CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Fizyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MFAP-R0-100, MFAP-R0-200, MFAP-R0-300, MFAP-R0-400, MFAP-R0-700, MFAP-R0-Q00, MFAP-R0-K00
Termin egzaminu:	19 maja 2026 r.
Data publikacji dokumentu:	26 czerwca 2026 r.

Ogólne zasady oceniania arkuszy egzaminacyjnych z fizyki

1. Jeżeli zdający poprawnie rozwiązał zadanie (użył poprawnej metody, uwzględnił warunki zadania, otrzymał poprawny wynik) metodą, której nie uwzględniały zasady oceniania (chodzi o jakościowo inną metodę – np. użycie prawa / wzoru / twierdzenia / metody rachunkowej spoza podstawy programowej – a nie o metodę równoważną tym w zasadach oceniania), to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.
2. Jeżeli zdający poda w wyniku końcowym wartość wielkości fizycznej bez jednostki lub z błędną jednostką, to nie spełnia warunków określonych w zasadach oceniania na maksymalną liczbę punktów.
3. Ocenie podlegają te fragmenty pracy zdającego, które dotyczą polecenia.
4. Jeżeli na pewnym etapie rozwiązania zadania zdający podaje kilka sprzecznych rozwiązań i nie wskazuje, które z nich należy uznać za poprawne, to może uzyskać punkty tylko za wcześniejsze poprawne etapy rozwiązania.
5. Jeżeli na pewnym etapie rozwiązania zadania zdający podaje kilka sprzecznych rozwiązań i wskazuje, które z nich należy uznać za poprawne, to zapisów w innych rozwiązaniach nie bierze się pod uwagę w ocenianiu.
6. Jeżeli na dowolnym etapie rozwiązania zadania zdający popełnia błąd rachunkowy (albo błąd przepisania wartości z danych albo wcześniejszych etapów rozwiązania), ale stosuje poprawne metody rozwiązania i konsekwentnie doprowadza rozwiązanie zadania do końca, to ocenę rozwiązania obniża się o 1 punkt.
7. Jeżeli w poleceniu jest dyspozycja o zapisaniu wyniku zaokrąglonego do pewnej liczby cyfr znaczących, to oznacza, że wynik musi być podany w postaci rozwinięcia dziesiętnego liczby i z określonym w poleceniu zaokrągleniem. Jeżeli w zadaniu z takim poleceniem zdający przedstawia wynik w postaci ułamka zwykłego, lub w postaci z występującym π lub np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ albo podaje wynik ze zbyt dużą lub zbyt małą liczbą cyfr znaczących – to nie otrzymuje maksymalnej liczby punktów.
8. Wszelkie wzory / związki / zależności / relacje między wielkościami mogą być równoważnie zapisane za pomocą symboli lub liczb, które to liczby są wartościami wielkości występujących w tych wzorach / związkach / zależnościach / relacjach.
9. Jeżeli w zasadach oceniania danego etapu rozwiązania wymienione jest, że zdający korzysta / uwzględnia / zapisuje dane związki / zależności / prawa / wzory, to mogą być one zapisane oddzielnie, albo nawet w jednym równaniu (o ile to możliwe).

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Gdy wymaganie dotyczy treści szkoły podstawowej, dopisano „(SP)”, a gdy zakresu podstawowego szkoły ponadpodstawowej – dopisano „(P)”.

Zadanie 1.1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: II.16) (SP) opisuje spadek swobodny […]. I.7) wyodrębnia z tekstów, […] wykresów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu […]. II.4) opisuje ruchy prostoliniowe […] jednostajnie zmienne, posługując się zależnościami położenia, wartości prędkości […] od czasu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 1.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.16) (SP) opisuje spadek swobodny […]. I.7) wyodrębnia z tekstów, […] wykresów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu […]. II.4) opisuje ruchy prostoliniowe […] jednostajnie zmienne, posługując się zależnościami położenia, wartości prędkości […] od czasu; II.6) wyznacza położenie, wartość prędkości, wartość przyspieszenia i drogę w ruchu […] jednostajnie zmiennym na podstawie danych zawartych w postaci […] wykresów.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zasady oceniania[2]

2 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości początkowej rzutu w górę **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $v_0 \approx 7{,}85\ \mathrm{m/s}$

1 pkt – zapisanie/zastosowanie zależności między prędkością końcową a prędkością początkową, czasem i przyśpieszeniem w ruchu jednostajnie opóźnionym **oraz** uwzględnienie, że prędkość końcowa wynosi zero, a przyśpieszenie jest równe przyśpieszeniu grawitacyjnemu, np. zapisy równoważne poniższym:

$0 = v_0 - gt_{AW}$

LUB

– skorzystanie z symetrii w czasie dla rzutu pionowego w górę i spadku swobodnego **oraz** zapisanie/zastosowanie zależności między prędkością końcową a czasem i przyśpieszeniem w spadku swobodnym bez prędkości początkowej, np.:

$v_0 = v_{k\ spadanie} = gt_{WA}$ (lub zapisy równoważne)

LUB

– zapisanie kompletu równań wynikających z równań ruchu (lub/i zasady zachowania energii mechanicznej), z których można obliczyć v_0, z prawidłową identyfikacją czasów w równaniach na h_{max} i h_0, np. zapisy równoważne poniższym:

$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$ oraz $h_{max} = h_0 + v_0 \cdot 0{,}8 - \frac{1}{2} g \cdot 0{,}8^2$ oraz $h_{max} = \frac{1}{2} g \cdot 1^2$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania[3]

Sposób 1.

Ciało C w chwili $t_0 = 0$ s miało prędkość początkową o wartości v_0 skierowaną pionowo w górę, a w chwili $t = 0{,}8$ s ciało osiągnęło wysokość maksymalną i miało prędkość końcową równą zero: $v_k = 0$. Od chwili $t_0 = 0$ s w czasie $t_{AW} = 0{,}8$ s ciało poruszało się ruchem jednostajnie opóźnionym z przyśpieszeniem grawitacyjnym $\vec{g}$. Skorzystamy z zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym z przyśpieszeniem o wartości g:

$$v_k = v_0 - gt_{AW} \quad \text{oraz} \quad v_k = 0$$

$$0 = v_0 - 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{s} \quad \rightarrow \quad v_0 = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{s} \approx 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Sposób 2.

Skorzystamy z symetrii w czasie między wznoszeniem swobodnym w rzucie pionowym a spadkiem swobodnym z przyśpieszeniem grawitacyjnym (wartość prędkości początkowej wznoszenia jest równa wartości prędkości końcowej spadania). Rozważmy ruch zastępczy – spadek swobodny (z h_{max} do h_0) bez prędkości początkowej w czasie $t_{WA} = 0{,}8$ s. Zatem:

$$v_0 = v_{k\ spadania} \quad \text{oraz} \quad v_{k\ spadania} = gt_{WA} = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{s} \approx 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_0 \approx 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

[2] Pod opisem warunków za przyznanie punktów w niektórych przypadkach podano przykładowe zapisy (lub przykładowe zapisy równoważne), które spełniają te warunki w minimalnym stopniu.
[3] Przykładowe rozwiązania mogą zawierać dodatkowe wyjaśnienia/komentarze, które nie podlegają ocenie. Wymagane elementy rozwiązania zdającego podlegające ocenie są wyszczególnione i opisane w kryteriach punktacji zasad oceniania. Dodatkowe komentarze w rozwiązaniu zamieszczono w celach dydaktycznych.

Zadanie 1.3. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.16) (SP) opisuje spadek swobodny […]. I.7) wyodrębnia z […] wykresów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. II.4) opisuje ruchy prostoliniowe jednostajne i jednostajnie zmienne, posługując się zależnościami położenia, wartości prędkości i przyspieszenia oraz drogi od czasu; II.6) wyznacza położenie, wartość prędkości, wartość przyspieszenia i drogę w ruchu […] jednostajnie zmiennym na podstawie danych zawartych w postaci […] wykresów.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1.)
Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek h_max-metoda
Poprawna metoda obliczenia h_{max}, tzn. skorzystanie ze związku między drogą a czasem i przyśpieszeniem grawitacyjnym w spadku swobodnym (od punktu W do B) bez prędkości początkowej, **oraz** uwzględnienie, że $t_{WB} = 1$ s, np. zapisy równoważne poniższym:

$$h_{max} = \frac{1}{2}gt_{WB}^2 \qquad \text{oraz} \qquad t_{WB} = 1\ \text{s}$$

Warunek Δh-metoda
Poprawna **metoda 1.** obliczenia różnicy wysokości Δh_{WA}, tzn. skorzystanie ze związku między drogą a czasem i przyśpieszeniem grawitacyjnym w spadku swobodnym (od punktu W do A) bez prędkości początkowej, **oraz** uwzględnienie, że $t_{WA} = 0{,}8$ s, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta h_{WA} = \frac{1}{2}gt_{WA}^2 \qquad \text{oraz} \qquad t_{WA} = 0{,}8\ \text{s}$$

ALBO

Poprawna **metoda 2.** (zobacz *Uwaga* przy kroku 2. w sposobie 1. rozwiązania) obliczenia różnicy wysokości Δh_{AW}, tzn. skorzystanie ze związku między drogą a prędkością początkową, czasem i przyśpieszeniem grawitacyjnym w rzucie pionowym (od punktu A do punktu W), **oraz** uwzględnienie, że $t_{AW} = 0{,}8$ s, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta h_{AW} = v_0 t_{AW} - \frac{1}{2}gt_{AW}^2 \qquad \text{oraz} \qquad t_{AW} = 0{,}8\ \text{s}$$

Warunek h_0-metoda
Zapisanie równania wskazującego na strategię rozwiązania, np. zapisy równoważne poniższym:

$$h_0 = h_{max} - \Delta h_{AW}$$

Schemat punktowania (dla rozwiązania sposobem 1.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – spełnienie warunków: **h_max-metoda** **oraz** **Δh-metoda** **oraz** **h_0-metoda**

LUB

– spełnienie warunków: **h_max-metoda** **oraz** **h_0-metoda** **oraz** podanie prawidłowej wartości $h_{max} \approx 4{,}9\ \mathrm{m}$

LUB

– spełnienie warunków: **Δh-metoda** **oraz** **h_0-metoda** **oraz** podanie prawidłowej wartości $\Delta h \approx 3{,}1\ \mathrm{m}$

LUB

– spełnienie warunków: **Δh-metoda** **oraz** **h_max-metoda** **oraz** podanie prawidłowej wartości dla $\Delta h \approx 3{,}1\ \mathrm{m}$ lub $h_{max} \approx 4{,}9\ \mathrm{m}$.

1 pkt – spełnienie warunku **h_max-metoda**

LUB

– spełnienie warunku **Δh-metoda**

LUB

– spełnienie warunku **h_0-metoda**

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 2.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C, **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – poprawne zapisanie kinematycznego równania ruchu dla ciała C **oraz** zapisanie/uwzględnienie warunków, że $h = 0$ dla $t_{AB} = 1{,}8\ \mathrm{s}$, **oraz** $v_0 = gt_{AW}$, np.:

$$0 = h_0 + gt_{AW}t_{AB} - \frac{1}{2}gt_{AB}^2$$ (lub zapisy równoważne)

1 pkt – poprawne zapisanie kinematycznego równania ruchu dla ciała C, np.:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$ (lub zapisy równoważne)

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 3.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C, **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – spełnienie warunku za 1 pkt **oraz** zapisanie/uwzględnienie warunków, że $h = 0$ dla $t_{A'B} = 0{,}2\ \mathrm{s}$ (A' jest punktem symetrycznym do A), **oraz** $v_0 = gt_{AW}$, np.:

$$0 = h_0 - \left(gt_{AW} \cdot 0{,}2 + \frac{1}{2}g \cdot 0{,}2^2\right)$$ (lub zapisy równoważne)

1 pkt – poprawne zapisanie kinematycznego równania ruchu (jednostajnie przyśpieszonego) dla ciała C, licząc czas od momentu gdy osiągnie z powrotem wysokość h_0, np.:

$$h(t) = h_0 - s(t) = h_0 - \left(v_0 t + \frac{1}{2}gt^2\right)$$ (lub zapisy równoważne)

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 4.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C, **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – spełnienie warunku za 1 pkt **oraz** zapisanie/uwzględnienie warunku, że $v_0 = gt_{AW}$, **oraz** poprawna metoda obliczenia h_{max}, np. zapisy równoważne poniższym:

$$h_0 = h_{max} - \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{oraz} \quad v_0 = gt_{AW} \quad \text{oraz} \quad h_{max} = \frac{1}{2}gt_{WB}^2$$

1 pkt – poprawne zapisanie równania zasady zachowania energii mechanicznej (lub równań ruchu z wyeliminowanym czasem), np. zapisy równoważne poniższym:

$$h_0 = h_{max} - \frac{v_0^2}{2g}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 5.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C, **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – spełnienie warunku za 1 pkt **oraz** podstawienie do równania paraboli współrzędnych punktów A i B **oraz** wyznaczenie zależności między h_0 i h_{max}, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\begin{cases} h_0 = k(0 - 0{,}8)^2 + h_{max} \\ 0 = k(1{,}8 - 0{,}8)^2 + h_{max} \end{cases} \quad \rightarrow \quad h_0 = 0{,}36h_{max}$$

LUB

– spełnienie warunku za 1 pkt **oraz** podstawienie do równania paraboli współrzędnych punktów A i B **oraz** poprawna metoda wyznaczenia h_{max}, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\begin{cases} h_0 = k(0 - 0{,}8)^2 + h_{max} \\ 0 = k(1{,}8 - 0{,}8)^2 + h_{max} \end{cases} \quad \text{oraz} \quad h_{max} = \frac{1}{2}gt_{WB}^2$$

1 pkt – zapisanie równania paraboli (której fragment jest wykresem $h(t)$) w postaci kanonicznej z podstawionymi współrzędnymi wierzchołka W, np. zapisy równoważne poniższym:

$$h(t) = k(t - 0{,}8)^2 + h_{max}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Określimy strategię postępowania:

Krok 1. Obliczymy h_{max}.

Krok 2. Obliczymy Δh_{AW}. Skorzystamy z symetrii w czasie między wznoszeniem swobodnym w rzucie pionowym a spadkiem swobodnym bez prędkości początkowej (oba ruchy z przyśpieszeniem grawitacyjnym):

$$\Delta h_{AW} = \Delta h_{WA} \quad \text{oraz} \quad t_{wznoszenia\,AW} = t_{spadania\,WA}$$

Krok 3. Obliczymy h_0. Skorzystamy z faktu, że $h_{max} = h_0 + \Delta h_{AW}$.

Krok 1. Obliczymy h_{max}. Skorzystamy ze związku między drogą (równą wysokości maksymalnej) a przyśpieszeniem (równym grawitacyjnemu) i czasem w ruchu jednostajnie przyśpieszonym. Czas opadania od punktu W do B określimy na podstawie wykresu:

$$h_{max} = \frac{1}{2}gt_{WB}^2 \quad \text{gdzie} \quad t_{WB} = t_B - t_W = 1{,}8\ \mathrm{s} - 0{,}8\ \mathrm{s} = 1{,}0\ \mathrm{s}$$

$$h_{max} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\ \mathrm{s})^2 = 4{,}905\ \mathrm{m}$$

Krok 2. Obliczymy Δh_{AW}:

$$\Delta h_{AW} = \Delta h_{WA} \quad \text{oraz} \quad t_{wznoszenia\ AW} = t_{spadania\ WA} = 0{,}8\ \mathrm{s}$$

$$\Delta h_{WA} = \frac{1}{2}gt_{spadania\ WA}^2$$

$$\Delta h_{WA} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}8\ \mathrm{s})^2 = 3{,}1392\ \mathrm{m} \quad \text{zatem} \quad \Delta h_{AW} = 3{,}1392\ \mathrm{m}$$

Uwaga! Krok 2. można zrealizować drugą metodą, z wykorzystaniem równań ruchu dla rzutu pionowego w górę oraz z obliczonej wcześniej prędkości początkowej:

$$\Delta h_{AW} = v_0 t_{AW} - \frac{1}{2}gt_{AW}^2 = 7{,}848\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}8\ \mathrm{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}8\ \mathrm{s})^2 = 3{,}1392\ \mathrm{m}$$

Krok 3. Obliczymy h_0:

$$h_0 = h_{max} - \Delta h_{AW}$$

$$h_0 = 4{,}905\ \mathrm{m} - 3{,}1392\ \mathrm{m} = 1{,}7658\ \mathrm{m} \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$$

Sposób 2.

