

KLUCZ ODPOWIEDZI
DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

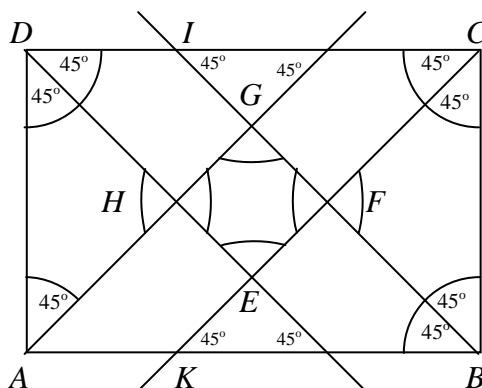
NR ZADANIA	POPRAWNA ODPOWIEDŹ
1	D
2	C
3	C
4	B
5	D
6	A
7	D
8	D
9	A
10	C
11	B
12	A
13	A
14	B
15	D
16	B
17	C
18	A
19	B
20	D

MODEL OCENIANIA ZADAN OTWARTYCH

Zadanie 21 (2 pkt)

Uzasadnij, że punkty przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych prostokąta ABCD są wierzchołkami kwadratu.

Rozwiązanie



Czworokąt $EFGH$ jest kwadratem, ponieważ :

- posiada cztery kąty proste,
- $|IB| = |KC| \Leftrightarrow |BF| + |FG| + |GI| = |CF| + |EF| + |EK|$
- $|BF| = |CF| \quad i \quad |GI| = |EK|$

Stąd $|FG| = |EF|$, więc długości boków czworokąta $EFGH$ są równe.

Schemat oceniania:

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy narysuje dwusieczne kątów i zaznaczy kąty o mierze 45° .

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy wskaże kąty proste i stwierdzi, że otrzymana figura jest kwadratem

Uwaga

Jeśli zdający nie zaznaczy kątów 45° , otrzymuje 0 pkt

Zadanie 22 (2 pkt)

W kwadracie ABCD dane są wierzchołek $A=(1,-2)$ i środek symetrii $S=(2,1)$. Oblicz pole kwadratu ABCD.

I sposób rozwiązania:

Obliczamy długość odcinka $|AS| = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$.

Obliczamy pole kwadratu $P = \frac{1}{2}d_1d_2$, gdzie $d_1 = d_2 = 2|AS| = 2\sqrt{10}$, a zatem $P = 20$.

II sposób rozwiązania:

Obliczamy długość odcinka $|AS| = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$.

Obliczamy długość boku kwadratu $|AS| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, a zatem $a = 2\sqrt{5}$.

Stąd otrzymujemy pole kwadratu $P = 20$.

Schemat oceniania:

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy:

- obliczy długość odcinka AS : $|AS| = \sqrt{10}$

albo

- obliczy długość odcinka AC : $|AC| = 2\sqrt{10}$

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy lub poda pole kwadratu $P = 20$.

Zadanie 23 (2 pkt)

Rzucamy czerwoną i zieloną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wyrzuceniu takiej samej liczby oczek na obu kostkach.

Rozwiązanie

A – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu takiej samej liczby oczek na obu kostkach.

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia $\overline{\Omega} = 36$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A: $\overline{A} = 6$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A: $P(A) = \frac{1}{6}$

Schemat oceniania:

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy poprawnie obliczy $\overline{\Omega} = 36$ i $\overline{A} = 6$

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy poda prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A: $P(A) = \frac{1}{6}$

Uwaga:

Gdy zdający błędnie wyznaczy $\overline{\Omega}$ lub \overline{A} otrzymuje 0 punktów za całe zadanie.

Zadanie 24 (2 pkt)

Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 4$, oblicz $\operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2$.

Rozwiązanie

Równanie $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 4$ podnosimy stronami do kwadratu.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 2\operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 16$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 2 = 16$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 14$$

Schemat oceniania:

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy:

- z podanego równania obliczy $\operatorname{tg} \alpha$, np.: $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} \alpha = 2 + \sqrt{3}$ i na tym porzeczanie lub dalej popełnia błędy

albo

- podniesie podane równanie do kwadratu: $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 2\operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 16$ i dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy poprawnie obliczy wartość podanej sumy: $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 14$

Zadanie 25 (2 pkt)

Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $x^2 - 3x - 10 \geq 0$.

