CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA DO 2014

(„STARA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

(BEZ WSPÓLNYCH Z „NOWĄ MATURĄ”)

ARKUSZ MMA-R1

CZERWIEC 2018

Zadanie 1. (0–4)

Rozwiąż nierówność $|2x-1|+x\le 5+|x+5|$.

Przykładowe rozwiązanie

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,-5)$, $\left\langle -5,\frac{1}{2}\right)$, $\left\langle \frac{1}{2},+\infty\right)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x\in(-\infty,-5)$	$x\in\left\langle -5,\frac{1}{2}\right)$	$x\in\left\langle \frac{1}{2},+\infty\right)$
$-2x+1+x+5+x\le 5$ $6\le 5$ sprzeczność	$-2x+1-x-5+x\le 5$ $x\ge -\frac{9}{2}$ $x\in\left\langle -\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)$	$2x-1-x-5+x\le 5$ $x\le \frac{11}{2}$ $x\in\left\langle \frac{1}{2},\frac{11}{2}\right\rangle$

Wyznaczamy sumę tych rozwiązań: $x\in\left\langle -\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right\rangle$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,-5)$, $\left\langle -5,\frac{1}{2}\right)$, $\left\langle \frac{1}{2},+\infty\right)$.

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy **0 punktów.**

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np:

I. $x\in(-\infty,-5)$ $\quad -2x+1+x+5+x\le 5$

II. $x\in\left\langle -5,\frac{1}{2}\right)$ $\quad -2x+1-x-5+x\le 5$

III. $x\in\left\langle \frac{1}{2},+\infty\right)$ $\quad 2x-1-x-5+x\le 5$

Uwagi
1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 p.

- Zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in \left\langle -\frac{9}{2}, \frac{11}{2} \right\rangle$.

Uwaga
We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 p. mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

Zadanie 2. (0–5)
Rozwiąż równanie $4\sin x \cdot \cos^2 x - 1 = 2\sin 2x - \cos x$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Rozwiązanie

Przekształcamy w sposób równoważny równanie

$$4\sin x \cdot \cos^2 x - 4\sin x \cos x + \cos x - 1 = 0$$

$$4\sin x \cos x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)(4\sin x \cos x + 1) = 0 .$$

Stąd otrzymujemy: $\cos x = 1$ lub $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

Z pierwszego z tych równań otrzymujemy rozwiązania $x = 2k\pi$, z drugiego $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, gdzie k- liczba całkowita. Uwzględniając założenie otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie $x = \frac{7\pi}{12}$, $x = \frac{11\pi}{12}$, $x = \frac{19\pi}{12}$, $x = \frac{23\pi}{12}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest niewielki postęp .... 1 p.

Zdający zapisze równanie w postaci $4\sin x \cdot \cos^2 x - 4\sin x \cos x + \cos x - 1 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze równanie w postaci $(\cos x - 1)(4\sin x \cos x + 1) = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

- Zdający rozwiąże równanie $\cos x = 1$ w przedziale $(0, 2\pi)$

albo

- zdający przekształci równanie $4\sin x \cos x + 1 = 0$ do postaci $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Zdający rozwiąże równanie $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą oraz rozwiąże równanie

$\cos x = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania z przedziału $(0, 2\pi)$: $x = \frac{7\pi}{12}$, $x = \frac{11\pi}{12}$, $x = \frac{19\pi}{12}$,

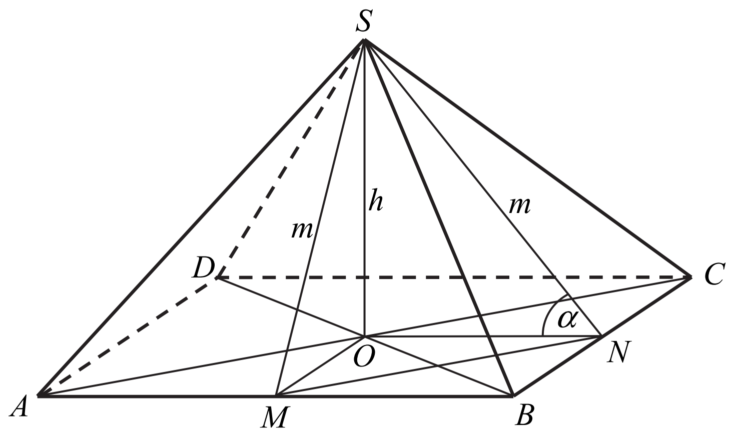
$x = \frac{23\pi}{12}$.

Zadanie 3. (0–5)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego *ABCDS* jest kwadrat *ABCD*. Punkt *M* jest środkiem odcinka *AB*, a punkt *N* jest środkiem odcinka *BC*. Trójkąt *MNS* jest równoboczny i jego bok ma długość *m*. Oblicz objętość ostrosłupa *ABCDS* i kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Niech *O* oznacza spodek wysokości ostrosłupa oraz α niech będzie miara kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.