Skorzystamy z równania ruchu jednostajnie opóźnionego ciała C, z położeniem początkowym h_0, prędkością początkową v_0 i przyśpieszeniem grawitacyjnym g:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Zauważmy, że dla $t = t_{AB}$ mamy $h = 0$, ponadto $v_0 = gt_{AW}$:

$$0 = h_0 + v_0 t_{AB} - \frac{1}{2}gt_{AB}^2 \quad \text{oraz} \quad v_0 = gt_{AW}$$

$$0 = h_0 + gt_{AW}t_{AB} - \frac{1}{2}gt_{AB}^2$$

Obliczymy h_0. Z wykresu odczytamy czasy t_{AW} oraz t_{AB} i podstawimy do powyższego równania:

$$0 = h_0 + 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}8\ \mathrm{s}) \cdot (1{,}8\ \mathrm{s}) - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1{,}8\ \mathrm{s})^2$$

$$h_0 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1{,}8\ \mathrm{s})^2 - 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}8\ \mathrm{s}) \cdot (1{,}8\ \mathrm{s})$$

$$h_0 = 1{,}7658\ \mathrm{m} \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$$

Sposób 3.

Skorzystamy z równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego ciała C, licząc czas t od momentu, gdy osiągnie z powrotem wysokość h_0 w chwili $t_{A'} = 1{,}6\ \mathrm{s}$ (na wykresie jest to punkt A' symetryczny do punktu A). Prędkość początkowa tego ruchu ma wartość v_0 i jest skierowana w dół. Zapiszemy równanie ruchu jednostajnie przyśpieszonego z przyśpieszeniem o wartości g:

$$h(t) = h_0 - s(t) = h_0 - \left(v_0 t + \frac{1}{2} g t^2\right)$$

Zauważmy, że dla $t = t_{A'B} = 0{,}2\ \mathrm{s}$ mamy $h = 0$, ponadto $v_0 = g t_{AW}$:

$$0 = h_0 - \left(v_0 \cdot 0{,}2\ \mathrm{s} + \frac{1}{2} g \cdot (0{,}2\ \mathrm{s})^2\right) \quad \text{oraz} \quad v_0 = g t_{AW} = 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$h_0 = 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}2\ \mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}2\ \mathrm{s})^2$$

$$h_0 = 1{,}7662\ \mathrm{m} \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$$

Sposób 4.

Zapiszemy równanie wynikające z zasady zachowania energii mechanicznej:

$$g h_{max} = \frac{v_0^2}{2} + g h_0 \quad \rightarrow \quad h_0 = h_{max} - \frac{v_0^2}{2g}$$

Wyznaczymy h_{max} oraz v_0:

$$h_{max} = \frac{1}{2} g t_{WB}^2 \quad \text{oraz} \quad v_0 = g t_{AW}$$

Z powyższych równań wynika:

$$h_0 = \frac{1}{2} g t_{WB}^2 - \frac{1}{2} g t_{AW}^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot (1^2 - 0{,}8^2)\ \mathrm{m} = 1{,}7658\ \mathrm{m} \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$$

Sposób 5.

Wyznaczymy równanie paraboli, której fragment jest wykresem zależności $h(t)$. Skorzystamy z postaci kanonicznej równania paraboli. Współczynnik wiodący równania paraboli oznaczymy jako k. Współrzędne wierzchołka to $W = (t_W;\ h_W) = (0{,}8\,;\, h_{max})$ zatem:

$$1)\ h(t) = k(t - t_W)^2 + h_W \quad \rightarrow \quad 2)\ \ h(t) = k(t - 0{,}8)^2 + h_{max}$$

Uwaga! W równaniach podstawiamy wartości liczbowe lub symbole odpowiednich wielkości bez wypisywania jednostek, przy czym zakładamy, że są to jednostki podstawowe układu SI.

Do równania 2) podstawimy współrzędne punktów A i B:

$$\begin{cases} A = (0; h_0) \ \rightarrow h(t) \\ B = (1{,}8\,; 0) \rightarrow h(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} h_0 = k(0 - 0{,}8)^2 + h_{max} \\ 0 = k(1{,}8 - 0{,}8)^2 + h_{max} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_0 = 0{,}64k + h_{max} \\ \ 0 = k \cdot 1^2 + h_{max} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} h_0 = 0{,}64 \cdot (-h_{max}\ ) + h_{max} \\ k = -h_{max} \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} h_0 = 0{,}36 h_{max} \\ k = -h_{max} \end{cases}$$

- Przykładowy sposób 1. prowadzenia dalszego rachunku

Na podstawie równania ruchu jednostajnego opóźnionego: $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$, zauważamy, że współczynnik wiodący równania paraboli wynosi $k = -\frac{a}{2}$. Zatem:

$$\begin{cases} h_0 = 0{,}36 h_{max} \\ -\frac{g}{2} = -h_{max} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h_0 = 0{,}36 \cdot \frac{g}{2} \\ h_{max} = \frac{g}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h_0 = 1{,}7685\ \mathrm{m} \approx 1{,}77\ \mathrm{m} \\ h_{max} = 4{,}905\ \mathrm{m} \end{cases}$$

- Przykładowy sposób 2. prowadzenia dalszego rachunku

Obliczymy h_{max} ze wzoru na wysokość w spadku swobodnym:

$$h_{max} = \frac{1}{2} g t_{WB}^2 \quad \rightarrow \quad h_{max} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\ \mathrm{s})^2 = 4{,}905\ \mathrm{m}$$

Zatem:

$$h_0 = 0{,}36 h_{max} = 0{,}36 \cdot 4{,}905\ \mathrm{m} \approx 1{,}77\ \mathrm{m}$$

Zadanie 2.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.5) rozróżnia wielkości wektorowe i skalarne […]; I.6) tworzy […] rysunki schematyczne […] dla zilustrowania zjawisk […]. II.11) opisuje ruch niejednostajny po okręgu.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne wyznaczenie <u>konstrukcyjne</u> położenia środka S okręgu **oraz** wpisanie prawidłowej wartości liczbowej dla długości promienia okręgu.

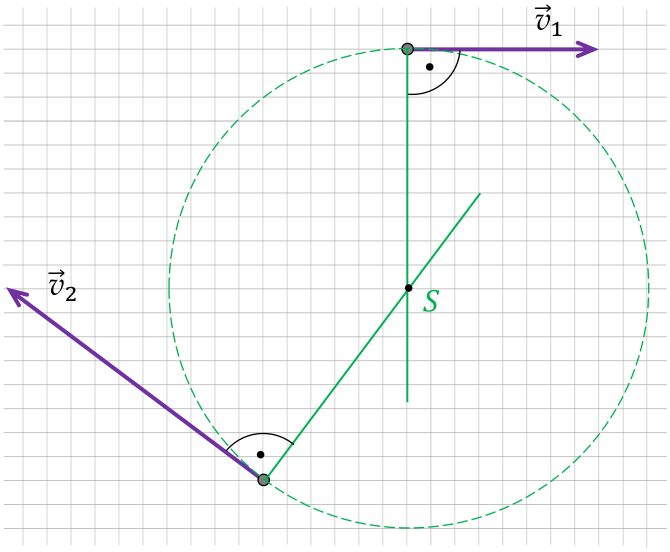
1 pkt – poprawna (co do zasady) metoda przeprowadzenia <u>konstrukcji</u> położenia środka S okręgu za pomocą prostych prostopadłych do wektorów prędkości (albo symetralnej odcinka łączącego początki wektorów prędkości i prostej prostopadłej do jednego z wektorów prędkości)

LUB

– poprawne oznaczenie położenia środka S okręgu <u>bez konstrukcji</u> **oraz** wpisanie prawidłowej wartości liczbowej dla długości promienia okręgu.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie



$l =$ ....10.... długości kratek

Zadanie 2.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. II.11) (SP) rozpoznaje i nazywa siły, podaje ich przykłady w różnych sytuacjach praktycznych (siły: ciężkości, […] sprężystości […]). II.11) opisuje ruch niejednostajny po okręgu; II.12) wyznacza graficznie siłę wypadkową dla sił działających w dowolnych kierunkach na płaszczyźnie; II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 2.3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. II.9) stosuje do obliczeń związki między promieniem okręgu, prędkością kątową, prędkością liniową oraz przyspieszeniem dośrodkowym; II.11) opisuje ruch niejednostajny po okręgu; II.12) wyznacza graficznie siłę wypadkową dla sił działających w dowolnych kierunkach na płaszczyźnie; II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał; II.20) […] wykorzystuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń.

Zasady oceniania

Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek SIŁY_MAX

Zapisanie związku między wartością siły wypadkowej (dośrodkowej) działającej na ciało $\mathcal{B}$ w najniższym położeniu a maksymalną wartością siły reakcji nici i wartością siły grawitacji, np. zapisy równoważne poniższym:

$$F_{do\ max} = F_{n\ max} - F_g$$

Warunek SIŁY_MIN

Zapisanie związku między wartością siły wypadkowej (dośrodkowej) działającej na ciało $\mathcal{B}$ w najwyższym położeniu a minimalną wartością siły reakcji nici i wartością siły grawitacji, np. zapisy równoważne poniższym:

$$F_{do\ min} = F_{n\ min} + F_g$$

Uwaga! W przypadku rozwiązania zadania w układzie nieinercjalnym wszystkie warunki i wzory pozostają analogiczne z tą różnicą, że zamiast siły wypadkowej pełniącej rolę dośrodkowej rozważa się „siłę” odśrodkową (bezwładności) i zamiast II zasady dynamiki rozważa się równowagę sił (łącznie z „siłą” odśrodkową).

Warunek SIŁY_MAX+WZORY

Spełnienie warunku **SIŁY_MAX** **oraz** zastosowanie wzoru na wartość siły dośrodkowej (zastosowanie II zasady dynamiki) z uwzględnieniem prędkości maksymalnej v_{max} i zastosowanie wzoru na wartość siły grawitacji: np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{max}^2}{l} = F_{n\ max} - mg$$

Warunek SIŁY_MIN+WZORY
Spełnienie warunku **SIŁY_MIN** **oraz** zastosowanie wzoru na wartość siły dośrodkowej (zastosowanie II zasady dynamiki) z uwzględnieniem prędkości minimalnej v_{min} i zastosowanie wzoru na wartość siły grawitacji: np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{min}^2}{l} = F_{n\,min} + mg$$

Warunek ZZE
Zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii mechanicznej w najniższym i najwyższym położeniu ciała $\mathcal{B}$ **oraz** uwzględnienie w tym równaniu prędkości v_{min}, v_{max} we wzorach na energie kinetyczne i uwzględnienie różnicy wysokości $2l$ we wzorze na energię potencjalną, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{mv_{min}^2}{2} + mg2l$$

Warunek ZZE+ZALEŻNOŚĆ
Spełnienie warunku **ZZE** **oraz** wykorzystanie związku $\frac{v_{max}}{v_{min}} = \sqrt{3}$, **oraz** wyprowadzenie zależności między v_{max} albo v_{min} a iloczynem gl, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{mv_{min}^2}{2} + mg2l \quad \text{oraz} \quad \frac{v_{max}}{v_{min}} = \sqrt{3}\right) \rightarrow \left(v_{min} = \sqrt{2gl} \quad \text{albo} \quad v_{max} = \sqrt{6gl}\right)$$

Schemat punktowania
4 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu sił reakcji nici **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego: $\frac{F_{n\,max}}{F_{n\,min}} = 7$
3 pkt – spełnienie warunków:
SIŁY_MAX+WZORY oraz SIŁY_MIN+WZORY oraz ZZE+ZALEŻNOŚĆ
2 pkt – spełnienie warunków: **SIŁY_MAX+WZORY oraz SIŁY_MIN+WZORY**
LUB
– spełnienie warunku **ZZE+ZALEŻNOŚĆ**
LUB
– spełnienie warunków: **SIŁY_MAX oraz SIŁY_MIN oraz ZZE**
LUB
– spełnienie warunków: **(SIŁY_MAX+WZORY albo SIŁY_MIN+WZORY) oraz ZZE**
1 pkt – spełnienie warunku **SIŁY_MAX**
LUB
– spełnienie warunku **SIŁY_MIN**
LUB
– spełnienie warunku **ZZE**
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Zagadnienie rozwiążemy w inercjalnym układzie odniesienia. Siła reakcji nici działająca na ciało $\mathcal{B}$ podczas ruchu po okręgu ma największą wartość, gdy przechodzi ono przez najniższe położenie (gdzie ma największą prędkość), a najmniejszą wartość – gdy przechodzi ono przez najwyższe położenie (gdzie ma najmniejszą prędkość).

Siła reakcji nici ma kierunek wzdłuż nici i zwrot do środka okręgu. Zatem siła wypadkowa działająca na ciało $\mathcal{B}$ w górnym i dolnym położeniu ma charakter siły dośrodkowej i wiąże się z siłą reakcji nici i siłą grawitacji działającą na $\mathcal{B}$ następująco:

$$1)\quad \begin{cases} F_{do\,max} = F_{n\,max} - F_g \\ F_{do\,min} = F_{n\,min} + F_g \end{cases}$$

Zastosujemy wzór na siłę dośrodkową (równoważnie: II zasadę dynamiki i wzór na przyśpieszenie dośrodkowe):

$$2)\quad \begin{cases} m\dfrac{v_{max}^2}{l} = F_{n\,max} - mg \\ m\dfrac{v_{min}^2}{l} = F_{n\,min} + mg \end{cases} \quad \rightarrow \quad 2a)\quad \begin{cases} F_{n\,max} = \dfrac{mv_{max}^2}{l} + mg \\ F_{n\,min} = \dfrac{mv_{min}^2}{l} - mg \end{cases}$$

Określimy związek między maksymalną a minimalną wartością prędkości na podstawie zasady zachowania energii mechanicznej. Energia mechaniczna w najwyższym położeniu jest równa energii mechanicznej w najniższym położeniu. Ponadto wykorzystamy związek między tymi prędkościami podany w treści zadania. Z tych zależności wyznaczymy prędkości maksymalną i minimalną w funkcji g oraz l:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{mv_{max}^2}{2} = \dfrac{mv_{min}^2}{2} + mg2l \\ \dfrac{v_{max}}{v_{min}} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$3a)\quad \begin{cases} \dfrac{m(3v_{min}^2)}{2} = \dfrac{mv_{min}^2}{2} + mg2l \\ \dfrac{v_{max}}{v_{min}} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad 3b)\quad \begin{cases} v_{min} = \sqrt{2gl} \\ v_{max} = \sqrt{6gl} \end{cases}$$

Wartości prędkości otrzymane w pkt 3b) podstawimy do pkt 2a):

$$4)\quad \begin{cases} F_{n\,max} = \dfrac{m(6gl)}{l} + mg \\ F_{n\,min} = \dfrac{m(2gl)}{l} - mg \end{cases} \quad \rightarrow \quad 4a)\quad \begin{cases} F_{n\,max} = 7mg \\ F_{n\,min} = mg \end{cases}$$

Zapiszemy rozwiązanie:

$$5)\quad \frac{F_{n\,max}}{F_{n\,min}} = 7$$

Zadanie 3.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał. III.3) stosuje warunki statyki bryły sztywnej; posługuje się pojęciem momentu sił wraz z jednostką.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 3.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.12) wyznacza graficznie siłę wypadkową dla sił działających w dowolnych kierunkach […]; II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał. III.2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi; III.4) stosuje zasady dynamiki dla ruchu obrotowego; posługuje się pojęciami przyspieszenia kątowego oraz momentu bezwładności jako wielkości zależnej od rozkładu mas, wraz z ich jednostkami. ALBO II.20) […] wykorzystuje […] zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń. III.5) […] oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1. albo 3.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości F siły działającej na bloczek **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na F:

$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$ (lub przekształconego równoważnie)

3 pkt – spełnienie warunku za 2 pkt z pierwszego myślnika **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka i wzoru na moment bezwładności bloczka, np. zapisy równoważne poniższym:

$m_c a = F_g - F_n$ oraz $\frac{1}{2} m_w R^2 \frac{a}{R} = RF_n - RF$

LUB

– (dotyczy rozwiązania sposobem 3.) spełnienie warunku za 2 pkt z trzeciego myślnika **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka i wzoru na moment bezwładności walca i „doklejonego” ciężarka, np. zapisy równoważne poniższym:

$\left(\frac{1}{2} m_w R^2 + m_c R^2 \right) \frac{a}{R} = m_c g R - FR$

2 pkt – zapisanie poprawnych dwóch równań wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka i ruchu obrotowego bloczka **oraz** uwzględnienie w nich poprawnych wyrażeń opisujących wartość siły wypadkowej działającej na ciężarek i wartość wypadkowego momentu siły działającego na bloczek, np.:

$m_c a = F_g - F_n$ oraz $I_0 \epsilon = RF_n - RF$ (lub zapisy równoważne)

LUB

– zapisanie dwóch równań wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka i ruchu obrotowego bloczka, uwzględniających odpowiednie siły, z błędem znaku przy sile wypadkowej lub wypadkowym momencie sił (tzn. błędny znak może być w obu) **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka i wzoru na moment bezwładności bloczka

LUB

– (dotyczy rozwiązania sposobem 3.) zapisanie jednego równania wyrażającego II zasadę dynamiki ruchu obrotowego układu zastępczego walec–ciężarek (bez nici), w chwili, gdy ciężarek (jako punkt materialny) jest na poziomie osi walca i jest „doklejony” do walca **oraz** uwzględnienie sumarycznego momentu bezwładności układu względem osi walca **oraz** uwzględnienie poprawnego momentu sił działających na układ walec–ciężarek, np. zapisy równoważne poniższym:

$(I_0 + I_c)\epsilon = F_g R - FR$

1 pkt – zapisanie poprawnego równania wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka z uwzględnieniem masy m_c cieżarka **oraz** zapisanie równania wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego bloczka z uwzględnieniem momentu bezwładności I_0 bloczka, np. zapisy równoważne poniższym

$m_c a = F_w$ oraz $I_0 \epsilon = M$

Uwaga! W tym warunku nie wymaga się poprawnego rozpisania F_w i M.