Rozwiązanie

Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 3x - 10$: $x_1 = 5$ $x_2 = -2$

lub zapisujemy nierówność w postaci $(x - 5)(x + 2) \leq 0$.

Rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej i na jego podstawie odczytujemy rozwiązania nierówności: $x \in \langle -2, 5 \rangle$.

Wyznaczamy wszystkie liczby całkowite należące do przedziału $\langle -2, 5 \rangle$:

$$x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Schemat oceniania:

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy:

- obliczy lub poda prawidłowo pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności albo
- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność albo
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie

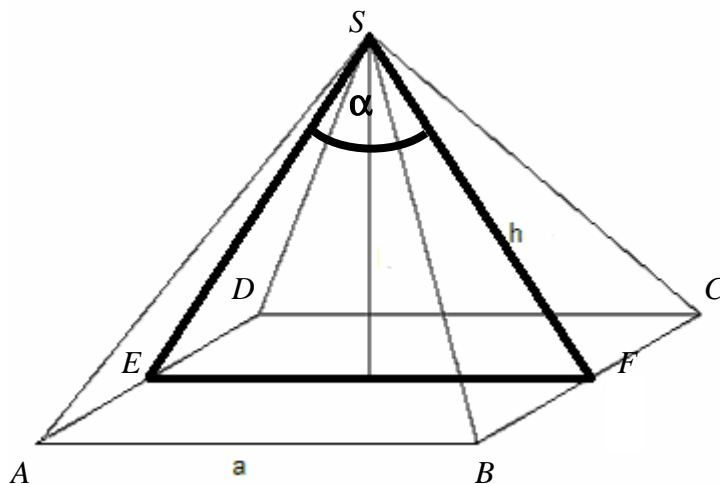
Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy wyznaczy wszystkie liczby całkowite spełniające podaną nierówność kwadratową $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Zadanie 26 (4 pkt)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 18 cm, kąt między wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę $\alpha = 60^\circ$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Wykonaj odpowiedni rysunek i zaznacz kąt α .

Rozwiązanie



Zauważmy, że $\triangle EFS$ jest równoboczny, a zatem wysokość ściany bocznej $h = 18\text{cm}$.
Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h, \text{ gdzie } a = 18\text{cm}$$

$$P = 2 \cdot 18^2 = 648\text{cm}^2$$

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt
Wykonanie rysunku ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i zaznaczenie kąta α .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

- Zapisanie, że trójkąt EFS jest równoboczny, a zatem wysokość ściany bocznej $h = 18\text{cm}$
- Zapisanie związku umożliwiającego obliczenie długości wysokości ściany bocznej,
np. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{h}$

Uwaga

Jeżeli zdający nieprawidłowo zapisze związek dla użytej funkcji trygonometrycznej, to nie pokonał zasadniczych trudności zadania i nie przyznajemy punktów za dalszą część rozwiązania zadania.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3 pkt

- Jeżeli zdający przy obliczaniu pola ściany bocznej popełnił błąd rachunkowy albo nie napisze ułamka $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca
- Jeżeli zdający przy obliczaniu pola powierzchni bocznej ostrosłupa popełnił błąd rachunkowy albo nie napisze 4 we wzorze na pole powierzchni bocznej i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca

Rozwiązanie pełne 4 pkt
Obliczenie pola powierzchni bocznej ostrosłupa $P = 648\text{cm}^2$.
(Należy akceptować również wynik bez podania jednostki).

Uwaga

Przyznajemy 0 punktów za zadanie, gdy zdający zaznaczy inny kąt lub narysuje inną bryłę.

Zadanie 27 (5 pkt)

Wyznacz wzór funkcji $f(x) = 2x^2 + bx + c$ w postaci kanonicznej wiedząc, że jej miejsca zerowe są rozwiązaniami równania $|x - 3| = 5$.

