Egzamin maturalny
CZERWIEC 2011

Schemat oceniania do zadań otwartych

Poziom rozszerzony

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Rozwiąż nierówność $|2x-4|+|x-5|\geq 12$.

<u>I sposób rozwiązania:</u> wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,2)$, $\langle 2,5)$, $\langle 5,\infty)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności

$x\in(-\infty,2)$	$x\in\langle 2,5)$	$x\in\langle 5,\infty)$
$-2x+4-x+5\geq 12$ $-3x\geq 3$ $x\leq -1$	$2x-4-x+5\geq 12$ $x\geq 11$	$2x-4+x-5\geq 12$ $3x\geq 21$ $x\geq 7$

Wyznaczamy części wspólne otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami,
$x\leq -1$ sprzeczność $x\geq 7$
i bierzemy sumę tych przedziałów: $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 7,\infty)$.

<u>II sposób rozwiązania</u> zapisanie czterech przypadków

Zapisujemy cztery przypadki: $\begin{cases}2x-4\geq 0\\ x-5\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x-4\geq 0\\ x-5<0\end{cases}$ $\begin{cases}2x-4<0\\ x-5\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x-4<0\\ x-5<0\end{cases}$

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przypadkach:

$\begin{cases}2x-4\geq 0\\ x-5\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x-4\geq 0\\ x-5\geq 0\\ 2x-4+x-5\geq 12\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 2\\ x\geq 5\\ 3x\geq 21\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 2\\ x\geq 5\\ x\geq 7\end{cases}$ $x\in\langle 7,\infty)$	$\begin{cases}2x-4\geq 0\\ x-5<0\end{cases}$ $\begin{cases}2x-4\geq 0\\ x-5<0\\ 2x-4-x+5\geq 12\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 2\\ x<5\\ x\geq 11\end{cases}$ niemożliwe	$\begin{cases}2x-4<0\\ x-5\geq 0\end{cases}$ niemożliwe	$\begin{cases}2x-4<0\\ x-5<0\end{cases}$ $\begin{cases}2x-4<0\\ x-5<0\\ -2x+4-x+5\geq 12\end{cases}$ $\begin{cases}x<2\\ x<5\\ -3x\geq 3\end{cases}$ $\begin{cases}x<2\\ x<5\\ x\leq -1\end{cases}$ $x\in(-\infty,-1\rangle$

Zapisujemy odpowiedź: $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 7,\infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,2)$, $\langle 2,5)$, $\langle 5,\infty)$

albo

zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} 2x-4\geq 0 \\ x-5\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-4\geq 0 \\ x-5< 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-4< 0 \\ x-5\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-4< 0 \\ x-5< 0 \end{cases}$

Uwaga:

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy **0 punktów.** Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np:

I. $x\in(-\infty,2)$ $\quad -2x+4-x+5\geq 12$

II. $x\in\langle 2,5)$ $\quad 2x-4-x+5\geq 12$

III. $x\in\langle 5,\infty)$ $\quad 2x-4+x-5\geq 12$

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x\leq -1$ lub $x\geq 7$

.

Uwaga:

1. We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 pkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.
2. Jeżeli zdający przy przekształcaniu nierówności podanej w treści zadania popełni błąd (np. $\left|2(x-4)\right|+|x-5|\geq 12$), to otrzymuje **1 punkt mniej** niż przewidziany w schemacie w danej kategorii rozwiązania.

Zadanie 2. (*5 pkt*)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $2x^2-(m-2)x-3m=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, spełniające warunek $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\le 25$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ {x_1}^2+{x_2}^2-2x_1x_2\le 25\end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$:

$(m-2)^2+24m>0$,

$m^2+20m+4>0$

$m\in\left(-\infty,-10-4\sqrt{6}\right)\cup\left(-10+4\sqrt{6},+\infty\right)$.

Rozwiązujemy nierówność $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\le 25$.

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 25$

$\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-4\dfrac{c}{a}\le 25$

$m^2+20m-96\le 0$

Otrzymujemy $m\in\left\langle -24,4\right\rangle$.