LUB

– zapisanie poprawnego wyrażenia na wartość siły wypadkowej działającej na ciężarek **oraz** zapisanie poprawnego wyrażenia na wartość wypadkowego momentu siły działającego na bloczek, np. zapisy równoważne poniższym:

$$F_w = F_g - F_n \qquad \text{oraz} \qquad M = RF_n - RF$$

Uwaga! W tym warunku nie wymaga się równań II zasady dynamiki.

LUB

– zapisanie poprawnego równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość siły wypadkowej działającej na ciężarek, np.:

$$m_c a = F_g - F_n \qquad \text{(lub zapisy równoważne)}$$

LUB

– zapisanie poprawnego równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego bloczka względem osi symetrii **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość wypadkowego momentu siły działającego na bloczek, np. zapisy równoważne poniższym:

$$I_0 \epsilon = RF_n - RF$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 2.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości F siły działającej na bloczek **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na F:

$$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right) \qquad \text{(lub przekształconego równoważnie)}$$

3 pkt – spełnienie warunku za 2 pkt **oraz** zastosowanie wzoru na moment bezwładności bloczka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością a przyśpieszeniem i drogą (z wyeliminowanym czasem) w ruchu jednostajnie przyśpieszonym ciężarka bez prędkości początkowej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_w R^2 \frac{v^2}{R^2} - m_c g h = -Fh \qquad \text{oraz} \qquad v^2 = 2ah$$

albo

$$m_c a h + \frac{1}{2} m_w a h - m_c g h = -Fh$$

2 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia o zmianie energii mechanicznej i pracy siły niepotencjalnej **oraz** zastosowanie wzorów na energię kinetyczną ruchu postępowego ciężarka, ruchu obrotowego bloczka i energię potencjalną ciężarka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością liniową ciężarka a prędkością kątową bloczka, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(\frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 - m_c g h = -Fh \quad \text{oraz} \quad v = \omega R \right)$$

albo w jednym równaniu

$$\frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} I_0 \frac{v^2}{R^2} - m_c g h = -Fh$$

LUB

– zapisanie równania wynikającego z twierdzenia o zmianie energii mechanicznej i pracy siły niepotencjalnej, uwzględniającego odpowiednie rodzaje energii i wzory na te energie, z błędem znaku przy energiach lub pracy **oraz** zastosowanie związku między prędkością liniową ciężarka a prędkością kątową bloczka **oraz** zastosowanie wzoru na moment bezwładności bloczka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością a przyśpieszeniem i drogą (z wyeliminowanym czasem) w ruchu jednostajnie przyśpieszonym ciężarka bez prędkości początkowej.

1 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia o zmianie energii mechanicznej i pracy siły niepotencjalnej **oraz** uwzględnienie (poprzez oznaczenie) w tym równaniu zmiany energii kinetycznej ciężarka, zmiany energii kinetycznej ruchu obrotowego walca i zmiany energii potencjalnej ciężarka, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta E_{pot\ c} + \Delta E_{kin\ post\ c} + \Delta E_{kin\ obr\ w} = W_F$$

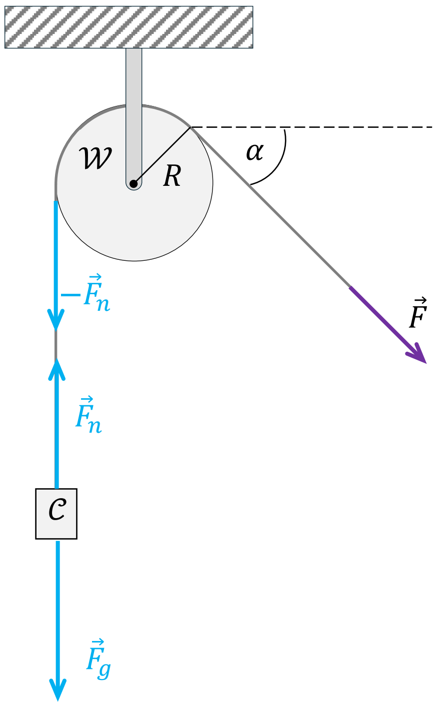
albo zapis w postaci przyrównania energii

$$E_{kin\ końc\ post\ c} + E_{kin\ końc\ obr\ w} + E_{pot\ końc\ c} = E_{pot\ pocz\ c} - |W_F|$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasad dynamiki)



Na ciężarek $\mathcal{C}$ działają dwie siły: siła reakcji nici $\vec{F}_n$ oraz siła grawitacji $\vec{F}_g$. Ponieważ ciężarek przyśpiesza w dół, to siła wypadkowa działająca na ciężarek ma kierunek pionowy i zwrot w dół. Wartość tej siły wypadkowej jest opisana wyrażeniem:

$$F_w = F_g - F_n$$

Na bloczek $\mathcal{W}$ działają dwa momenty sił: $\vec{M}_n$ – moment siły reakcji nici $\vec{F}_n$ oraz $\vec{M}_F$ – moment siły $\vec{F}$. Wypadkowy moment siły działający na bloczek jest opisany wyrażeniem:

$$M = RF_n - RF$$

Zapiszemy równania wynikające z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka $\mathcal{C}$ oraz dla ruchu obrotowego bloczka $\mathcal{W}$ (względem osi symetrii):

$$\begin{cases} m_c a = m_c g - F_n \\ I_0 \epsilon = RF_n - RF \end{cases}$$

Ruch przyśpieszony ciężarka $\mathcal{C}$ przekłada się na ruch obrotowy z przyśpieszeniem kątowym bloczka $\mathcal{W}$. Zastosujemy związek $a = \epsilon R$ między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka. Ponadto wykorzystamy wzór na I_0:

$$\begin{cases} m_c a = m_c g - F_n \\ \frac{1}{2} m_w R^2 \cdot \frac{a}{R} = RF_n - RF \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_c a = m_c g - F_n \\ \frac{1}{2} m_w a = F_n - F \end{cases}$$

$$m_c a + \frac{1}{2} m_w a = m_c g - F \quad \rightarrow \quad F = m_c g - m_c a - \frac{1}{2} m_w a$$

Wykorzystamy warunek zadania: $a = \frac{1}{2}g$, zatem:

$$F = m_c g - m_c \frac{1}{2} g - \frac{1}{2} m_w \cdot \frac{1}{2} g = \frac{1}{2} m_c g - \frac{1}{4} m_w g$$

$$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$$

Sposób 2. (zastosowanie twierdzenia o pracy i zmianie energii mechanicznej)

Zastosujemy twierdzenie o zmianie energii mechanicznej układu i pracy siły niepotencjalnej działającej na układ: zmiana energii mechanicznej układu jest równa pracy siły niepotencjalnej. Siła $\vec{F}$ ma zwrot przeciwny do zwrotu ruchu, zatem jej praca jest ujemna:

$$\Delta E_{mech} = -|W_F|$$

Zmianę energii mechanicznej rozpiszemy na zmianę energii potencjalnej układu i zmianę energii kinetycznej układu (ciężarka i bloczka):

$$\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = -|W_F|$$

$$\Delta E_{pot\,c} + \Delta E_{pot\,w} + \Delta E_{kin\,post\,c} + \Delta E_{kin\,obr\,w} = -|W_F|$$

Prędkości liniowa ciężarka i kątowa bloczka na początku ruchu są równe 0. Te prędkości w stanie końcowym oznaczymy – odpowiednio – jako v oraz ω. Załóżmy, że między stanem początkowym a końcowym ciężarek przebył drogę h. Na takiej też drodze siła $\vec{F}$ wykonuje pracę. Zatem:

$$m_c g(0 - h) + 0 + \left(\frac{1}{2} m_c v^2 - 0 \right) + \left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2 - 0 \right) = -Fh$$

Ruch postępowy ciężarka przekłada się na ruch obrotowy bloczka, więc wykorzystamy związek $v = \omega R$ i wzór na moment bezwładności bloczka:

$$-m_c gh + \frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_w R^2 \frac{v^2}{R^2} = -Fh$$

$$-m_c gh + \frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{4} m_w v^2 = -Fh$$

Wykorzystamy związek $v^2 = 2ah$ wynikający z równań ruchu jednostajnie przyśpieszonego:

$$-m_c gh + \frac{1}{2} m_c 2ah + \frac{1}{4} m_w 2ah = -Fh$$

$$-m_c gh + m_c ah + \frac{1}{2} m_w ah = -Fh$$

Wykorzystamy związek $a = \frac{1}{2}g$, podany w treści zadania:

$$-m_c gh + m_c \frac{1}{2} gh + \frac{1}{2} m_w \frac{1}{2} gh = -Fh$$

$$-m_c g + m_c \frac{1}{2} g + \frac{1}{2} m_w \frac{1}{2} g = -F$$

$$F = m_c g - m_c \frac{1}{2} g - \frac{1}{4} m_w\, g = m_c \frac{1}{2} g - \frac{1}{4} m_w\, g$$

$$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$$

Sposób 3. (zastosowanie układu zastępczego)
Rozważamy układ zastępczy, którego „chwilowa” dynamika jest równoważna dynamice układu opisanego w zadaniu. Załóżmy, że ciężarek jest „doklejony” do walca i znajduje się na wysokości osi walca. Ciężarek traktujemy jako punkt materialny.

Analizujemy „chwilowe” równanie ruchu obrotowego układu. Na taki układ działają momenty dwóch sił: siły $\vec{F}$ oraz siły $\vec{F_g}$ ciężkości „doklejonego” ciężarka. Chwilowy moment bezwładności układu jest sumą momentów bezwładności walca oraz ciężarka.

Zapiszemy chwilowe równanie ruchu obrotowego dla takiego układu:

$$(I_0 + I_c)\epsilon = F_g R - FR$$

Podstawimy odpowiednie wzory, wykonamy przekształcenia i wyznaczymy F:

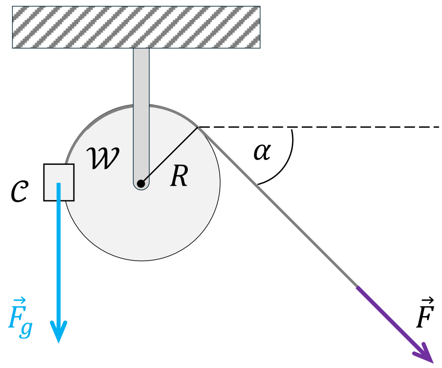
$$\left(\frac{1}{2}m_w R^2 + m_c R^2\right)\frac{a}{R} = m_c g R - FR$$

$$\frac{1}{2}m_w a + m_c a = m_c g - F$$

$$\frac{1}{2}m_w \frac{1}{2}g + m_c \frac{1}{2}g = m_c g - F$$

$$\frac{1}{4}m_w g - \frac{1}{2}m_c g = -F$$

$$F = \frac{1}{2}m_c g - \frac{1}{4}m_w g = \frac{1}{2}g\left(m_c - \frac{1}{2}m_w\right)$$



Zadanie 4.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: VIII.4) (SP) posługuje się pojęciami amplitudy, okresu, częstotliwości, długości fali i prędkości rozchodzenia się fali do opisu fal oraz stosuje do obliczeń związki między tymi wielkościami wraz z ich jednostkami. I.7) wyodrębnia z […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. X.1) analizuje rozchodzenie się fal na powierzchni wody i dźwięku w powietrzu na podstawie obrazu powierzchni falowych.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia częstotliwości fali **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $f \approx 1{,}3 \cdot 10^5\ \mathrm{Hz}$

1 pkt – zauważenie i zapisanie/wykorzystanie zależności $\Delta x_{ab} = 9\lambda_1$ **oraz** zapisanie/zastosowanie wzoru na prędkość fali (lub proporcji $\Delta t \propto \Delta x$ z niej wynikającej), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta x_{ab} = 9\lambda_1 \quad \text{oraz} \quad \left(v_1 = \frac{\Delta x_{ab}}{\Delta t_{ab}} \quad \text{albo} \quad v_1 = \frac{\lambda_1}{T}\right)$$

albo w jednym zapisie

$$T = \frac{\Delta t_{ab}}{9}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że odległość od odcinka a do b jest równa dziewięciu długościom fali:

$$\Delta x_{ab} = 9\lambda_1$$

Prędkość fali można wyrazić wzorami:

$$v_1 = \frac{\lambda_1}{T} \quad \text{oraz} \quad v_1 = \frac{\Delta x_{ab}}{\Delta t_{ab}}, \quad \text{skąd wynika, że} \quad \frac{\Delta x_{ab}}{\lambda_1} = \frac{\Delta t_{ab}}{T}$$

Z powyższego wynika, że:

$$\Delta t_{ab} = 9T \quad \rightarrow \quad T = \frac{0{,}07\ \mathrm{ms}}{9} = \frac{7}{9} \cdot 10^{-2}\ \mathrm{ms} = 0,(7) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{ms}$$

Zatem:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{9}{7} \cdot 10^5\ \mathrm{Hz} \approx 1{,}29 \cdot 10^5\ \mathrm{Hz} = 129\ \mathrm{kHz}$$

Zadanie 4.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. X.2) posługuje się pojęciem natężenia fali wraz z jej jednostką ($\mathrm{W/m^2}$) oraz proporcjonalnością do kwadratu amplitudy.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Komentarz do rozwiązania zadania 4.2.
Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy $I \propto A^2$. We wstępie do zadania napisano, że fala ma ustaloną amplitudę (tzn. każdy punkt ośrodka O_1 wykonuje drgania z taką samą amplitudą). To oznacza, że w każdym punkcie ośrodka natężenie fali jest takie samo.