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy równanie $|x - 3| = 5$

$$x - 3 = 5 \quad \text{lub} \quad x - 3 = -5$$

$$x = 8 \quad \text{lub} \quad x = -2$$

A zatem $f(x) = 2(x - 8)(x + 2)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \text{stąd} \quad p = 3$$

$$q = f(p) = 2 \cdot (3 - 8)(3 + 2) = -50$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej f wyraża się wzorem $f(x) = 2(x - 3)^2 - 50$.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

- Rozwiązanie równania $|x-3|=5$: $x=8$ lub $x=-2$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

- Zapisanie funkcji f w postaci iloczynowej $f(x)=2(x-8)(x+2)$

albo

- Wyznaczenie współczynników b, c trójmianu kwadratowego: $b=-12$, $c=-32$ lub zapisanie funkcji w postaci ogólnej $f(x)=2x^2-12x-32$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

- Obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli: $p=3$ i $q=-50$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

- Zapisanie funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej z pominięciem współczynnika a : $f(x)=(x-8)(x+2)$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiązanie zadania do końca
- Zapisanie funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej z błędem, np.
 $f(x)=2(x-3)-50$, $f(x)=2(x+3)^2+50$, $f(x)=2(x-3)^2+50$,
 $f(x)=2(x+3)^2-50$
- Rozwiązanie równania $|x-3|=5$ z błędem rachunkowym i konsekwentne do popełnionego błędu rozwiązanie zadania do końca

Rozwiązanie pełne 5 pkt

- Zapisanie funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej: $f(x)=2(x-3)^2-50$.

Zadanie 28 (5 pkt)

Szkoła zamówiła seans filmowy dla uczniów klas trzecich. Koszt seansu wyniósł 1650zł. Ponieważ do kina nie przyszło 15 uczniów, pozostali musieli dopłacić po 1 zł za bilet. Jaka była planowana, a jaka rzeczywista cena biletów?

Rozwiązanie:

Oznaczamy: x - liczba uczniów, $x \in N$

y - planowana cena biletu, $y > 0$

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} xy = 1650 \\ (x-15)(y+1) = 1650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1650}{x} \\ xy + x - 15y = 1665 \end{cases}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie $x^2 - 15x - 24750 = 0$, którego rozwiązaniami są $x=165$ lub $x=-150$, odrzucamy ujemne rozwiązanie.

Wyznaczamy rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x = 165 \\ y = 10 \end{cases}$$

Odpowiedź: Planowana cena biletu to 10zł, a rzeczywista cena wyniosła 11zł.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

- Zapisanie zależności między ceną biletu oraz liczbą uczniów, np.: $xy = 1650$ lub $(x-15)(y+1) = 1650$, gdzie x - liczba uczniów, y - planowana cena biletu

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y , np.:
$$\begin{cases} xy = 1650 \\ (x-15)(y+1) = 1650 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y , np.: $x^2 - 15x - 24750 = 0$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

- Rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x bezbłędnie i nieobliczenie planowanej ceny biletu lub rzeczywistej ceny biletu

albo

- Rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie ceny biletu

albo

- Rozwiązanie zadania do końca z błędem rachunkowym popełnionym w którejkolwiek fazie rozwiązania (rozwiązanie jest przeprowadzone konsekwentnie w stosunku do popełnionego błędu, a sam błąd nie spowodował istotnej zmiany w sposobie rozwiązania zadania, np.: nie spowodował, że zamiast równania kwadratowego otrzymujemy równanie liniowe).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

- Podanie prawidłowej odpowiedzi: Planowana cena biletu to 10zł, a rzeczywista cena wyniosła 11zł

Uwaga

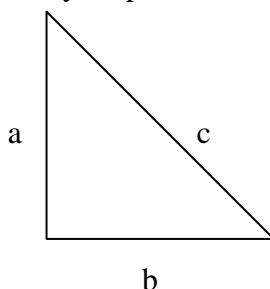
Jeśli zdający nie opíše wprowadzonych oznaczeń, a z przedstawionego rozwiązania nie można jednoznacznie zinterpretować wprowadzonych niewiadomych (np. zapisy są wzajemnie sprzeczne), to oceniamy rozwiązania na 0 punktów.

