzaminu, ale i w czasie przygotowań do matury.

Zestaw ten został opracowany w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej we współpracy z pracownikami wyższych uczelni oraz w konsultacji z ekspertami z okręgowych komisji egzaminacyjnych.
Szczególne podziękowania za merytoryczną pomoc w tworzeniu zestawu składamy Panu profesorowi doktorowi habilitowanemu Zbigniewowi Marciniakowi. Dziękujemy również Panu doktorowi Edwardowi Stachowskiemu za cenne uwagi i wnikliwą recenzję.

Mamy nadzieję, że zestaw, który przygotowaliśmy maturzystom, spełni swoje zadanie i przyczyni się do egzaminacyjnych sukcesów.

SPIS TREŚCI

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geq 0 \qquad\qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad\qquad |x-y| \leq |x| + |y| \qquad\qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Dla dowolnych liczb a oraz r, gdzie $r \geq 0$, mamy warunki równoważne:

$$|x-a| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad a-r \leq x \leq a+r$$

$$|x-a| \geq r \quad \Leftrightarrow \quad x \leq a-r \quad \text{lub} \quad x \geq a+r$$

POTĘGI I PIERWIASTKI

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.
Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

—— * ——

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

- dla $a \neq 0$: $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad$ oraz $\quad a^0 = 1$
- dla $a \geq 0$: $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$: $\quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad\qquad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \qquad\qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$, $b \neq 0$.

SILNIA. SYMBOL NEWTONA

Silnią liczby całkowitej dodatniej *n* nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

—— * ——

Dla liczb całkowitych *n*, *k* spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy symbol Newtona:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Dla $0 \leq k < n$ mamy:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

DWUMIAN NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej *n* oraz dla dowolnych liczb *a*, *b* mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Z dwumianu Newtona dla *n* = 2 oraz *n* = 3 otrzymujemy dla dowolnych liczb *a*, *b*:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

—— * ——

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej *n* oraz dowolnych liczb *a*, *b* zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^k + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

- <u>Ciąg arytmetyczny</u>

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego o danym pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- <u>Ciąg geometryczny</u>

Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego o danym pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- <u>Procent składany</u>

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- <u>Granica ciągu</u>

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = h$, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = g + h \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = g - h \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = g \cdot h$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $h \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g}{h}$$

—— * ——

Jeżeli (a_n), $n \geq 1$, jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie $|q| < 1$, to ciąg sum jego początkowych wyrazów $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ma granicę:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

FUNKCJA KWADRATOWA

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

pomocnej przy sporządzaniu wykresu.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$. Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej, czyli liczba pierwiastków równania

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe (równanie kwadratowe ma jeden podwójny pierwiastek):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta \geq 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wzory Viéte'a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

LOGARYTMY

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę c:

$$b = \log_a c \Leftrightarrow a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:
jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

POCHODNA FUNKCJI

$$\left[c\cdot f(x)\right]'=c\cdot f'(x) \quad \text{dla} \quad c\in R$$

$$\left[f(x)+g(x)\right]'=f'(x)+g'(x)$$

$$\left[f(x)-g(x)\right]'=f'(x)-g'(x)$$

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}, \quad \text{gdy} \quad g(x)\neq 0$$

Pochodne niektórych funkcji:

$$f(x)=c \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$$

$$f(x)=ax+b \quad \Rightarrow \quad f'(x)=a$$

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2ax+b$$

$$f(x)=\frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{-a}{x^2}$$

$$f(x)=x^r \quad \Rightarrow \quad f'(x)=rx^{r-1}$$

gdzie $r\neq 0$, zaś *a*, *b*, *c* – dowolne liczby rzeczywiste.