Zadanie 4.3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. X.1) analizuje rozchodzenie się fal na powierzchni wody i dźwięku w powietrzu na podstawie obrazu powierzchni falowych; X.8) opisuje jakościowo związek między dyfrakcją na szczelinie a szerokością szczeliny i długością fali; X.18.b) doświadczalnie: obserwuje zjawisko dyfrakcji fali na szczelinie.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 4.4. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: VIII.4) (SP) posługuje się pojęciami amplitudy, okresu, częstotliwości, długości fali i prędkości rozchodzenia się fali do opisu fal oraz stosuje do obliczeń związki między tymi wielkościami wraz z ich jednostkami. I.7) wyodrębnia z […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. X.1) analizuje rozchodzenie się fal na powierzchni wody i dźwięku w powietrzu na podstawie obrazu powierzchni falowych; X.6) stosuje prawo odbicia i prawo załamania fal na granicy dwóch ośrodków […].

Zasady oceniania
Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek K – poprawne dorysowanie kierunku biegu fali $\mathcal{F}$ w ośrodku $\mathcal{O}_2$, tzn. dorysowanie prostej, będącej kontynuacją linii k w ośrodku $\mathcal{O}_2$, w obszarze między liniami przerywanymi znajdującymi się w ośrodku $\mathcal{O}_2$.

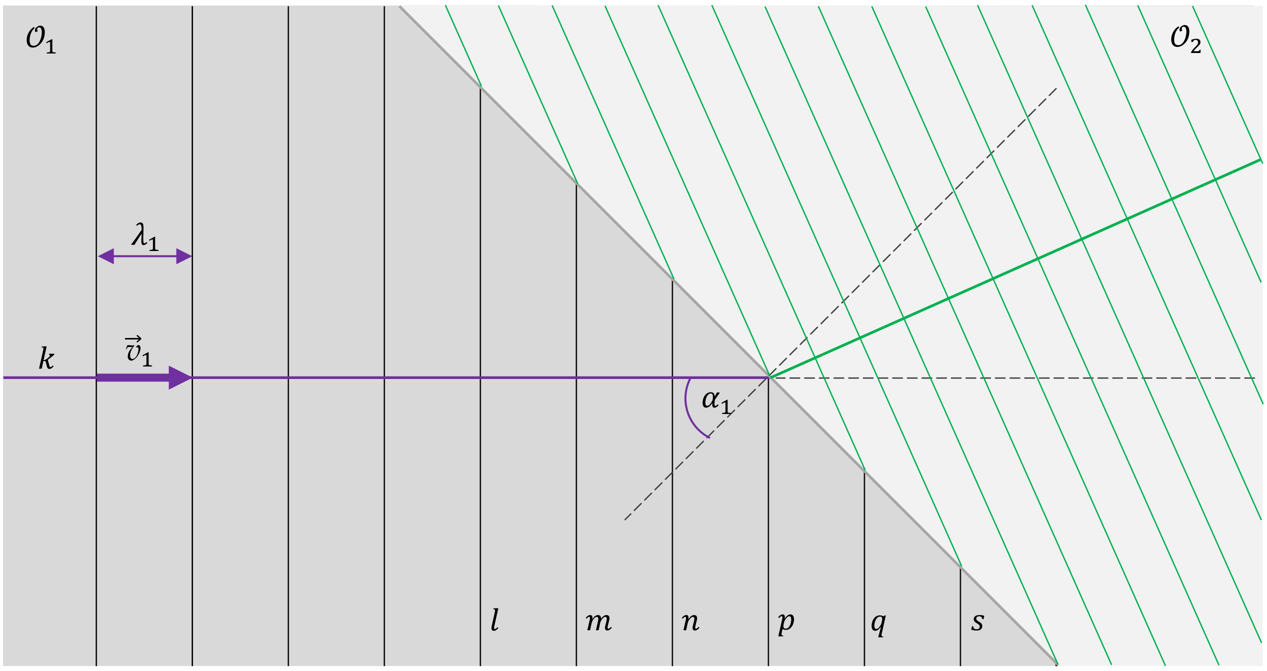
Warunek IDF – wpisanie prawidłowej wartości ilorazu długości fal: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$

Warunek PF – poprawne dorysowanie powierzchni falowych fali $\mathcal{F}$ w ośrodku $\mathcal{O}_2$, tzn. dorysowanie prostych będących kontynuacjami w ośrodku $\mathcal{O}_2$ co najmniej trzech linii spośród l, m, n, p, q, s (odchylonych w lewo względem nich).

Uwaga! Ten warunek może być spełniony także bez narysowanego kierunku rozchodzenia się fali w ośrodku $\mathcal{O}_2$ (wystarczy narysowanie samych linii będących kontynuacjami l, m, n, p, q, s, które w $\mathcal{O}_2$ odchylają się w lewo).

Schemat punktowania
3 pkt – spełnienie trzech warunków: **K oraz IDF oraz PF**.
2 pkt – spełnienie dwóch warunków: (**K oraz IDF**) **albo** (**K oraz PF**) **albo** (**IDF oraz PF**).
1 pkt – spełnienie jednego warunku: **K albo IDF albo PF**.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie



$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \ldots 2 \ldots$$

Zadanie 5.1. (0–1)

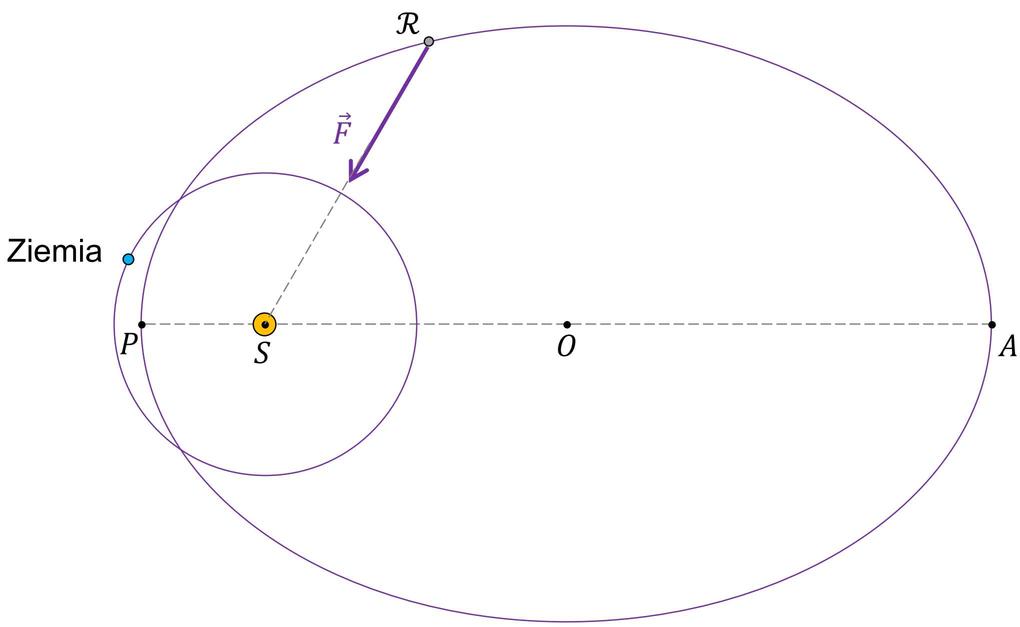
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł.	Zdający: I.6) tworzy […] rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu […]. II.10) (SP) stosuje pojęcie siły jako wielkości opisującej oddziaływanie na ciało, uwzględnia wektorowy charakter siły – wskazuje wartość, kierunek i zwrot wektora siły oraz ciało, do którego przyłożona jest siła […]. IV.1) posługuje się prawem powszechnego ciążenia do opisu oddziaływania grawitacyjnego; wskazuje siłę grawitacji jako przyczynę spadania ciał; IV.3) analizuje jakościowo wpływ siły grawitacji Słońca na niejednostajny ruch planet po orbitach eliptycznych […].

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne narysowanie wektora siły $\vec{F}$, tzn. narysowanie wektora zaczepionego w $\mathcal{R}$ i skierowanego wzdłuż odcinka $\mathcal{R}S$ w stronę S.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie



Zadanie 5.2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się […] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych; I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; […]. IV.5) […] stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych i eliptycznych.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia okresu obiegu dookoła Słońca planetoidy $\mathcal{R}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego w latach ziemskich: $T_{\mathcal{R}} \approx 4{,}7 \text{ roku}$

1 pkt – zapisanie równania III prawa Keplera (dla planetoidy $\mathcal{R}$ i Ziemi), z uwzględnieniem (np. poprzez oznaczenia lub podanie wartości danych liczbowych) okresów obiegu planetoidy $\mathcal{R}$ i Ziemi dookoła Słońca, półosi wielkiej orbity planetoidy $\mathcal{R}$, promienia orbity Ziemi, **oraz** poprawna metoda wyznaczenia długości półosi wielkiej orbity planetoidy $\mathcal{R}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(\frac{T_{\mathcal{R}}^2}{a_{\mathcal{R}}^3} = \frac{T_Z^2}{a_Z^3} \quad \text{albo} \quad \frac{T_{\mathcal{R}}^2}{a_{\mathcal{R}}^3} = \frac{(1\ \text{rok})^2}{(1\ \text{au})^3}\right) \quad \text{oraz} \quad \left(a_{\mathcal{R}} = \frac{|PA|}{2} \quad \text{albo oznaczenie } a_{\mathcal{R}} \text{ na osi}\right)$$

LUB

– (dotyczy rozwiązania sposobem 2.) powołanie się na równość okresów obiegu dookoła Słońca planetoidy $\mathcal{R}$ i ciała $\mathcal{C}$ poruszającego się po orbicie kołowej o promieniu równym $r_{\mathcal{C}} = a_{\mathcal{R}}$ **oraz** zapisanie relacji identyfikującej siłę grawitacji działającą na ciało $\mathcal{C}$ jako siłę dośrodkową (lub relacji identyfikującej przyśpieszenie dośrodkowe jako przyśpieszenie grawitacyjne), **oraz** uwzględnienie wzorów na te siły (lub przyśpieszenia) **oraz** uwzględnienie wzoru na prędkość liniową (lub kątową), np. zapisy równoważne poniższym:

$$(r_{\mathcal{C}} = a_{\mathcal{R}} \quad \text{oraz} \quad T_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{R}}) \quad \text{oraz} \quad \frac{m_{\mathcal{R}} v^2}{r_{\mathcal{C}}} = \frac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_{\mathcal{C}}^2} \quad \text{oraz} \quad v = \frac{2\pi r_{\mathcal{C}}}{T_{\mathcal{C}}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie III prawa Keplera)

Planetoida $\mathcal{R}$ oraz Ziemia obiegają wspólne centrum grawitacyjne – Słońce. Do obliczenia okresu obiegu planetoidy $\mathcal{R}$ dookoła Słońca wykorzystamy III prawo Keplera:

$$\frac{T_{\mathcal{R}}^2}{a_{\mathcal{R}}^3} = \frac{T_Z^2}{a_Z^3} \quad \rightarrow \quad T_{\mathcal{R}} = \sqrt{\left(\frac{a_{\mathcal{R}}}{a_Z}\right)^3} \cdot T_Z$$

gdzie $a_{\mathcal{R}}$ jest długością półosi wielkiej orbity planetoidy $\mathcal{R}$, a_Z jest promieniem orbity Ziemi, $T_{\mathcal{R}}$ i T_Z są okresami obiegu planetoidy $\mathcal{R}$ i Ziemi dookoła Słońca.

Wyznaczymy $a_{\mathcal{R}}$:

$$a_{\mathcal{R}} = \frac{|PA|}{2} = 2{,}81\ \mathrm{au}$$

Podstawimy dane do równania wynikającego z III prawa Keplera:

$$T_{\mathcal{R}} = \sqrt{\left(\frac{2{,}81\ \mathrm{au}}{1\ \mathrm{au}}\right)^3} \cdot 1\ \mathrm{rok} \approx 4{,}7\ \mathrm{roku}$$

Sposób 2. (zastosowanie zasad dynamiki w ruchu po okręgu)

Uwaga! Poniżej przedstawiony sposób rozwiązania jest prawidłowy, jednak nie jest rekomendowany dla tego zadania, ponieważ nie jest optymalny (ze względu na użycie większej liczby zależności i konieczność przeliczenia na lata ziemskie).

Wykorzystamy metodę zastępczej orbity kołowej dla eliptycznej orbity planetoidy $\mathcal{R}$.
Rozważmy ciało $\mathcal{C}$ poruszające się po orbicie kołowej o takim promieniu $r_{\mathcal{C}}$, który jest równy długości półosi wielkiej orbity eliptycznej planetoidy $\mathcal{R}$:

$$r_{\mathcal{C}} = a_{\mathcal{R}} \qquad \rightarrow \qquad r_{\mathcal{C}} = 2{,}81\ \mathrm{au}$$

Zgodnie z III prawem Keplera dla orbit kołowych i eliptycznych, okres obiegu ciała $\mathcal{C}$ dookoła Słońca jest równy okresowi obiegu planetoidy $\mathcal{R}$ dookoła Słońca:

$$T_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{R}}$$

Przy takim założeniu obliczymy $T_{\mathcal{C}}$ z wykorzystaniem II zasady dynamiki dla ruchu po okręgu.
Funkcję siły dośrodkowej działającej na ciało $\mathcal{C}$ pełni siła grawitacji pochodząca od Słońca:

$$m_{\mathcal{C}}\left(\frac{2\pi}{T_{\mathcal{C}}}\right)^2 r_{\mathcal{C}} = \frac{GM_S m_{\mathcal{C}}}{r_{\mathcal{C}}^2} \qquad \rightarrow \qquad T_{\mathcal{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{{r_{\mathcal{C}}}^3}{GM_S}}$$

$$T_{\mathcal{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{(2{,}81 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}} \approx 14{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{s}$$

$$T_{\mathcal{R}} = T_{\mathcal{C}} = 14{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{s}$$

Wynik wyrazimy w latach ziemskich:

$$T_R \approx \frac{14{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{s}}{3{,}65 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{2+1+3}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{rok}}} \approx 4{,}7\ \mathrm{roku}$$

Zadanie 5.3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych […].	Zdający: I.6) tworzy […] rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk […]. II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał. IV.1) posługuje się prawem powszechnego ciążenia do opisu oddziaływania grawitacyjnego; wskazuje siłę grawitacji jako przyczynę spadania ciał.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 5.4. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu […]. III.6) posługuje się pojęciem momentu pędu punktu materialnego […]; III.7) stosuje zasadę zachowania momentu pędu. IV.6) interpretuje II prawo Keplera jako konsekwencję zasady zachowania momentu pędu. ALBO II.20) […] wykorzystuje […] zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń. IV.7) oblicza zmiany energii potencjalnej grawitacji i stosuje zasadę zachowania energii do ruchu pod wpływem siły grawitacji.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie aphelium **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $v_A \approx 7{,}3\ \mathrm{km/s}$

2 pkt – zapisanie równości momentów pędu (względem środka Słońca) planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach A (aphelium) i P (peryhelium) orbity **oraz** uwzględnienie w tym równaniu prędkości planetoidy w punktach A, P i odległości od środka Słońca do punktów A, P, **oraz** prawidłowe wyznaczenie odległości od środka Słońca do punktu A, np. zapisy równoważne poniższym:

$m_{\mathcal{R}} v_A r_A = m_{\mathcal{R}} v_P r_P$ oraz $r_A = |PA| - r_P$

albo w jednym równaniu

$v_A(|PA| - r_P) = v_P r_P$

1 pkt – zapisanie równości momentów pędu (względem środka Słońca) planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach A (aphelium) i P (peryhelium) orbity **oraz** uwzględnienie w tym równaniu prędkości planetoidy w punktach A, P i odległości od środka Słońca do punktów A, P, np. zapisy równoważne poniższym:

$m_{\mathcal{R}} v_A r_A = m_{\mathcal{R}} v_P r_P$

LUB

– poprawna metoda obliczenia odległości od środka Słońca do punktu A (aphelium) orbity planetoidy $\mathcal{R}$ **oraz** wyznaczenie tej odległości (na symbolach lub liczbach), np. zapisy równoważne poniższym:

$(|PA| = r_P + r_A \quad \rightarrow \quad r_A = |PA| - r_P)$ albo $r_A = 5{,}62\ \mathrm{au} - 0{,}81\ \mathrm{au} = 4{,}81\ \mathrm{au}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 2.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie aphelium **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $v_A \approx 7{,}3\ \mathrm{km/s}$