Częścią wspólną obu zbiorów jest suma przedziałów $\left\langle -24,-10-4\sqrt{6}\right)\cup\left(-10+4\sqrt{6},4\right\rangle$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$, gdzie $\Delta=m^2+20m+4$, czyli $m^2+20m+4>0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty,-10-4\sqrt{6}\right)\cup\left(-10+4\sqrt{6},+\infty\right)$.
Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**
Uwaga:
Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta\ge 0$, to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\le 25$, $m\in\left\langle -24,4\right\rangle$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b). Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

- zapisanie nierówności $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\le 25$ w postaci równoważnej $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 25$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

$$\left(\frac{m-2-\sqrt{m^2+20m+4}}{4}\right)^2+\left(\frac{m-2+\sqrt{m^2+20m+4}}{4}\right)^2-$$
$$-2\cdot\frac{m-2-\sqrt{m^2+20m+4}}{4}\cdot\frac{m-2+\sqrt{m^2+20m+4}}{4}\le 25$$

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania .... 2 pkt
Doprowadzenie nierówności do postaci $m^2+20m-96\le 0$.

Rozwiązanie bezbłędne części b) .... 3 pkt
Rozwiązanie nierówności: $m\in\left\langle -24,4\right\rangle$

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i zapisanie odpowiedzi: $m\in\left\langle -24,-10-4\sqrt{6}\right)\cup\left(-10+4\sqrt{6},4\right\rangle$.

Uwaga. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań obu nierówności, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 3. *(5 pkt)*

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny. Ciąg $(3a+3,\ 2b,\ c-12)$ jest arytmetyczny i suma jego dwóch pierwszych wyrazów jest równa trzeciemu. Oblicz a, b, c.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie: $b^2 = a\cdot c$, a z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy równanie: $2(2b) = (3a+3)+(c-12)$.

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases}(3a+3)+(2b)=(c-12)\\ b^2 = a\cdot c\\ 2(2b)=(3a+3)+(c-12)\end{cases}$.

Przekształcamy układ równań do równania z jedną niewiadomą: $(3a+3)^2 = a(9a+21)$ lub $b^2 = \left(\frac{1}{3}b-1\right)(3b+12)$ lub $\left(\frac{1}{3}c-4\right)^2 = c\left(\frac{1}{9}c-\frac{21}{9}\right)$.

Rozwiązujemy równania i otrzymujemy: $a=3$ lub $b=12$ lub $c=48$.

Warunki zadania spełniają liczby: $a=3,\ b=12,\ c=48$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Oznaczamy: przez a – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, a przez q – iloraz tego ciągu. Wówczas $b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2$.

Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania zapisujemy układ równań: $\begin{cases}2(2aq)=(3a+3)+(aq^2-12)\\ (3a+3)+(2aq)=aq^2-12\end{cases}$ lub $\begin{cases}a(q^2-4q+3)=9\\ a(q^2-2q-3)=15\end{cases}$.

Z pierwszego równania mamy $a=\frac{9}{q^2-4q+3}$, zatem $\frac{9}{q^2-4q+3}\cdot(q^2-2q-3)=15$.

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie $q^2-7q+12=0$.

Rozwiązaniem tego równania są liczby: $q=3$ oraz $q=4$. Zauważamy, że dla $q=3$ pierwsze równanie jest sprzeczne.

Warunki zadania spełniają liczby: $a=3,\ b=12,\ c=48$.

<u>Schemat oceniania:</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (arytmetycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $b^2 = a\cdot c$

albo

- $2(2b)=(3a+3)+(c-12)$

albo

- $(3a+3)+(2b)=(c-12)$

albo

- $2(2aq) = (3a+3) + (aq^2 - 12)$

albo

- $(3a+3) + (2aq) = aq^2 - 12$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**
Zapisanie układu równań z trzema lub dwiema niewiadomymi np.:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 4b = 3a + 3 + c - 12 \\ 3a + 3 + 2b = c - 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 4aq = 3a + 3 + aq^2 - 12 \\ 3a + 3 + 2aq = aq^2 - 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a\left(q^2 - 2q - 3\right) = 15 \\ a\left(q^2 - 4q + 3\right) = 9 \end{cases}$$

<u>Uwaga:</u>
Jeżeli zdający pomyli własności któregokolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**
Doprowadzenie układu równań do równania z jedną niewiadomą, np.

$$(3a+3)^2 = a(9a+21) \quad \text{lub} \quad b^2 = \left(\frac{1}{3}b - 1\right)(3b+12) \quad \text{lub} \quad q^2 - 7q + 12 = 0$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**

Rozwiązanie bezbłędne .... **5 pkt**
$a = 3,\ b = 12,\ c = 48$.
<u>Uwaga:</u>
Jeżeli zdający rozwiązuje układ z niewiadomymi a, q i nie odrzuci rozwiązania $q = 3$, to otrzymuje 4 punkty.