- <u>Równanie stycznej</u>

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

GEOMETRIA ANALITYCZNA

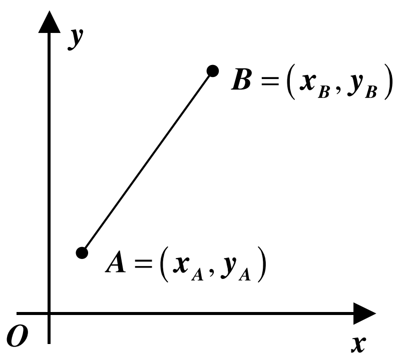
- <u>Odcinek</u>

Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka *AB*:

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$



- Wektory

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, który przesuwa punkt A na punkt B:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad\qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

- Prosta

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli $A = 0$, prosta jest równoległa do osi Ox; jeżeli $B = 0$, prosta jest równoległa do osi Oy; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

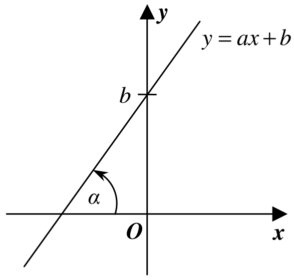
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.



Równanie prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- Prosta i punkt

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ dana jest wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Para prostych

Dwie proste, o równaniach kierunkowych

$$y = a_1 x + b_1 \qquad\qquad y = a_2 x + b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

– są równoległe, gdy $a_1 = a_2$,

– są prostopadłe, gdy $a_1 a_2 = -1$,

– tworzą kąt φ taki, że: $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ i $\mathrm{tg}\,\varphi = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}\right|$.

Jeżeli proste dane są równaniami w postaci ogólnej:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad\qquad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

to odpowiednio:

– są równoległe, gdy $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$,

– są prostopadłe, gdy $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$,

– tworzą kąt φ taki, że: $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ i $\mathrm{tg}\,\varphi = \left|\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}\right|$.

- Trójkąt

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$, $C=(x_C, y_C)$, dane jest wzorem:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|$$

Środek ciężkości trójkąta ABC, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

- Przekształcenia geometryczne

– przesunięcie o wektor $\vec{u}=[a,b]$ przekształca punkt (x,y) na punkt $(x+a, y+b)$;

– symetria względem osi Oy przekształca punkt (x,y) na punkt $(-x,y)$;

– symetria względem punktu (a,b) przekształca punkt (x,y) na punkt $(2a-x, 2b-y)$;

– jednokładność o środku w punkcie $(0,0)$ i skali $s\neq 0$ przekształca punkt (x,y) na punkt (sx, sy).

- Równanie okręgu

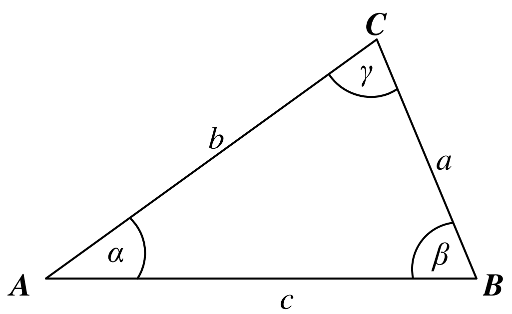
Równanie okręgu o środku w punkcie (a,b) i promieniu r:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

lub $\quad x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \quad$ gdzie $r^2=a^2+b^2-c>0$

PLANIMETRIA

- Oznaczenia



a, b, c – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C;

$2p=a+b+c$ – obwód trójkąta;

α, β, γ – miary kątów przy wierzchołkach A, B, C;

h_a, h_b, h_c – wysokości, opuszczone z wierzchołków A, B, C;

R, r – promienie okręgów opisanego i wpisanego.

- Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R}=rp=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

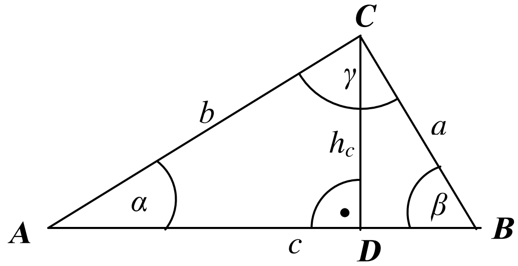
- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie ABC kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

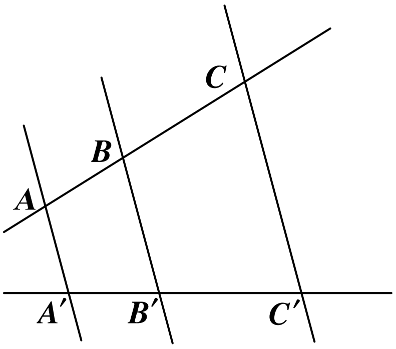
- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym



Załóżmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$
$$h_c = \frac{ab}{c}$$
$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$
$$a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha = b \cdot \mathrm{ctg}\beta$$
$$R = \frac{1}{2}c$$

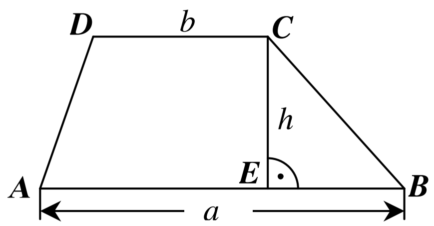
- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)



Proste AA', BB', CC' są parami równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość:

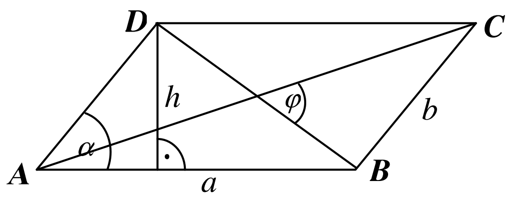
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

- Czworokąty



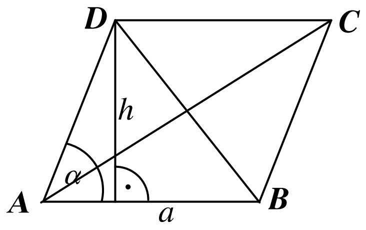
Trapez
Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Równoległobok
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$$

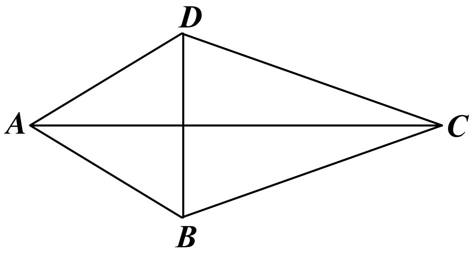


Romb

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$$P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$$



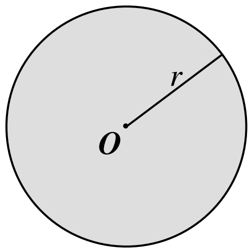
Deltoid

Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoidu:

$$P = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$$

- Koło



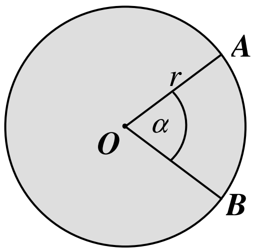
Wzór na pole koła o promieniu *r*:

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu *r*:

$$Ob = 2\pi r$$

- Wycinek koła



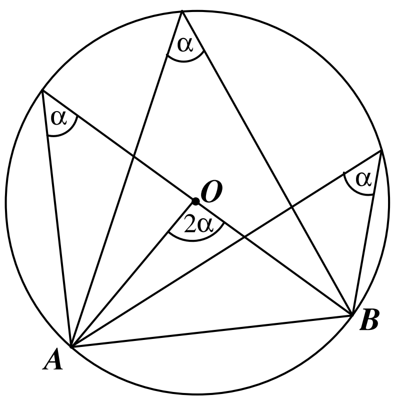
Wzór na pole wycinka koła o promieniu *r* i kącie środkowym α°:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

Długość łuku wycinka koła o promieniu *r* i kącie środkowym α°:

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

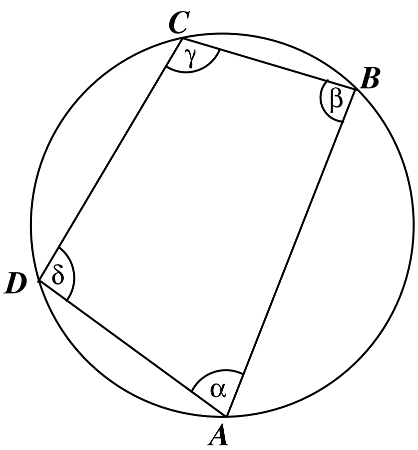
- Kąty w okręgu



Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tych samych łukach, są równe.

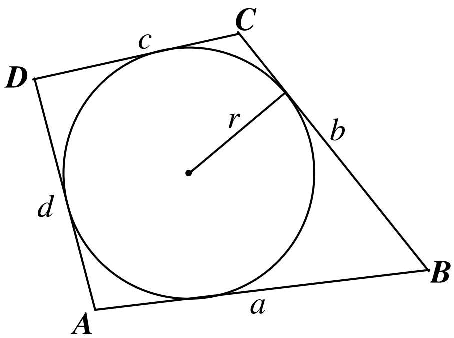
- Okrąg opisany na czworokącie



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

- Okrąg wpisany w czworokąt



W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

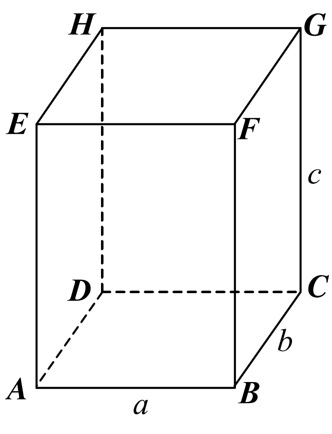
$$a + c = b + d$$

STEREOMETRIA

- Oznaczenia

P – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole powierzchni podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej
V – objętość

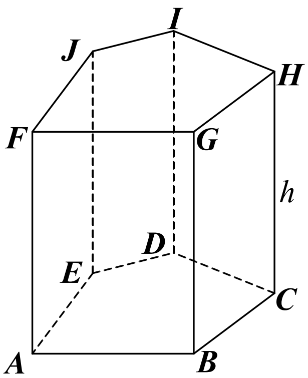
- Prostopadłościan



$$P = 2(ab + bc + ac)$$
$$V = abc$$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu.

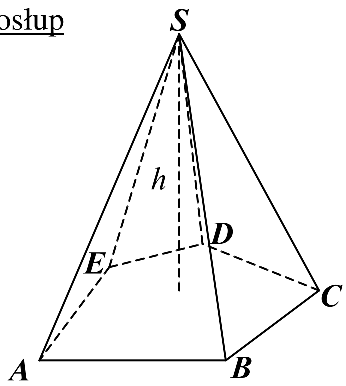
- Graniastosłup prosty



$$P_b = 2p \cdot h$$
$$V = P_p \cdot h$$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa.

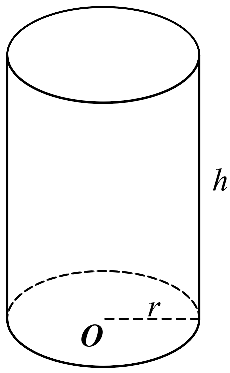
- Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.

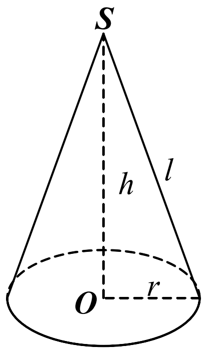
- Walec



$$P_b = 2\pi rh$$
$$P = 2\pi r(r+h)$$
$$V = \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy,
h –wysokością walca.