2 pkt – zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania energii mechanicznej **oraz** zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania momentu pędu dla planetoidy $\mathcal{R}$ (tzn. przyrównanie energii mechanicznych oraz momentów pędu planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach P i A), **oraz** wykorzystanie wzorów na energie mechaniczne i momenty pędu w punktach P i A, **oraz** poprawne wyprowadzenie wzoru na wartość prędkości planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie A, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\begin{cases} \dfrac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \dfrac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \dfrac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \dfrac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_A} \\ m_{\mathcal{R}} v_P r_P = m_{\mathcal{R}} v_A r_A \end{cases} \quad \rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2GM_S}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_P}{r_A}}$$

LUB

– bezpośrednie zapisanie wzoru na prędkość planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie A orbity **oraz** prawidłowe wyznaczenie odległości od środka Słońca do punktu A, np. zapisy równoważne poniższym:

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM_S}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_P}{r_A}} \quad \rightarrow \quad r_A = |PA| - r_P$$

1 pkt – zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania energii mechanicznej **oraz** zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania momentu pędu planetoidy $\mathcal{R}$ (tzn. przyrównanie energii mechanicznych oraz momentów pędu planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach P i A), np. zapisy równoważne poniższym:

$E_P = E_A$ oraz $L_P = L_A$

LUB

– bezpośrednie zapisanie wzoru (bez wyprowadzenia) na prędkość planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie A orbity, np. zapisy równoważne poniższym:

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM_S}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_P}{r_A}}$$

LUB

– poprawna metoda obliczenia odległości od środka Słońca do punktu A (aphelium) orbity planetoidy $\mathcal{R}$ **oraz** wyznaczenie tej odległości (na symbolach lub liczbach), np. zapisy równoważne poniższym:

$(|PA| = r_P + r_A \quad \rightarrow \quad r_A = |PA| - r_P)$ albo $r_A = 5{,}62\ \text{au} - 0{,}81\ \text{au} = 4{,}81\ \text{au}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 3.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie aphelium **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $v_A \approx 7{,}3\ \text{km/s}$

2 pkt – zapisanie równości energii mechanicznych planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach A (aphelium) i P (peryhelium) orbity **oraz** uwzględnienie w wyrażeniu na energię mechaniczną <u>wzorów</u> na energię potencjalną i na energię kinetyczną, **oraz** prawidłowe wyznaczenie odległości od środka Słońca do punktu A, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \frac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_A} \qquad \text{oraz} \qquad r_A = |PA| - r_P$$

albo w jednym równaniu

$$\frac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \frac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{|PA| - r_P}$$

1 pkt – zapisanie równości energii mechanicznych planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach A (aphelium) i P (peryhelium) orbity **oraz** uwzględnienie w wyrażeniu na energię mechaniczną energii potencjalnej i energii kinetycznej (wystarczy poprzez oznaczenie), np. zapisy równoważne poniższym:

$E_{A\,kin} + E_{A\,pot} = E_{P\,kin} + E_{P\,pot}$

LUB

– poprawna metoda obliczenia odległości od środka Słońca do punktu A (aphelium) orbity planetoidy $\mathcal{R}$ **oraz** wyznaczenie tej odległości (na symbolach lub liczbach), np. zapisy równoważne poniższym:

$(|PA| = r_P + r_A \quad \rightarrow \quad r_A = |PA| - r_P)$ albo $r_A = 5{,}62\ \text{au} - 0{,}81\ \text{au} = 4{,}81\ \text{au}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasady zachowania momentu pędu)
Wykorzystamy zasadę zachowania momentu pędu planetoidy $\mathcal{R}$ względem punktu centrum grawitacyjnego. Moment pędu planetoidy w punkcie perycentrum jest równy momentowi pędu planetoidy w punkcie apocentrum:

$$L_A = L_P$$

Wykorzystamy wzór na moment pędu. Prędkości planetoidy w punktach apocentrum i perycentrum są prostopadłe do promienia wodzącego, zatem:

$$m_{\mathcal{R}} v_A r_A = m_{\mathcal{R}} v_P r_P \qquad \rightarrow \qquad v_A r_A = v_P r_P$$

$$v_A = \frac{r_P}{r_A} v_P$$

Wyznaczymy r_A:

$$r_A + r_P = |PA| \qquad \rightarrow \qquad r_A = |PA| - r_P = 5{,}62 \text{ au} - 0{,}81 \text{ au} = 4{,}81 \text{ au}$$

Podstawimy dane liczbowe do wzoru na v_A:

$$v_A = \frac{0{,}81 \text{ au}}{4{,}81 \text{ au}} \cdot 43{,}29 \ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 7{,}29 \ \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 7{,}3 \ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Sposób 2. (wyprowadzenie wzoru z zasad zachowania)
Uwaga! Poniżej przedstawiony sposób nie jest rekomendowany dla tego zadania, ponieważ nie wykorzystuje v_P i wymaga więcej rachunków algebraicznych oraz liczbowych niż sposób 1. Ten sposób byłby konieczny, gdyby w zadaniu nie była podana prędkość v_P.

Obliczymy wartość v_A prędkości, jaką ma planetoida $\mathcal{R}$ w punkcie A orbity. Wykorzystamy zasadę zachowania energii mechanicznej oraz zasadę zachowania momentu pędu dla planetoidy $\mathcal{R}$. Przyrównamy te wielkości w punktach P i A orbity eliptycznej:

$$\begin{cases} E_P = E_A \\ L_P = L_A \end{cases}$$

Do powyższego układu równań podstawimy odpowiednie wzory na energię mechaniczną i moment pędu, następnie przekształcimy układ równań i wyznaczymy v_A:

$$\begin{cases} \dfrac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \dfrac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \dfrac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \dfrac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_A} \\ m_{\mathcal{R}} v_P r_P = m_{\mathcal{R}} v_A r_A \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} v_P^2 - \dfrac{2 G M_S}{r_P} = v_A^2 - \dfrac{2 G M_S}{r_A} \\ v_P = \dfrac{r_A}{r_P} v_A \end{cases}$$

$$v_A^2 - \left(\frac{r_A}{r_P}\right)^2 v_A^2 = \frac{2 G M_S}{r_A} - \frac{2 G M_S}{r_P}$$

$$v_A^2 \left(1 - \left(\frac{r_A}{r_P}\right)^2\right) = 2 G M_S \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right)$$

$$v_A^2 \left(\frac{r_P^2 - r_A^2}{r_P^2}\right) = 2 G M_S \left(\frac{r_P - r_A}{r_A r_P}\right)$$

$$v_A^2 \left(\frac{r_P + r_A}{r_P}\right) = 2 G M_S \left(\frac{1}{r_A}\right)$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM_S}{(r_P + r_A)} \cdot \frac{r_P}{r_A}} = \sqrt{\frac{GM_S}{\frac{|PA|}{2}} \cdot \frac{r_P}{|PA| - r_P}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}{2{,}81 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}} \cdot \frac{0{,}81\ \mathrm{au}}{4{,}81\ \mathrm{au}}} \approx 7{,}29 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 7{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Sposób 3. (zastosowanie zasady zachowania energii mechanicznej)

Uwaga! Poniżej przedstawiony sposób nie jest rekomendowany dla tego zadania, ponieważ nie jest optymalny – wymaga więcej rachunków liczbowych niż sposób 1.

Obliczymy wartość v_A prędkości, jaką ma planetoida $\mathcal{R}$ w punkcie A orbity. Wykorzystamy zasadę zachowania energii mechanicznej dla planetoidy $\mathcal{R}$. Przyrównamy energie mechaniczne w punktach P i A orbity eliptycznej oraz uwzględnimy w energii mechanicznej energię kinetyczną i energię potencjalną:

$$E_P = E_A \qquad \text{czyli} \qquad E_{P\,kin} + E_{P\,pot} = E_{A\,kin} + E_{A\,pot}$$

Do powyższego równania podstawimy odpowiednie wzory i wyznaczymy v_A:

$$\frac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \frac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_A}$$

$$v_P^2 - \frac{2GM_S}{r_P} = v_A^2 - \frac{2GM_S}{r_A}$$

$$v_A = \sqrt{v_P^2 - \frac{2GM_S}{r_P} + \frac{2GM_S}{r_A}} = \sqrt{v_P^2 - 2GM_S\left(\frac{r_A - r_P}{r_A r_P}\right)}$$

$$v_A = \sqrt{v_P^2 - 2GM_S \frac{|PA| - 2r_P}{(|PA| - r_P)r_P}}$$

$$v_A = \sqrt{\left(43{,}29\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \frac{4\ \mathrm{au}}{4{,}81 \cdot 0{,}81\ \mathrm{au^2}}}$$

$$v_A = \sqrt{\left(43{,}29\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{30} \frac{4}{4{,}81 \cdot 0{,}81} \cdot \frac{1}{1{,}496 \cdot 10^{11}} \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}}$$

$$v_A \approx \sqrt{1\,874{,}02\ \frac{\mathrm{km^2}}{\mathrm{s^2}} - 1\,821{,}09\ \frac{\mathrm{km^2}}{\mathrm{s^2}}} \approx 7{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Zadanie 6.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników. I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z […] wykresów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]; przedstawia te informacje w różnych postaciach. VI.10) opisuje związek między temperaturą w skali Kelvina a średnią energią ruchu cząsteczek […]; VI.11) analizuje wykresy przemian gazu doskonałego; VI.12) stosuje równanie gazu doskonałego (równanie Clapeyrona) do wyznaczenia parametrów gazu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PP

Komentarz do rozwiązania zadania 6.1. (do pierwszego zdania)
Z równania Clapeyrona wynika, że $T \propto pV$. Z treści zadania i wykresu wynika, że ciśnienie jest wprost proporcjonalne do objętości: $p = kV$ dla pewnego k. Zatem $T \propto kV \cdot V \propto V^2$.

Zadanie 6.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: VI.11) analizuje wykresy przemian gazu doskonałego; VI.12) stosuje równanie gazu doskonałego (równanie Clapeyrona) do wyznaczenia parametrów gazu.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne dokończenie zdania: wpisanie prawidłowej wartości ilorazu temperatur:

$6{,}25$ lub $\frac{25}{4}$

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie

Iloraz temperatur gazu w stanach B i A jest równy $\frac{T_B}{T_A} =$ ...6,25... .

Zadanie 6.3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się […] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych. VI.3) posługuje się pojęciem energii wewnętrznej; analizuje pierwszą zasadę termodynamiki jako zasadę zachowania energii; VI.8) stosuje pierwszą zasadę termodynamiki do analizy przemian gazowych […]; VI.10) opisuje związek między temperaturą w skali Kelvina a […] energią wewnętrzną gazu doskonałego; VI.11) analizuje wykresy przemian gazu doskonałego; VI.12) stosuje równanie gazu doskonałego […] do wyznaczenia parametrów gazu; VI.13) posługuje się pojęciem ciepła molowego gazu […].

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1.)
Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek IZT
Zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany $A \to B$ z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta U_{AB} = |Q_{AB}| - |W_{AB}|$$

Warunek ΔU1
Zapisanie związku między zmianą energii wewnętrznej w przemianie $A \to B$ a przyrostem temperatury, ciepłem molowym przy stałej objętości i liczbą moli, np.:

$$\Delta U_{AB} = n\frac{3}{2}R\Delta T_{AB}$$ (lub zapisy równoważne)

Warunek ΔU2
Skorzystanie ze wzoru na energię wewnętrzną wyrażoną przez objętość i ciśnienie **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na przyrost energii wewnętrznej w przemianie $A \to B$ (wyrażonej przez objętości i ciśnienia w stanach A i B), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(U_A = \frac{3}{2}p_A V_A \quad \text{oraz} \quad U_B = \frac{3}{2}p_B V_B\right) \quad \to \quad \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}\left(p_B V_B - p_A V_A\right)$$

Warunek W
Poprawna metoda obliczenia pracy siły parcia w przemianie $A \to B$ **oraz** podanie prawidłowego wzoru na tę pracę (wyrażoną przez objętości i ciśnienia w stanach A i B), np.:

$$|W_{AB}| = \text{Pole pod } p(V) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A)$$ (lub zapisy równoważne)

Warunek ΔT
Poprawna metoda wyznaczenia przyrostu temperatury w przemianie $A \to B$, tzn. wykorzystanie równań Clapeyrona dla stanów A i B, **oraz** zapisanie prawidłowej postaci przyrostu temperatury (albo przyrostu temperatury z czynnikiem nR), np. zapisy równoważne poniższym:

$$(p_A V_A = nRT_A \quad \text{oraz} \quad p_B V_B = nRT_B) \quad \to \quad nR\Delta T_{AB} = p_B V_B - p_A V_A$$

Schemat punktowania (dla rozwiązania sposobem 1.)
4 pkt – poprawna metoda obliczenia ciepła pobranego w przemianie $A \to B$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $Q_{AB} = 2\,100$ J
3 pkt – spełnienie warunków: **IZT oraz W oraz ΔU1 oraz ΔT**
LUB
– spełnienie warunków: **IZT oraz W oraz ΔU2**
2 pkt – spełnienie warunków: **IZT oraz ΔU1**
LUB
– spełnienie warunków: **IZT oraz W**
LUB
– spełnienie warunków: **ΔU1 oraz W**
LUB
– spełnienie warunków: **(ΔU1 oraz ΔT)** albo **ΔU2**
1 pkt – spełnienie warunku **IZT**
LUB
– spełnienie warunku **ΔU1**
LUB
– spełnienie warunku **W**
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobami 2A i 2B i podobnymi)
4 pkt – poprawna metoda obliczenia ciepła pobranego w przemianie $A \to B$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $Q_{AB} = 2\,100$ J
3 pkt – założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemian izochorycznej i izobarycznej (jak w obu warunkach za 1 pkt) **oraz** poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla cyklu **oraz** poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} i ciepła Q_{CA} **oraz** poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu
LUB
– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ **oraz** poprawna metoda obliczenia ΔU_{AX} i ΔU_{XB} **oraz** zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany $A \to B$ z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie).

2 pkt – założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemian izochorycznej i izobarycznej (jak w obu warunkach za 1 pkt) **oraz**
- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla odpowiedniego cyklu, **oraz** poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA}
ALBO

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla odpowiedniego cyklu **oraz** poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA} **oraz** poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} oraz ciepła Q_{CA}

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ **oraz** poprawna metoda obliczenia ΔU_{AX} albo ΔU_{XB}

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ **oraz** zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany $A \to B$ z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie).