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Rozwiąż równanie $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna $6\left(1 - \cos^2 x\right) + 7\cos x - 1 = 0$

$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, np. $t = \cos x$, gdzie $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe

$6t^2 - 7t - 5 = 0$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$\Delta = 49 - 4 \cdot (-5) \cdot 6 = 169 \qquad \sqrt{\Delta} = 13$

$t_1 = \frac{7 - 13}{12} = -\frac{1}{2} \qquad t_2 = \frac{7 + 13}{12} = \frac{5}{3}$

Odrzucamy rozwiązanie $t_2 = \frac{5}{3}$, ponieważ $\frac{5}{3} \notin \langle -1, 1 \rangle$

Rozwiązujemy równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$

Zapisujemy rozwiązania równania w podanym przedziale

$x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.:

$-6\cos^2 x + 7\cos x + 5 = 0$ lub $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t = \cos x$, zapisanie równania w postaci $-6t^2 + 7 \cdot t + 5 = 0$ lub $6t^2 - 7 \cdot t - 5 = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie równania kwadratowego ($t = \frac{5}{3}$ lub $t = -\frac{1}{2}$) i odrzucenie rozwiązania $t = \frac{5}{3}$.

Uwaga:

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest $\cos x$) i zapisać rozwiązanie w postaci $\cos x = \frac{5}{3}$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$ oraz zapisać, że równanie $\cos x = \frac{5}{3}$ jest sprzeczne.

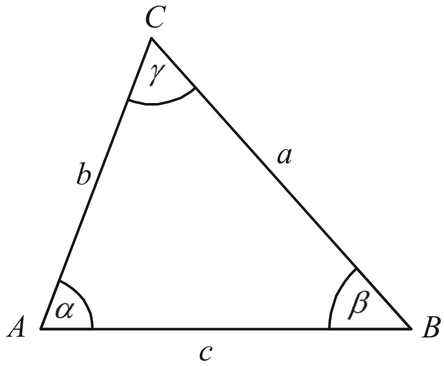
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Rozwiązanie równania w podanym przedziale:
$x=\frac{2\pi}{3}$ lub $x=\frac{4\pi}{3}$
albo
$x=120^\circ$ lub $x=240^\circ$

Uwagi:

2. Jeżeli zdający podstawia $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$ bez żadnych założeń, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający podniesie obie strony równania $6\cos^2 x-5=7\cos x$ do kwadratu i potem nie sprawdza rozwiązań, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Nie wymagamy, aby zdający zapisał warunek np. $t\in\langle -1,1\rangle$, o ile z dalszego ciągu rozwiązania wynika, że zdający uwzględnia go.
5. Jeżeli zdający rozwiąże poprawnie równanie kwadratowe i na tym zakończy, nie odrzucając rozwiązania $\frac{5}{3}$, to otrzymuje **2 punkty**.
6. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania kwadratowego i otrzyma dwa rozwiązania, z których co najmniej jedno należy do przedziału $\langle -1,1\rangle$, konsekwentnie rozwiąże oba równania w podanym przedziale, to otrzymuje **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 5. (*4 pkt*)

Dany jest trójkąt ostrokątny o bokach a, b, c i kątach α, β, γ (zobacz rysunek). Wykaż, że $\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}=\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha}$.



I sposób rozwiązania

Wykorzystujemy twierdzenie cosinusów i zapisujemy zależności:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ i $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

Przekształcamy zależności do postaci:

$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$ i $2ac\cos\beta=a^2+c^2-b^2$

Zapisujemy lewą stronę równości w postaci:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}=\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}$$

Wykorzystujemy związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta i przekształcamy zależność do postaci:

$$\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}=\frac{b\cdot\frac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}}{a\cdot\frac{\sin\beta}{\mathrm{tg}\beta}}=\frac{b\cdot\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{a\cdot\sin\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha}$$

Wykorzystujemy twierdzenie sinusów $a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha$ i wykazujemy tezę:

$$\frac{b\cdot\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{a\cdot\sin\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie zależności:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ i $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Przekształcenie zależności do postaci:

$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$ i $2ac\cos\beta=a^2+c^2-b^2$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie, że $\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}=\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}$

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Wykorzystanie twierdzenia sinusów i wykazanie tezy.