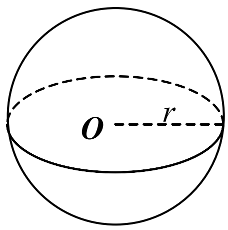
- Stożek



$$P_b = \pi rl$$
$$P = \pi r(r+l)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy,
h – wysokością, l – długością tworzącej stożka.

- Kula

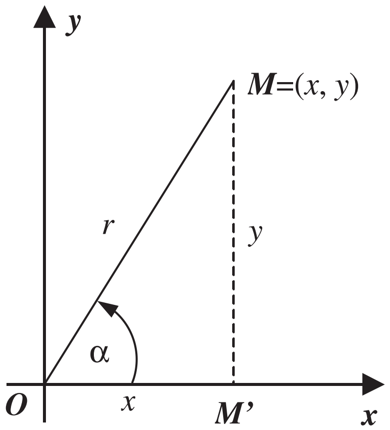


$$P = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli.

TRYGONOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych



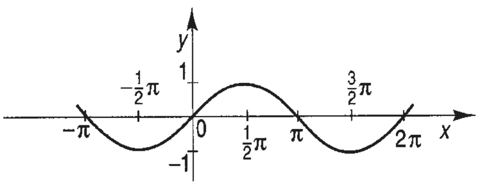
$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$$

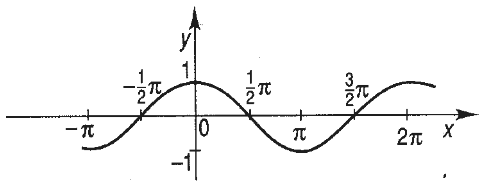
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y} \qquad (y \neq 0)$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

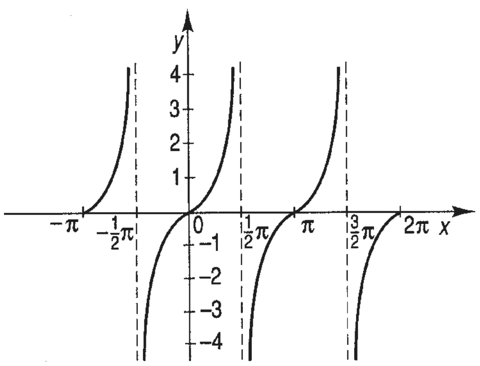
- Wykresy funkcji trygonometrycznych



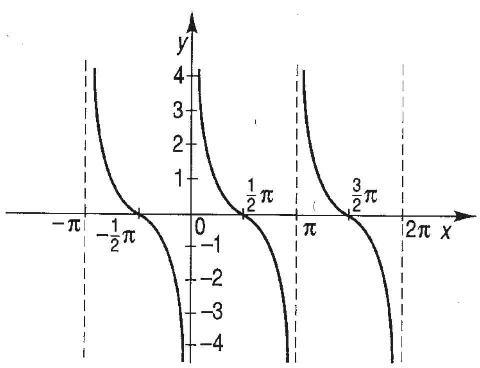
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \mathrm{tg}x$



$y = \mathrm{ctg}x$

- Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dla $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ k – całkowite

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ dla $\alpha \neq k\pi$ k – całkowite

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$ dla $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}$ k – całkowite

- Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	$0\,(0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}\,(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}\,(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}\,(60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}\,(90^\circ)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Wzory redukcyjne

$\varphi =$	$-\alpha$	α	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\varphi$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\varphi$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\varphi$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

- Funkcje sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α, β zachodzą równości:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto mamy równości:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

- Funkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Ponadto, dla tych kątów, dla których prawe strony są określone, mamy równości:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

- Funkcje potrojonego kąta

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \sin\alpha\left(3 - 4\sin^2\alpha\right)$$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha\left(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha\right) = \cos\alpha\left(4\cos^2\alpha - 3\right)$$

- Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

KOMBINATORYKA

- Permutacje

Liczba sposobów, w jaki $n \geq 1$ elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, w jaki z n elementów można utworzyć ciąg, składający się z k ($1 \leq k \leq n$) różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, w jaki z n elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k.