1 pkt – założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemiany izochorycznej $B \to C$ i przemiany izobarycznej $C \to A$ **oraz**

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla cyklu, np.:
  $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| - |W_{ABC}|$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA}, np.:
  $$|Q_{BC}| = \frac{3}{2} nR\Delta T_{BC} \qquad \text{albo} \qquad |Q_{CA}| = \frac{5}{2} nR\Delta T_{CA}$$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu, np.:
  $$|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A)$$

LUB

– założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemiany izobarycznej $B \to C$ i przemiany izochorycznej $C \to A$ **oraz**

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla cyklu, np.:
  $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| + |W_{ABC}|$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA}, np.:
  $$|Q_{BC}| = \frac{5}{2} nR\Delta T_{BC} \qquad \text{albo} \qquad |Q_{CA}| = \frac{3}{2} nR\Delta T_{CA}$$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu, np.:
  $$|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A)$$

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek: $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (optymalny, z wykorzystaniem IZT i bezpośrednim obliczeniem ΔU_{AB})
Zapiszemy I zasadę termodynamiki dla przemiany termodynamicznej $A \rightarrow B$. Zastosujemy konwencję znaków, zgodnie z którą, gdy gaz pobiera energię w formie pracy lub ciepła, to wielkości te oznaczamy jako dodatnie, a gdy traci energię w postaci pracy lub ciepła, to wielkości te oznaczamy jako ujemne. Gaz się rozpręża, więc traci energię w formie pracy i jednocześnie pobiera energię w formie ciepła. Zatem:

$$1)\ \ \Delta U_{AB} = |Q_{AB}| - |W_{AB}| \quad \rightarrow \quad 1a)\ \ |Q_{AB}| = \Delta U_{AB} + |W_{AB}|$$

Do wyznaczenia zmiany energii wewnętrznej wykorzystamy związek między energią wewnętrzną a temperaturą:

$$2)\ \ \Delta U_{AB} = nC_V\Delta T_{AB} \quad \rightarrow \quad 2a)\ \ \Delta U_{AB} = n\frac{3}{2}R\Delta T_{AB}$$

Przyrost temperatury określimy na podstawie równań Clapeyrona dla stanów A i B:

$$3)\ \ p_AV_A = nRT_A \quad \text{oraz} \quad p_BV_B = nRT_B \quad \rightarrow$$

$$4)\ \ nR\Delta T_{AB} = nRT_B - nRT_A = p_BV_B - p_AV_A$$

Równanie 4) wykorzystamy w równaniu 2a):

$$5)\ \ \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}(p_BV_B - p_AV_A) = 1\,575\ \mathrm{J}$$

Do wyznaczenia pracy w przemianie $A \rightarrow B$ zastosujemy następujący lemat: praca w przemianie termodynamicznej jest równa polu pod wykresem zależności $p(V)$ dla danej przemiany. Zatem:

$$6)\ \ |W_{AB}| = \text{Pole pod } p(V) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) = 525\ \mathrm{J}$$

Wzory 5) oraz 6) wykorzystamy we wzorze 1a):

$$7)\ \ |Q_{AB}| = \frac{3}{2}(p_BV_B - p_AV_A) + \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A)$$

Do powyższego wzoru podstawimy dane liczbowe i wykonamy obliczenia:

$$8a)\ \ |Q_{AB}| = \left(\frac{3}{2}\cdot(5\cdot 25 - 2\cdot 10) + \frac{1}{2}\cdot(2+5)(25-10)\right)\cdot 10^1\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$8b)\ \ |Q_{AB}| = (157{,}5 + 52{,}5)\cdot 10^1\ \mathrm{J} = 2\,100\ \mathrm{J}$$

Sposób 2A.
Rozważmy taki cykl przemian $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, w którym:

- przemiana $A \rightarrow B$ to przemiana opisana w zadaniu
- przemiana $B \rightarrow C$ jest izochoryczna, gdzie $V_C = V_B = 25\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ oraz $p_A \leq p \leq p_B$
- przemiana $C \rightarrow A$ jest izobaryczna, gdzie $p_C = p_A = 2\cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$ oraz $V_A \leq V \leq V_B$.

W przemianie $A \rightarrow B$ gaz pobiera ciepło Q_{AB} z grzejnicy, w przemianie $B \rightarrow C$ gaz oddaje ciepło Q_{BC} do chłodnicy, w przemianie $C \rightarrow A$ gaz oddaje ciepło Q_{CA} do chłodnicy. Pracę całkowitą wykonaną przez siłę parcia w całym cyklu oznaczymy jako W_{ABC}. Zmiana energii wewnętrznej w całym cyklu wynosi zero, zatem na mocy I zasady termodynamiki mamy:

$$1)\ \ 0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| - |W_{ABC}| \qquad \text{zatem}$$

$$2)\ \ |Q_{AB}| = |W_{ABC}| + |Q_{BC}| + |Q_{CA}|$$

Obliczymy pracę jako pole obszaru ograniczonego figurą wykresu:

$$3)\ \ |W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A) = \frac{1}{2} \cdot (5-2) \cdot (25-10)\ 10^1\ \mathrm{J} = \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$$

Obliczymy Q_{BC}, wykorzystamy przy tym równanie Clapeyrona:

$$4)\ \ |Q_{BC}| = \frac{3}{2}nR\Delta T_{BC} = \frac{3}{2}\Delta p_{BC}V_C = \frac{3}{2}(p_B - p_A)V_B = \frac{3}{2} \cdot (5-2) \cdot 25 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = \frac{225}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$$

Podobnie obliczymy Q_{CA}:

$$5)\ \ |Q_{CA}| = \frac{5}{2}nR\Delta T_{CA} = \frac{5}{2}p_C\Delta V_{CA} = \frac{5}{2}p_A(V_B - V_A) = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot (25-10) \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 75 \cdot 10^1\ \mathrm{J}$$

Wyniki z równań 3) i 4) i 5) podstawiamy do równania 2):

$$6)\ \ |Q_{AB}| = \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} + \frac{225}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} + 75 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 210 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 2\,100\ \mathrm{J}$$

Sposób 2B.

Rozważmy taki cykl przemian $A \to B \to C \to A$, w którym:

- przemiana $A \to B$ to przemiana opisana w zadaniu
- przemiana $B \to C$ jest izobaryczna, gdzie $p_C = p_B = 5 \cdot 10^4$ Pa oraz $V_A \leq V \leq V_B$
- przemiana $C \to A$ jest izochoryczna, gdzie $V_C = V_A = 10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ oraz $p_A \leq p \leq p_B$.

W przemianie $A \to B$ gaz pobiera ciepło Q_{AB} z grzejnicy, w przemianie $B \to C$ gaz oddaje ciepło Q_{BC} do chłodnicy, w przemianie $C \to A$ gaz oddaje ciepło Q_{CA} do chłodnicy. Kierunek cyklu odpowiada pompie cieplnej. Pracę całkowitą przeciwko sile parcia w całym cyklu oznaczymy jako W_{ABC}. Zmiana energii wewnętrznej w całym cyklu wynosi zero, zatem na mocy I zasady termodynamiki mamy:

$$1)\ \ 0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| + |W_{ABC}|$$

zatem:

$$2)\ \ |Q_{AB}| = |Q_{BC}| + |Q_{CA}| - |W_{ABC}|$$

Obliczymy pracę jako pole obszaru ograniczonego figurą wykresu:

$$3)\ \ |W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A) = \frac{1}{2} \cdot (5-2) \cdot (25-10)\ 10^1\ \mathrm{J} = \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$$

Obliczymy Q_{BC}, wykorzystamy przy tym równanie Clapeyrona:

$$4)\ \ |Q_{BC}| = \frac{5}{2}nR\Delta T_{BC} = \frac{5}{2}p_C\Delta V_{BC} = \frac{5}{2}p_B(V_B - V_A) = \frac{5}{2} \cdot 5 \cdot (25-10) \cdot 10^1\ \mathrm{J} = \frac{375}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$$

Podobnie obliczymy Q_{CA}:

$$5)\ \ |Q_{CA}| = \frac{3}{2}nR\Delta T_{CA} = \frac{3}{2}\Delta p_{CA}V_A = \frac{3}{2}(p_B - p_A)V_A = \frac{3}{2} \cdot (5-2) \cdot 10 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 45 \cdot 10^1\ \mathrm{J}$$

Wyniki z równań 3) i 4) i 5) podstawiamy do równania 2):

$$6)\ \ |Q_{AB}| = \frac{375}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} + 45 \cdot 10^1\ \mathrm{J} - \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 210 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 2\,100\ \mathrm{J}$$

Inne, podobne sposoby rozwiązania
Zadanie można rozwiązać sposobem, w którym zmianę energii wewnętrznej ΔU_{AB} oblicza się jako sumę zmian energii wewnętrznych $\Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ w przemianach $A \rightarrow X$ (izobarycznej lub izochorycznej) oraz $X \rightarrow B$ (izochorycznej lub izobarycznej). Ten sposób niepotrzebnie wydłuża obliczenie zmiany energii wewnętrznej ΔU_{AB} (porównaj ze sposobem 1.)

Zadanie 7.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.5) […] wykonuje graficznie działania na wektorach (dodawanie […]); I.7) wyodrębnia z tekstów […], rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. II.12) wyznacza graficznie siłę wypadkową dla sił działających w dowolnych kierunkach na płaszczyźnie. VII.2) oblicza wartość siły wzajemnego oddziaływania ładunków, stosując prawo Coulomba.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 7.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.5) […] wykonuje graficznie działania na wektorach (dodawanie […]); I.7) wyodrębnia z tekstów […], rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. VII.3) posługuje się wektorem natężenia pola elektrycznego wraz z jego jednostką […]; VII.4) analizuje natężenie pola wytwarzanego przez układ ładunków punktowych i oblicza jego wartość.

Zasady oceniania
Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek Ei (dla i=1 albo i=2, albo i=3 będą to – odpowiednio – warunki **E1** albo **E2**, albo **E3**)
Poprawna metoda wyznaczenia wartości E_1 albo E_2, albo E_3 natężeń wektorów pól elektrycznych pochodzących – odpowiednio – od ładunków Q_1 albo Q_2, albo Q_3 **oraz** podanie prawidłowej postaci wzoru na wartość E_i natężenia pola od ładunku Q_i w zależności tylko od a, od Q i od odpowiedniej stałej fizycznej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_1 = \frac{kQ}{a^2} \quad \textbf{albo} \quad E_3 = \frac{kQ}{a^2} \quad \textbf{albo} \quad E_2 = \frac{kQ}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{kQ}{a^2}$$

Warunek E1=E3
Zapisanie zależności (równości) między wartościami E_1 i E_3 natężeń wektorów pól elektrycznych pochodzących od ładunków Q_1 i Q_3, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_1 = E_3$$

Warunek E1=2E2
Zapisanie zależności między wartościami E_1 i E_2 (albo E_3 i E_2) natężeń pól elektrycznych pochodzących od ładunków Q_1 i Q_2 (albo Q_3 i Q_2), np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_1 = 2E_2 \quad \textbf{albo} \quad E_3 = 2E_2$$

Warunek E13
Zapisanie zależności między wartością E_{13} wypadkowego natężenia pola elektrycznego pochodzącego od ładunków Q_1 i Q_3 a wartością E_1 (lub E_3) natężenia pola pochodzącego od ładunku Q_1 (lub Q_3) **albo** podanie prawidłowej postaci wzoru na wartość E_{13} w zależności tylko od a, od Q i od odpowiedniej stałej fizycznej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(E_{13} = \sqrt{2}E_1 \quad \text{lub} \quad E_{13} = \sqrt{2}E_3\right) \quad \textbf{albo} \quad E_{13} = \sqrt{2} \cdot \frac{kQ}{a^2}$$

Warunek EP-metoda
Zapisanie zależności między wartościami E_P a E_{13} i E_2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_P = E_{13} - E_2$$

Schemat punktowania

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości E_P natężenia pola elektrycznego w punkcie P **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru: $E_P = \frac{kQ}{a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$

3 pkt – spełnienie warunków: **EP-metoda oraz E13 oraz (E1=2E2 albo E2)**
LUB
– spełnienie warunków: **E13 oraz E2 oraz** wskazanie (np. na rysunku lub zapisem słownym lub algebraicznym), że wektory $\vec{E}_{13}$ i $\vec{E}_2$ leżą na jednej prostej (mogą mieć nieprawidłowe zwroty).

2 pkt – spełnienie warunku **E13**
LUB
– spełnienie warunku **EP-metoda oraz (E1=2E2 albo E2)**
LUB
– spełnienie warunków **Ei** dla **i=1 oraz i=2 oraz i=3**
LUB
– spełnienie warunków: **E1=E3 oraz E1=2E2**

1 pkt – spełnienie warunku **Ei** (tzn. dla jednego <u>dowolnego</u> **i**)

LUB

– spełnienie warunku **E1=E3**

LUB

– spełnienie warunku **E1=2E2**

LUB

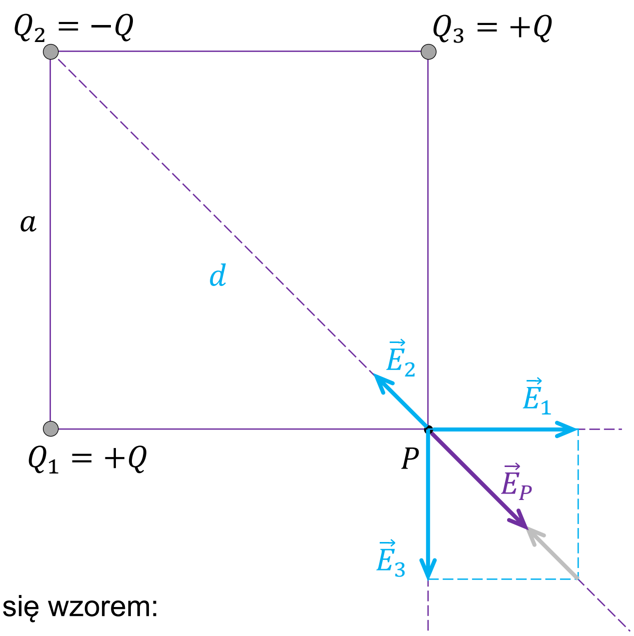
– spełnienie warunku **EP-metoda**

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}_P$ jest wektorową sumą wektorów natężeń $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ i $\vec{E}_3$, pochodzących – odpowiednio – od ładunków: Q_1, Q_2 i Q_3.

Rysunek pomocniczy



Zapiszemy wektorowo:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}_{13} + \vec{E}_2$$

gdzie $\vec{E}_{13}$ jest sumą wektorów $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_3$.

Na rysunku obok przedstawiono wektory $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ i $\vec{E}_3$ oraz geometryczny sposób wyznaczenia wektora $\vec{E}_P$.

Wartość wektora $\vec{E}_P$ wyraża się wzorem:

$$1)\ \ E_P = E_{13} - E_2$$

Wartości wektorów $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_3$ są sobie równe i wyrażają się wzorem:

$$2)\ \ E_1 = E_3 = \frac{kQ}{a^2}$$

Wartość wektora $\vec{E}_{13}$ wyraża się wzorem (długość przekątnej kwadratu o bokach E_1 i E_3):

$$3)\ \ E_{13} = \sqrt{2} \cdot E_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{kQ}{a^2}$$

Wartość wektora $\vec{E}_2$ wyraża się wzorem:

$$4)\ \ E_2 = \frac{kQ}{d^2} = \frac{kQ}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{kQ}{a^2}$$

Wzory 4) i 3) podstawimy do wzoru 1):

$$5)\ E_P = \sqrt{2} \cdot \frac{kQ}{a^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{kQ}{a^2} = \frac{kQ}{a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Zadanie 8.1. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.4) przeprowadza obliczenia liczbowe, posługując się kalkulatorem; I.7) wyodrębnia z tekstów […], rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]; I.18) wyodrębnia zjawisko z kontekstu, nazywa je oraz wskazuje czynniki istotne i nieistotne dla jego przebiegu. X.6) stosuje prawo odbicia i prawo załamania fal na granicy dwóch ośrodków; posługuje się pojęciem współczynnika załamania ośrodka; oblicza kąt graniczny.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia φ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego wyrażonego w stopniach lub w radianach: $\varphi \approx 83{,}6^\circ$ (lub $\varphi \approx 84^\circ$)

2 pkt – zauważenie i zapisanie, że kąt $\angle SBD$ lub $\angle DAS$ jest kątem granicznym dla przejścia światła ze szkła do powietrza, **oraz** zapisanie równania (z uwzględnieniem współczynnika załamania światła w szkle), z którego można obliczyć kąt graniczny dla przejścia światła przez granicę szkło – powietrze, np. zapisy równoważne poniższym:

$\left(\alpha_g = |\angle SBD| \text{ oraz } \dfrac{\sin\alpha_g}{\sin 90^\circ} = \dfrac{n_p}{n_{sz}}\right)$ albo w jednym równaniu: $\sin|\angle SBD| = \dfrac{1}{1{,}5}$

LUB

– zauważenie i zapisanie, że kąt $\angle SBD$ lub $\angle DAS$ jest kątem granicznym dla przejścia światła ze szkła do powietrza, **oraz** wyprowadzenie/zapisanie zależności między α_g a φ, np. zapisy równoważne poniższym:

$\alpha_g = |\angle SBD|$ oraz $\varphi = 2 \cdot |\angle SBD|$ (albo w jednym równaniu: $\varphi = 2 \cdot \alpha_g$)

1 pkt – zauważenie i zapisanie, że kąt $\angle SBD$ lub $\angle DAS$ jest kątem granicznym dla przejścia światła ze szkła do powietrza, np. zapisy równoważne poniższym:

$\alpha_g = |\angle SBD|$ lub $\alpha_g = |\angle DAS|$

LUB

– wyprowadzenie/zapisanie zależności: $\varphi = 2 \cdot |\angle SBD|$

Uwaga! W tym warunku identyfikacja $\angle SBD$ jako kąta granicznego nie jest wymagana.