Zadanie 29 (6 pkt)

Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, w którym środkowy wyraz wynosi 8. Wyznacz długości boków trójkąta, oblicz jego pole oraz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

I sposób rozwiązania

Wykonujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy na nim odpowiednie oznaczenia.



Ciąg (a, b, c) – jest ciągiem arytmetycznym.

Z treści zadania i własności ciągu arytmetycznego wynika, że $b = \frac{a+c}{2}$ i $b=8$,

$$\text{zatem } 8 = \frac{a+c}{2}.$$

Przekształcając otrzymujemy $a = 16 - c$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa zapisujemy równanie $a^2 + b^2 = c^2$. Po podstawieniu i przekształceniach otrzymujemy równanie liniowe $32c = 320$, którego rozwiązaniem jest $c = 10$.

Obliczamy długość przyprostokątnej $a = 16 - 10 = 6$.

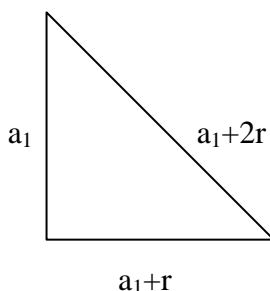
$$\text{Obliczamy pole trójkąta } P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

$$\text{Obliczamy promień okręgu opisanego na tym trójkącie } R = \frac{1}{2}c = \frac{10}{2} = 5.$$

Odpowiedź: Długości boków trójkąta są równe 6, 8, 10. Pole trójkąta jest równe 24, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 5.

II sposób rozwiązania

Wykonujemy rysunek pomocniczy i oznaczamy jego boki a_1 , $a_1 + r$, $a_1 + 2r$.



$$\text{Zapisujemy równania (lub układ równań): } a_1^2 + (a_1 + r)^2 = (a_1 + 2r)^2 \text{ i } a_1 + r = 8.$$

Obliczamy $r = 2$. Wyznaczamy długości boków trójkąta $a_1 = 6$, $a_1 + r = 8$, $a_1 + 2r = 10$.

Obliczamy pole trójkąta $P = \frac{1}{2} a_1 \cdot (a_1 + r) = 24$.

Obliczamy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie $R = \frac{1}{2}(a_1 + 2r) = \frac{10}{2} = 5$.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

- Wykorzystanie wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego do zapisania długości boków trójkąta prostokątnego: a_1 , $a_1 + r$, $a_1 + 2r$ i zapisanie warunku $a_1 + r = 8$
- Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego $b = \frac{a+c}{2}$ i zapisanie $b = 8$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

- Zapisanie układu równań $a_1^2 + (a_1 + r)^2 = (a_1 + 2r)^2$ i $a_1 + r = 8$
- Zapisanie układu równań $a^2 + 8^2 = c^2$ i $8 = \frac{a+c}{2}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 pkt

- Doprowadzenie do postaci równania z jedną niewiadomą $32r = 64$ lub $32c - 320 = 0$ i obliczenie długości boków trójkąta $a = 6$ lub $c = 10$.

Uwagi

Jeśli zdający obliczy długość tylko jednego z boków trójkąta, to otrzyma 3 pkt.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 pkt

- Obliczenie jednej z dwóch wartości $P = 24$ albo $R = 5$.

Uwagi

Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy nie przekreślający poprawności rozwiązania i konsekwentnie z tym błędem rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje 5 pkt.

Rozwiązanie pełne 6 pkt

- Długości boków trójkąta wynoszą 6, 8, 10; $P = 24$ i $R = 5$.

Uwagi

- Jeżeli zdający błędnie zapisze twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje 0 pkt.
- Jeżeli zdający przyjmie bok długości 8 jako pierwszy lub trzeci wyraz ciągu, to otrzyma 0 pkt.
- Jeżeli zdający otrzyma ujemne długości boków, to otrzymuje 0 pkt.