Odcinek *MN* to przekątna kwadratu *BNOM*, więc ze wzoru na długość przekątnej kwadratu, otrzymujemy

$$|MN| = |ON|\sqrt{2},$$

$$m = |ON|\sqrt{2},$$

$$|ON| = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ONS* otrzymujemy

$$|NS|^2 = |SO|^2 + |ON|^2,$$

$$m^2 = h^2 + \left(\tfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$h^2 = m^2 - \left(\tfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 = m^2 - \tfrac{2m^2}{4} = \tfrac{2m^2}{4}.$$

Stąd

$$h = \sqrt{\tfrac{2m^2}{4}} = \tfrac{m\sqrt{2}}{2}.$$

Krawędź podstawy ostrosłupa ma długość

$$|AB| = 2|ON| = 2\cdot\frac{m\sqrt{2}}{2} = m\sqrt{2}.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3}\cdot|AB|^2 h = \frac{1}{3}\cdot\left(m\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{m\sqrt{2}}{2} = \frac{m^3\sqrt{2}}{3}.$$

Tangens kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|SO|}{|NO|} = \frac{\frac{m\sqrt{2}}{2}}{\frac{m\sqrt{2}}{2}} = 1,$$

zatem $\alpha = 45^\circ$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający wyznaczy długość podstawy ostrosłupa lub jego połowy: $m\sqrt{2}$ lub $\frac{m\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze zależność między wysokością *h* ostrosłupa oraz *m*, np.: $m^2 = h^2 + \left(\tfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający wyznaczy wysokość ostrosłupa: $h = \tfrac{m\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Zdający

- wyznaczy objętość ostrosłupa w zależności od *m*: $V = \frac{m^3\sqrt{2}}{3}$

albo

- wyznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\alpha = 45°$.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający wyznaczy objętość ostrosłupa: $V = \frac{m^3\sqrt{2}}{3}$ oraz wyznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\alpha = 45°$.

Zadanie 6. (0–3)

Dodatnie liczby rzeczywiste a i b takie, że $a > b$, spełniają warunek $\log_2\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. Wykaż, że dla liczb a i b prawdziwa jest równość $a^2 + b^2 = 11ab$.

Rozwiązanie

Mnożymy obie strony danego równania przez 2 i otrzymujemy:

$$2\log_2\left(\frac{a-b}{3}\right) = \log_2 a + \log_2 b$$

Stosujemy twierdzenia o logarytmach i przekształcamy równość do postaci:

$$\log_2\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = \log_2 ab.$$

Wykorzystujemy różnowartościowość funkcji logarytmicznej i zapisujemy równość w postaci:

$$\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = ab.$$

Przekształcamy równoważnie wyrażenie:

$$\frac{(a-b)^2}{9} = ab,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 9ab.$$

Stąd $a^2 + b^2 = 11ab$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci $\log_2\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = \log_2 ab$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający wykorzysta różnowartościowość funkcji logarytmicznej i zapisze $\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = ab$.

Rozwiązanie pełne ....**3 pkt**

Zdający wykaże tezę.

Zadanie 10. (0–6)

Wielomian $W(x)=x^3+cx^2-10x+d$ jest podzielny przez dwumian $P(x)=x+2$. Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $Q(x)=x-1$ otrzymujemy resztę (-30). Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$ i rozwiąż nierówność $W(x)\geq 0$.

Wielomian $W(x)=x^3+cx^2-10x+d$ jest podzielny przez dwumian $P(x)=x+2$. Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $Q(x)=x-1$ otrzymujemy resztę (-30). Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$ i rozwiąż nierówność $W(x)\geq 0$.

Rozwiązanie

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $P(x)=x+2$, stąd $x=-2$ jest pierwiastkiem tego wielomianu. Korzystając z warunków zadania zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} W(-2)=0 \\ W(1)=-30 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 4c+d+12=0 \\ c+d-9=-30 \end{cases}.$$

Z układu równań obliczamy c i d

$$\begin{cases} 4c+d=-12 \\ c+d=-21 \end{cases},$$

$$\begin{cases} c=3 \\ d=-24 \end{cases}.$$

Dla $c=3$ i $d=-24$ otrzymujemy $W(x)=x^3+3x^2-10x-24$.

Obliczamy pozostałe pierwiastki wielomianu wykonując, np. dzielenie wielomianu $W(x)$ przez $(x+2)$.

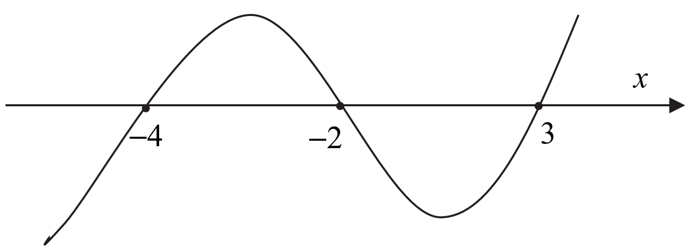
$$W(x):(x+2)=x^2+x-12,$$

$$x^2+x-12=0,$$

$$\Delta=49,\ x_1=3,\ x_2=-4.$$

Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby: -4, -2, oraz 3.

Wykonujemy szkic



i odczytujemy rozwiązanie nierówności: $W(x)\geq 0$ dla $x\in\langle -4,-2\rangle\cup\langle 3,\infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający zapisze jedno z równań:

$4c+d+12=0$ albo $c+d-9=-30$

Uwaga

Wystarczy, że zdający zapisze $\begin{cases} W(-2)=0 \\ W(1)=-30 \end{cases}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze układ równań

$$\begin{cases} 4c+d+12=0 \\ c+d-9=-30 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

Zdający rozwiąże układ równań: $c=3$ i $d=-24$.

Uwaga

Jeśli zdający rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym, to otrzymuje 3 punkty.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....5 pkt

Zdający

- wykona poprawnie dzielenie wielomianu $W(x)$ przez $(x+2)$:

  $W(x):(x+2)=x^2+x-12$

albo

- rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym i obliczy pozostałe pierwiastki konsekwentnie do popełnionego błędu

albo

- podzieli wielomian z błędem rachunkowym i obliczy pozostałe pierwiastki konsekwentnie do popełnionego błędu

albo

błędnie poda rozwiązanie nierówności $W(x)\geq 0$.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Zdający obliczy pozostałe pierwiastki wielomianu: -4, oraz 3 i zapisze rozwiązanie nierówności $W(x)\geq 0$: $x\in\langle -4, -2\rangle \cup \langle 3, \infty)$.