LUB

– zapisanie równania na kąt graniczny bez identyfikacji lub z błędną identyfikacją tego kąta (oznaczeniem lub na rysunku lub wynikającym dalej z kontekstu) **oraz** uwzględnienie w tym równaniu wartości współczynnika załamania światła w szkle, np.:

$\sin\alpha_g = \dfrac{2}{3}$ (lub zapisy równoważne)

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że skoro światło wysłane z punktu D przechodzi przez fragment kuli oznaczony łukiem AB (na rysunku przekroju kuli), to kąt padania promienia na granicę ośrodków w punkcie B, czyli $\angle SBD$ (lub $\angle DAS$), jest kątem granicznym dla szkła:

$$\alpha_g = |\angle SBD| \quad (\text{lub } \alpha_g = |\angle DAS|)$$

Zastosujemy wzór na kąt graniczny dla przejścia szkło – powietrze:

$$\frac{\sin\alpha_g}{\sin 90°} = \frac{n_p}{n_{sz}} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha_g = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} = 0,(6)$$

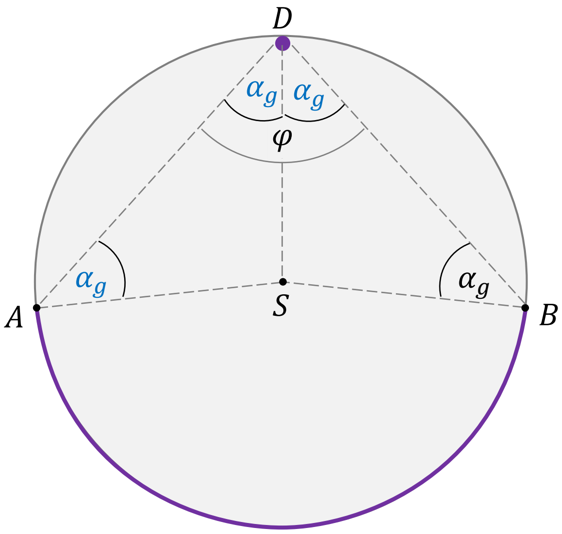
Miarę kąta granicznego obliczymy na kalkulatorze naukowym:

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41{,}8° \quad \rightarrow \quad |\angle SBD| = \alpha_g \approx 41{,}8°$$

Następnie powiążemy kąt $\angle BDA$ (o mierze φ) z kątem granicznym $\angle SBD$ (o mierze α_g) na podstawie elementarnych własności geometrycznych.

Na mocy symetrii zjawiska wiemy, że trójkąty SBD i ASD są przystające. Dalej, z własności trójkątów równoramiennych SBD i ASD, mamy:

$$\left(|\angle SBD| = |\angle BDS| = \alpha_g \text{ oraz } |\angle DAS| = |\angle SDA| = \alpha_g\right) \rightarrow |\angle BDA| = 2\alpha_g$$



Zatem skoro:

$$\left(|\angle BDA| = \varphi \quad \text{oraz} \quad |\angle BDA| = 2\alpha_g\right) \quad \text{to} \quad \varphi = 2\alpha_g$$

Obliczymy φ:

$$\varphi = 2 \cdot 41{,}8° \approx 83{,}6°$$

Zadanie 8.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników. I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów […], rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]; I.18) wyodrębnia zjawisko z kontekstu, nazywa je oraz wskazuje czynniki istotne i nieistotne dla jego przebiegu. X.6) stosuje prawo odbicia i prawo załamania fal na granicy dwóch ośrodków; posługuje się pojęciem współczynnika załamania ośrodka; oblicza kąt graniczny.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B2

Zadanie 9. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.10) identyfikuje siłę wypadkową działającą na ciało w ruchu jednostajnym po okręgu jako siłę dośrodkową; II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał. IX.2) posługuje się pojęciem wektora indukcji magnetycznej wraz z jego jednostką, analizuje oddziaływanie pola magnetycznego na przewodnik […] na poruszającą się cząstkę naładowaną ([…] siła Lorentza); IX.4) analizuje tor cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia okresu **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $T \approx 2{,}10 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$

2 pkt – zapisanie równania identyfikującego siłę Lorentza działającą na elektron jako siłę dośrodkową **oraz** uwzględnienie w tym równaniu wzorów na te siły (z prędkością albo prędkością kątową), **oraz** uwzględnienie/zapisanie związku między prędkością (lub prędkością kątową) a okresem, np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_e \frac{v^2}{r} = qvB \quad \text{oraz} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

albo

$$m_e \omega^2 r = qvB \quad \text{oraz} \quad v = \omega r \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

albo w jednym równaniu

$$m_e \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = q\left(\frac{2\pi r}{T}\right) B$$

1 pkt – zapisanie równania identyfikującego siłę Lorentza działającą na elektron jako siłę dośrodkową, np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_e a_{do} = F_L \quad \text{albo} \quad F_{do} = F_L$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Na elektron poruszający się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym działa siła Lorentza, która jednocześnie pełni funkcję siły dośrodkowej. Zapiszemy równanie II zasady dynamiki identyfikujące siłę Lorentza jako siłę dośrodkową:

$$m_e a_{do} = F_L$$

Zastosujemy wzory na przyśpieszenie dośrodkowe oraz na siłę Lorentza. Wektor prędkości jest prostopadły do wektora indukcji magnetycznej, zatem:

$$m_e \frac{v^2}{r} = qvB \quad \rightarrow \quad m_e \frac{v}{r} = qB$$

Skorzystamy ze związku między okresem a prędkością w ruchu jednostajnym po okręgu:

$$m_e \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)}{r} = qB \quad \rightarrow \quad m_e \left(\frac{2\pi}{T}\right) = qB$$

$$T = \frac{2\pi m_e}{qB}$$

Do otrzymanego wzoru podstawimy dane liczbowe i wartości stałych:

$$T \approx \frac{2 \cdot 3{,}142 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1{,}70 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}} \approx 21{,}0 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C} \cdot \left(\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{C \cdot m}}\right)} = 2{,}10 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

Zadanie 10. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się materiałami pomocniczymi, w tym […] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych; I.15) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zaokrąglony do zadanej liczby cyfr znaczących. XII.2) posługuje się związkiem między energią całkowitą, masą cząstki i jej prędkością; posługuje się pojęciem energii spoczynkowej; XII.3) opisuje równoważność masy i energii spoczynkowej.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu $\frac{v}{c}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego zaokrąglonego do dwóch cyfr znaczących: $v/c \approx 0{,}96$

2 pkt – zapisanie/wykorzystanie związku między energią całkowitą cząstki β^- a jej energią spoczynkową i prędkością **oraz** zapisanie/wykorzystanie związku między energią całkowitą a energią kinetyczną i energią spoczynkową, **oraz** zapisanie jednego równania (zawierającego E_0 oraz E_{kin} oraz $\frac{v}{c}$), z którego można wyznaczyć/obliczyć wartość ilorazu $\frac{v}{c}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = E_{kin} + E_0$$

1 pkt – zapisanie związku między energią całkowitą cząstki β^- a jej masą (albo energią spoczynkową) i prędkością **oraz** zapisanie związku między energią całkowitą a energią kinetyczną i energią spoczynkową, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \text{oraz} \qquad E = E_{kin} + E_0$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapiszemy związek 1) między energią E całkowitą cząstki a jej energią spoczynkową E_0 i energią kinetyczną E_{kin} oraz związek 2) między energią całkowitą cząstki a jej masą i prędkością oraz związek 3) między energią spoczynkową cząstki a jej masą:

$$1)\ \ E = E_{kin} + E_0 \qquad 2)\ \ E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad 3)\ \ E_0 = mc^2$$

Ze wzorów 1) i 2) i 3) wynika:

$$4)\quad \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = E_{kin} + E_0$$

Z równania 4) obliczymy $\frac{v}{c}$.

- Przykładowy sposób 1. prowadzenia dalszego rachunku

Przekształcimy równanie 4) i wyznaczymy iloraz $\frac{v}{c}$ względem E_{kin} i E_0:

$$4a)\quad \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{E_0}{E_{kin}+E_0} \quad \rightarrow \quad 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{E_0}{E_{kin}+E_0}\right)^2$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1-\left(\frac{E_0}{E_{kin}+E_0}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 5)\quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E_{kin}+E_0}\right)^2}$$

Do równania 5) podstawimy dane liczbowe

$$5a)\quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{0{,}511\ \mathrm{MeV}}{1{,}311\ \mathrm{MeV}+0{,}511\ \mathrm{MeV}}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{0{,}511\ \mathrm{MeV}}{1{,}822\ \mathrm{MeV}}\right)^2}$$

$$6)\quad \frac{v}{c} \approx 0{,}96$$

- Przykładowy sposób 2. prowadzenia dalszego rachunku

Do równania 4) podstawimy dane liczbowe i obliczymy iloraz $\frac{v}{c}$:

$$4a)\quad \frac{0{,}511\ \mathrm{MeV}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1{,}311\ \mathrm{MeV}+0{,}511\ \mathrm{MeV} \quad \rightarrow \quad \frac{0{,}511\ \mathrm{MeV}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1{,}822\ \mathrm{MeV}$$

$$5)\quad \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 0{,}280461 \quad \rightarrow \quad 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 0{,}078658 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 0{,}921342$$

$$6)\quad \frac{v}{c} \approx \sqrt{0{,}921342} \approx 0{,}96$$

Zadanie 11.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się […] tablicami fizycznymi i chemicznymi oraz kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych. XII.5) posługuje się pojęciami pierwiastek, jądro atomowe, izotop, proton, neutron, elektron; opisuje skład jądra atomowego na podstawie liczb masowej i atomowej; XII.6) zapisuje reakcje jądrowe, stosując zasadę zachowania liczby nukleonów i zasadę zachowania ładunku; XII.9) […] opisuje rozpady […] beta (β^{+}, β^{-}).

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne uzupełnienie schematu równania rozpadu β^{-} jądra neonu ${}^{23}_{10}\mathrm{Ne}$, tzn. wpisanie właściwych liczb: atomowej i masowej, **oraz** zapisanie symbolu lub nazwy pierwiastka, którego jądro powstaje: ${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$ albo Na albo *sód*

1 pkt – poprawne uzupełnienie schematu równania rozpadu β^{-} jądra neonu ${}^{23}_{10}\mathrm{Ne}$ (tzn. wpisanie właściwych liczb atomowej i masowej powstałego jądra)

LUB

– poprawne zapisanie symbolu lub nazwy pierwiastka X: ${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$ albo Na albo *sód*

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$ {}^{23}_{10}\mathrm{Ne} \rightarrow {}^{23}_{11}\mathrm{X} + \beta^{-} + {}^{0}_{0}\tilde{\nu} $$

symbol (lub nazwa) pierwiastka X: ${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$ albo Na albo *sód*

Zadanie 11.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: XII.3) opisuje równoważność masy i energii spoczynkowej; XII.7) stosuje zasadę zachowania energii do opisu reakcji jądrowych […]; XII.8) oblicza dla dowolnego izotopu energię spoczynkową […]; XII.9) wymienia właściwości promieniowania jądrowego; opisuje rozpady […] beta (β^{+}, β^{-}).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PP

Zadanie 11.3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.4) przeprowadza obliczenia liczbowe, posługując się kalkulatorem; I.7) wyodrębnia z tekstów, […] wykresów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu […]; I.9) dopasowuje prostą do danych przedstawionych w postaci wykresu; interpretuje nachylenie tej prostej i punkty przecięcia z osiami. XII.12) opisuje rozpad izotopu promieniotwórczego; posługuje się pojęciem czasu połowicznego rozpadu; oblicza liczbę jąder izotopu promieniotwórczego, które pozostają w próbce po dowolnym czasie […].

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1a. oraz 1b.)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką, mieszczącego się w przedziale: od $T = 0{,}60$ min do $T = 0{,}65$ min

3 pkt – poprawna metoda obliczenia $\log_{10}\left(\frac{m_0}{2}\right)$ dla $t = T$ **oraz** podanie prawidłowej wartości tego logarytmu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \;\rightarrow\; \log_{10}\left(\frac{1}{2}m_0\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + 1{,}4 \approx 1{,}1 \quad \text{dla } t = T$$

albo (z pośrednim obliczeniem m_0)

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad\rightarrow\quad m_0 = 10^{1{,}4}\ \mathrm{ju} \quad\rightarrow\quad \log_{10}\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{1{,}4}\right) \approx 1{,}1 \text{ dla } t = T$$

LUB

– poprawna metoda obliczenia $\log_{10}\left(\frac{m_0}{2}\right)$ dla $t = T$ **oraz** podanie błędnej wartości tego logarytmu, **oraz** konsekwentne dla tej błędnej wartości odczytanie i podanie czasu T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad\rightarrow\quad \log_{10}\left(\frac{1}{2}m_0\right) \approx y \quad (y \neq 1{,}1) \quad \text{dla } t = T = x$$

2 pkt – zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy m_0 jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$ **oraz** zapisanie warunku, że dla czasu połowicznego rozpadu $t = T$ $m_T = \frac{1}{2}m_0$ (albo że wartość logarytmu wynosi $\log_{10}\left(\frac{m_0}{2}\right)$), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{oraz} \quad \text{dla } t = T \text{ mamy } m_T = \frac{1}{2}m_0$$

albo

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{oraz} \quad \text{dla } t = T \text{ mamy } \log_{10} m_T = \log_{10}\left(\frac{m_0}{2}\right)$$

LUB

– zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy m_0 jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$ **oraz** poprawne obliczenie tej masy i podanie jej prawidłowej wartości liczbowej wyrażonej w jednostkach umownych, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{oraz} \quad m_0 = 10^{1{,}4}\ \mathrm{ju}$$

1 pkt – zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 2.)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką, mieszczącego się w przedziale: od $T = 0{,}60\ \mathrm{min}$ do $T = 0{,}65\ \mathrm{min}$

3 pkt – zapisanie wzoru na logarytm masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ pozostających w próbce $\mathcal{P}$ w postaci zależności liniowej względem czasu t **oraz** prawidłowa identyfikacja współczynnika kierunkowego tej zależności, **oraz** podanie (na podstawie wykresu) prawidłowej wartości tego współczynnika, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m(t) = \log_{10} m_0 + \frac{t}{T}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad A = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T} \quad \text{oraz}$$

$$A = \frac{-0{,}2 - 1{,}4}{(3{,}3 - 0)\ \mathrm{min}} = -0{,}485\ \frac{1}{\mathrm{min}}$$

LUB

– zapisanie wzoru na logarytm masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ pozostających w próbce $\mathcal{P}$ w postaci zależności liniowej względem czasu t **oraz** prawidłowa identyfikacja współczynnika kierunkowego tej zależności, **oraz** podanie błędnej wartości tego współczynnika, **oraz** konsekwentne dla tej błędnej wartości obliczenie i podanie czasu T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m(t) = \log_{10} m_0 + \frac{t}{T}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad A = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T} \quad \text{oraz}$$

$$A = z\ \frac{1}{\mathrm{min}} \quad \text{oraz} \quad T = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{z} = x$$

2 pkt – zapisanie wzoru na logarytm masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ pozostających w próbce $\mathcal{P}$ w postaci zależności liniowej względem czasu t **oraz** prawidłowa identyfikacja współczynnika kierunkowego tej zależności, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m(t) = \log_{10} m_0 + \frac{t}{T}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad A = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T}$$

1 pkt – zapisanie obustronnego logarytmu wzoru – na masę jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ pozostających w próbce $\mathcal{P}$ – wynikającego z prawa rozpadu promieniotwórczego, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m(t) = \log_{10}\left(m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}\right) \quad \text{albo} \quad m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \ \Big|\Big|\ \log_{10} \_\_$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 3.)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką, mieszczącego się w przedziale: od $T = 0{,}60\ \mathrm{min}$ do $T = 0{,}65\ \mathrm{min}$