- Kombinacje

Liczba sposobów, w jaki spośród n elementów można wybrać k ($0 \leq k \leq n$) elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

- Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli zajście każdego zdarzenia elementarnego jest jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

- Własności prawdopodobieństwa

$0 \le P(A) \le 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\Omega) = 1$ Ω – zdarzenie pewne

$P(\varnothing) = 0$ $\varnothing$ – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A) \le P(B)$ gdy $A \subset B \subset \Omega$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$,

zatem $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$.

- Zdarzenia niezależne

Zdarzenia $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są niezależne, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami, przy czym $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zajścia zdarzenia *A* pod warunkiem, że zaszło zdarzenie *B*, nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n \subset \Omega$ spełniają warunki:

1. $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, $i \ne j$,
2. $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$,
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \le i \le n$

to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi równość:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + ... + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- <u>Schemat Bernoulliego</u>

Prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego wyraża się wzorem:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad\qquad p+q=1$$

gdzie:

p – prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie,
q – prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie.

PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- <u>Średnia arytmetyczna</u>

Średnia arytmetyczna n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

- <u>Średnia ważona</u>

Średnia ważona n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, ..., w_n$ jest równa:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + ... + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$$

- <u>Średnia geometryczna</u>

Średnia geometryczna n nieujemnych liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

- <u>Średnia harmoniczna</u>

Średnia harmoniczna n dodatnich liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

- <u>Mediana</u>

Medianą uporządkowanego rosnąco ciągu n danych liczbowych $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu),
- dla n parzystych: $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu).

- <u>Wariancja i odchylenie standardowe</u>

Wariancją n danych liczbowych $a_1, a_2, ..., a_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{a}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{\left(a_1 - \overline{a}\right)^2 + \left(a_2 - \overline{a}\right)^2 + \left(a_3 - \overline{a}\right)^2 + ... + \left(a_n - \overline{a}\right)^2}{n}$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

α [°]	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{ctg}\,\beta$	β [°]
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	**0,6428**	**0,8391**	**50**
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

α [°]	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{ctg}\,\beta$	β [°]
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	**0,9397**	**2,7475**	**20**
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	**0,9848**	**5,6713**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,0000**	**–**	**0**

OKRĘGOWE KOMISJE EGZAMINACYJNE

ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. (58) 320 55 90, fax (58) 320 55 91
www.oke.gda.pl, komisja@oke.gda.pl

ul. Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. (32) 616 33 99, fax (32) 616 33 99 w. 108
www.oke.jaw.pl, oke@oke.jaw.pl

ul. Focha 39, 30-119 Kraków
tel. (12) 618 12 01, fax (12) 427 28 45
www.oke.krakow.pl, oke@oke.krakow.pl

ul. Nowa 2, 18-400 Łomża
tel./fax (86) 216 44 95
www.oke.lomza.com, okelomza@pro.onet.pl

pl. Zwycięstwa 2, 90-312 Łódź
tel. (42) 676 26 55, fax (42) 674 05 53
www.komisja.pl, komisja@komisja.pl

ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. (61) 852 13 07, fax (61) 852 14 41
www.oke.poznan.pl, sekretariat@oke.poznan.pl

ul. Grzybowska 77, 00-844 Warszawa
tel. (22) 457 03 35, fax (22) 457 03 45
www.oke.waw.pl, info@oke.waw.pl

ul. Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. (71) 785 18 52, fax (71) 785 18 66
www.oke.wroc.pl, sekret@oke.wroc.pl

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

ul. Łucka 11, 00-842 Warszawa
tel. (22) 656 38 00, fax (22) 656 37 57
www.cke.edu.pl, ckesekr@cke.edu.pl

ISBN 83-7400-082-1