3 pkt – spełnienie warunku za 2 pkt <u>dla dwóch</u> wybranych punktów z wykresu **oraz** zapisanie jednego równania z wyeliminowanym m_0, z którego można obliczyć T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1} \quad \text{oraz} \quad m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{T}} = 10^{L_2} \right) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2 - t_1}{T}} = 10^{L_2 - L_1}$$

LUB

– zapisanie jednego z równań określonych w pierwszym myślniku za 3 pkt z błędnie odczytaną jedną współrzędną punktu (np. t_1 lub L_1) **oraz** konsekwentne dla tej błędnej wartości obliczenie i podanie czasu T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1} \quad \rightarrow \quad \text{obliczenia} \quad \rightarrow \quad T = \frac{(t_2 - t_1) \cdot \log_{10} 2}{L_1 - L_2} = \text{wartość}$$

2 pkt – wyznaczenie masy dla dowolnie wybranej chwili czasu, na podstawie współrzędnych wybranego punktu wykresu **oraz** zastosowanie prawa rozpadu z uwzględnieniem współrzędnych tego punktu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) \quad \rightarrow \quad m_1(t_1) = 10^{L_1} \quad \rightarrow \quad m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1}$$

1 pkt – wyznaczenie masy dla dowolnie wybranej chwili czasu, na podstawie współrzędnych wybranego punktu wykresu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) \quad \rightarrow \quad m_1(t_1) = 10^{L_1}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 4.)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką, mieszczącego się w przedziale: od $T = 0{,}60$ min do $T = 0{,}65$ min

3 pkt – spełnienie warunków za 2 pkt określonych w pierwszym **oraz** drugim myślniku **oraz** zastosowanie równania wynikającego z prawa rozpadu promieniotwórczego **oraz** zapisanie jednego równania z wyeliminowanym m_0, z którego można obliczyć T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$10^{1,4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1}$$

LUB

– zapisanie równania określonego w pierwszym myślniku za 3 pkt z błędnie odczytaną jedną współrzędną punktu (np. t_1 lub L_1) **oraz** konsekwentne dla tej błędnej wartości obliczenie i podanie czasu T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$10^{1,4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1} \quad \rightarrow \quad \text{obliczenia} \rightarrow \quad T = \frac{t_1 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4 - L_1} = \text{wartość}$$

2 pkt – wyznaczenie masy dla dowolnie wybranej chwili czasu, na podstawie współrzędnych wybranego punktu wykresu **oraz** zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) \quad \rightarrow \quad m_1(t_1) = 10^{L_1} \quad \text{oraz} \quad \log_{10} m_0 = 1{,}4$$

LUB

– zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy m_0 jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$ **oraz** poprawne obliczenie tej masy i podanie jej prawidłowej wartości liczbowej wyrażonej w jednostkach umownych, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{oraz} \quad m_0 = 10^{1,4}\ \mathrm{ju}$$

1 pkt – wyznaczenie masy dla dowolnie wybranej chwili czasu, na podstawie współrzędnych wybranego punktu wykresu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) \quad \rightarrow \quad m_1(t_1) = 10^{L_1}$$

LUB

– zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1a. (z wykorzystaniem m_0 i definicji T)

Do wyznaczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ wykorzystamy wykres oraz definicję czasu połowicznego rozpadu. Oznaczymy jako m_0 początkową masę jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$ oraz odczytamy z wykresu wartość $\log_{10} m_0$:

$$m(t_0 = 0) = m_0 \qquad \text{zatem} \qquad \log_{10} m_0 = 1{,}4$$

Po czasie $t = T$ w próbce $\mathcal{P}$ pozostanie połowa początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$:

$$m(t = T) = m_T = \frac{1}{2} m_0$$

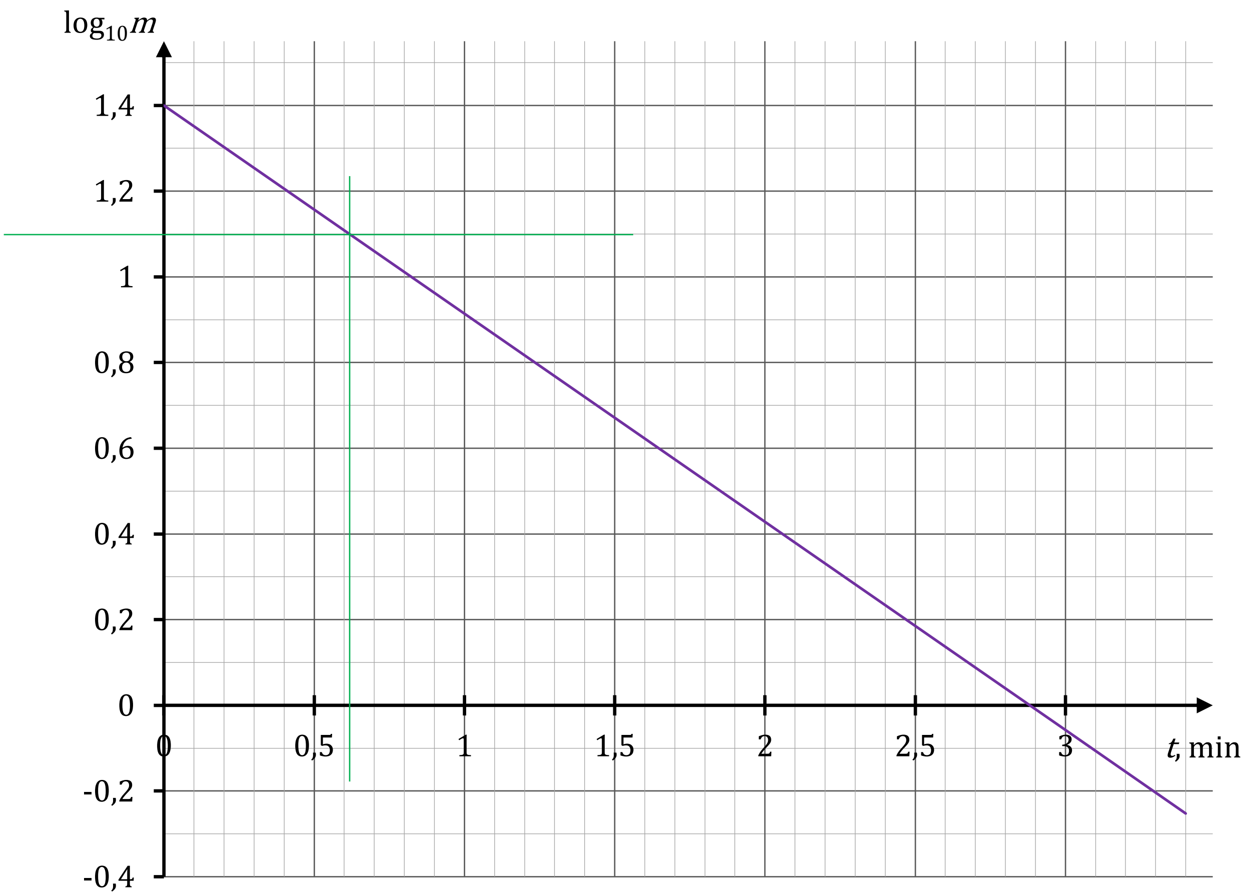
Obliczymy wartość logarytmu połowy początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ (masy wyrażonej w jednostkach umownych ju):

$$\log_{10} m_T = \log_{10}\left(\frac{1}{2} \cdot m_0\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{10} m_0 \approx$$

$$\approx -0{,}301 + 1{,}4 = 1{,}099 \approx 1{,}1$$

Z wykresu odczytamy czas T, dla którego logarytm połowy początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ wynosi w przybliżeniu $\log_{10} m_T \approx 1{,}1$.

$$\log_{10} m_T \approx 1{,}1 \qquad \text{dla} \qquad T \approx 0{,}62 \text{ min}$$



Sposób 1b. (z wykorzystaniem m_0 i definicji T)
Do wyznaczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ wykorzystamy wykres oraz definicję czasu połowicznego rozpadu. Oznaczymy jako m_0 początkową masę jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$:

$$m(t_0 = 0) = m_0$$

Następnie wyznaczymy m_0 w jednostkach umownych (ju). W tym celu najpierw odczytamy z wykresu wartość $\log_{10} m_0$:

$$1)\quad \log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{zatem}$$

$$2)\quad m_0 = 10^{1{,}4}\ \mathrm{ju} \approx 25{,}12\ \mathrm{ju}$$

Po czasie $t = T$ w próbce $\mathcal{P}$ pozostanie połowa początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$:

$$m(t = T) = m_T = \frac{1}{2}m_0 \qquad \rightarrow \qquad 3)\quad m_T = \frac{1}{2}\cdot 10^{1{,}4}\ \mathrm{ju} \approx 12{,}56\ \mathrm{ju}$$

Obliczymy wartość logarytmu połowy początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$:

$$4)\quad \log_{10} m_T = \log_{10}\left(\frac{10^{1{,}4}}{2}\right) \approx 1{,}099$$

Z wykresu odczytamy czas T, dla którego logarytm połowy początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ wynosi w przybliżeniu $\log_{10} m_T \approx 1{,}1$.

$$5)\quad \log_{10} m_T \approx 1{,}1 \qquad \text{dla} \qquad T \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$

Sposób 2. (z wykorzystaniem i interpretacją równania prostej)
Uwaga! Sposób 2. jest rekomendowany jako bardziej dokładny od sposobu 1., ponieważ współczynnik nachylenia prostej można wyznaczyć z większą dokładnością niż odciętą punktu wykresu o rzędnej 1,1.

Zapiszemy równanie wynikające z prawa rozpadu promieniotwórczego:

$$1)\quad m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie T jest czasem połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$.
Zlogarytmujemy obie strony zależności 1) logarytmem o podstawie 10, następnie wykonamy przekształcenia równoważne z wykorzystaniem własności logarytmów:

$$2a)\quad \log_{10} m(t) = \log_{10}\left(m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}\right)$$

$$2b)\quad \log_{10} m(t) = \log_{10} m_0 + \frac{t}{T}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Zależność 2b) przepiszemy w postaci wskazującej na zależność liniową logarytmu masy od czasu. Następnie zidentyfikujemy współczynniki tej zależności liniowej:

$$3a)\quad \log_{10} m(t) = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T}\cdot t + \log_{10} m_0$$

Zatem:

$$3\text{b)}\quad \log_{10} m(t) = A \cdot t + B$$

gdzie:

$$4)\quad A = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T} \qquad \text{oraz} \qquad B = \log_{10} m_0$$

Obliczymy współczynnik A z wykresu, a następnie z równania 4) obliczymy czas połowicznego rozpadu T (przy użyciu kalkulatora naukowego):

$$5)\quad A = \frac{-0{,}2 - 1{,}4}{(3{,}3 - 0)\ \mathrm{min}} = -0{,}485\ \frac{1}{\mathrm{min}}$$

$$6)\quad -0{,}485\ \frac{1}{\mathrm{min}} = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T} \qquad \rightarrow \qquad T = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}485}\ \mathrm{min}$$

$$7)\quad T = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}485}\ \mathrm{min} \approx \frac{-0{,}301}{-0{,}485}\ \mathrm{min} \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$

Sposób 3. (z wykorzystaniem równania rozpadu i dwóch dowolnych punktów wykresu)

Rozważmy punkty na wykresie leżące najbliżej punktów kratowych (i w miarę odległe od siebie), np.:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) = (t_1\,; \log_{10} m_1) = (0{,}4\ \mathrm{min}; 1{,}2)$$

$$P_2 = (t_2\,; L_2) = (t_2\,; \log_{10} m_2) = (3{,}3\ \mathrm{min}; -0{,}2)$$

To oznacza, że:

$$1{,}2 = \log_{10} m(0{,}4) \quad \rightarrow \quad 10^{1{,}2} = m(0{,}4) \quad \rightarrow \quad 10^{1{,}2} = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4}{T}}$$

$$-0{,}2 = \log_{10} m(3{,}3) \quad \rightarrow \quad 10^{-0{,}2} = m(3{,}3) \quad \rightarrow \quad 10^{-0{,}2} = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3{,}3}{T}}$$

Ostatnie równania w powyższych wierszach wynikają z równania prawa rozpadu promieniotwórczego: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Z tych równań wyeliminujemy m_0:

$$\frac{10^{1{,}2}}{10^{-0{,}2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4-3{,}3}{T}} \quad \rightarrow \quad 10^{1{,}4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2{,}9}{T}} \quad \rightarrow \quad 10^{1{,}4} = 2^{\frac{2{,}9}{T}}$$

Ostatnie równanie powyżej zlogarytmujemy stronami (logarytmem o podstawie 2):

$$\log_2 10^{1{,}4} = \frac{2{,}9}{T} \quad \rightarrow \quad \frac{2{,}9}{T} = 1{,}4 \cdot \log_2 10 \quad \rightarrow \quad \frac{2{,}9}{T \cdot 1{,}4} = \frac{1}{\log_{10} 2}$$

Zatem:

$$T = \frac{2{,}9 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4} = 0{,}6235 \ldots \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$

Dodatkowe przykłady

Poniżej zapiszemy wzór ogólny na T dla punktów $P_1 = (t_1\,; L_1)$ i $P_2 = (t_2\,; L_2)$. Ten wzór wynika z analogicznego jak powyżej rachunku przeprowadzonego na symbolach:

$$T = \frac{(t_2 - t_1) \cdot \log_{10} 2}{L_1 - L_2}$$

Przykład 1.

$$P_1 = (0; 1{,}4) \quad P_2 = (2{,}88\,; 0) \quad \rightarrow \quad T = \frac{2{,}88 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4}\ \mathrm{min} \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$

Przykład 2.

$$P_1 = (0{,}2; 1{,}3) \quad P_2 = (1{,}85\,; 0{,}5) \quad \rightarrow \quad T = \frac{1{,}65 \cdot \log_{10} 2}{0{,}8}\ \mathrm{min} \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$

<u>Sposób 4.</u> (z wykorzystaniem równania rozpadu oraz masy początkowej i punktu wykresu)

Z wykresu wyznaczymy $m_0 = m(t = 0)$:

1) $\log_{10} m_0 = 1{,}4$ zatem

2) $m_0 = 10^{1{,}4}\ \mathrm{ju} \approx 25{,}12\ \mathrm{ju}$

Rozważmy dowolny punkt na wykresie leżący najbliżej punktów kratowych, np.:

$$P_1 = (t_1;\ L_1) = (t_1\,; \log_{10} m_1) = (0{,}4\ \mathrm{min}; 1{,}2)$$

To oznacza, że:

3) $1{,}2 = \log_{10} m(0{,}4)$ $\rightarrow$ 4) $10^{1{,}2} = m(0{,}4)$

Uwzględnimy równanie wynikające z prawa rozpadu promieniotwórczego:

5) $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ $\rightarrow$ 6) $m(0{,}4) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4}{T}}$

Z równań 2) i 4) i 6) wynika, że:

$$10^{1{,}2} = 10^{1{,}4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4}{T}} \quad \rightarrow \quad 10^{-0{,}2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4}{T}} \quad \rightarrow \quad 10^{0{,}2} = 2^{\frac{0{,}4}{T}}$$

Ostatnie równanie powyżej zlogarytmujemy stronami (logarytmem o podstawie 10):

$$0{,}2 = \frac{0{,}4}{T}\log_{10} 2 \quad \rightarrow \quad T = \frac{0{,}4}{0{,}2}\log_{10} 2 \quad \rightarrow \quad T \approx 0{,}60\ \mathrm{min}$$

Dodatkowe przykłady

Poniżej zapiszemy wzór ogólny na T dla punktu $P_1 = (t_1\,; L_1)$ i masy $m_0 = 10^{1{,}4}\ \mathrm{ju}$. Ten wzór wynika z analogicznego jak powyżej rachunku przeprowadzonego na symbolach.

$$T = \frac{t_1 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4 - L_1}$$

Przykład 1.

$$P_1 = (1{,}65; 0{,}6) \quad \rightarrow \quad T = \frac{1{,}65 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4 - 0{,}6}\ \mathrm{min} \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$

Przykład 2.

$$P_1 = (2{,}05; 0{,}4) \quad \rightarrow \quad T = \frac{2{,}05 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4 - 0{,}4}\ \mathrm{min} \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$