<u>II sposób rozwiązania</u>
Wykorzystujemy związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta i przekształcamy zależność do postaci:

$$\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}$$

Wykorzystujemy twierdzenie sinusów $\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ i zapisujemy zależność w postaci:

$$\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{b\cdot\cos\alpha}{a\cdot\cos\beta}$$

Wykorzystujemy twierdzenie cosinusów i zapisujemy zależności:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ i $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

Przekształcamy zależności do postaci:

$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ i $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

Wykazujemy tezę:

$$\frac{b\cdot\cos\alpha}{a\cdot\cos\beta}=\frac{b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}=\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha}$$

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Zapisanie, że $\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}$ i wykorzystanie twierdzenia sinusów: $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{b}{a}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie zależności:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ i $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Przekształcenie zależności do postaci:

$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ i $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zadanie 6. (*3 pkt*)

Wykaż, że nie istnieje wielomian $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, który spełnia warunki: $W(2)=3$ i $W(-2)=2$.

I sposób rozwiązania

Zapisujemy wielomian stopnia trzeciego w postaci ogólnej $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie *a, b, c, d* są liczbami całkowitymi.
Ponieważ $W(2)=3$, to $8a+4b+2c+d=3$ i ponieważ $W(-2)=2$, to $-8a+4b-2c+d=2$.
Po dodaniu otrzymanych równań stronami otrzymujemy równanie $8b+2d=5$, czyli $2(4b+d)=5$. Ponieważ prawa strona równania jest nieparzysta, a lewa jest parzysta (*b*, *d* są zgodnie z założeniem liczbami całkowitymi), to zapisujemy wniosek, że taki wielomian nie istnieje.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy wielomian stopnia trzeciego w postaci ogólnej $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie *a, b, c, d* są liczbami całkowitymi.
Ponieważ $W(2)=3$, to $8a+4b+2c+d=3$, zatem *d* musi być liczbą nieparzystą.
Ponieważ $W(-2)=2$, to $-8a+4b-2c+d=2$, zatem *d* musi być liczbą parzystą.
Zatem nie istnieje wielomian spełniający warunki zadania.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Uwaga:
Jeżeli zdający rozpatruje wielomian stopnia drugiego zamiast stopnia trzeciego, to otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zapisanie ogólnej postaci wielomianu trzeciego stopnia: $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie *a, b, c, d* są liczbami całkowitymi.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Zapisanie układu równań z niewiadomymi *a, b, c, d*:

$$\begin{cases} 8a+4b+2c+d=3 \\ -8a+4b-2c+d=2 \end{cases}$$

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt
Dodanie stronami obu równań: $8b+2d=5$.
oraz

- zauważenie, że lewa strona równania $8b+2d=5$ jest parzysta, a prawa nieparzysta i sformułowanie wniosku, że nie istnieje wielomian spełniający podane warunki

albo

- zauważenie, że d w równaniu $8a+4b+2c+d=3$ musi być nieparzyste, a w równaniu $-8a+4b-2c+d=2$ parzyste i sformułowanie wniosku, że nie istnieje wielomian spełniający podane warunki.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający zauważy, że d w równaniu $8a+4b+2c+d=3$ jest nieparzyste, a w równaniu $-8a+4b-2c+d=2$ jest parzyste i nie sformułuje wniosku, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający zauważy, że lewa strona równania $8b+2d=5$ jest parzysta, a prawa nieparzysta i nie sformułuje wniosku, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 7. *(4 pkt)*

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $|AC| = 5$ i $|AB| = 8$. Pole tego trójkąta jest równe $10\sqrt{3}$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie

Oznaczamy $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ oraz R - promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Obliczamy $\sin\alpha$ ze wzoru na pole trójkąta;

$\frac{5 \cdot 8 \cdot \sin\alpha}{2} = 10\sqrt{3}$ stąd $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

α jest kątem ostrym więc $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Korzystamy z tw. cosinusów do obliczenia długości boku BC:

$|BC|^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$, $|BC| = 7$

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC obliczamy korzystając z tw. sinusów:

$2R = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ czyli $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie $\sin\alpha$: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Istotny postęp. .... 2 pkt

- obliczenie $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

albo

- obliczenie długości odcinków, na jakie wysokość trójkąta dzieli bok AB: $|AD| = 2{,}5$ i $|BD| = 5{,}5$ lub dla boku AC: $|AE| = 4$ i $|EC| = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie $|BC|$: $|BC| = 7$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

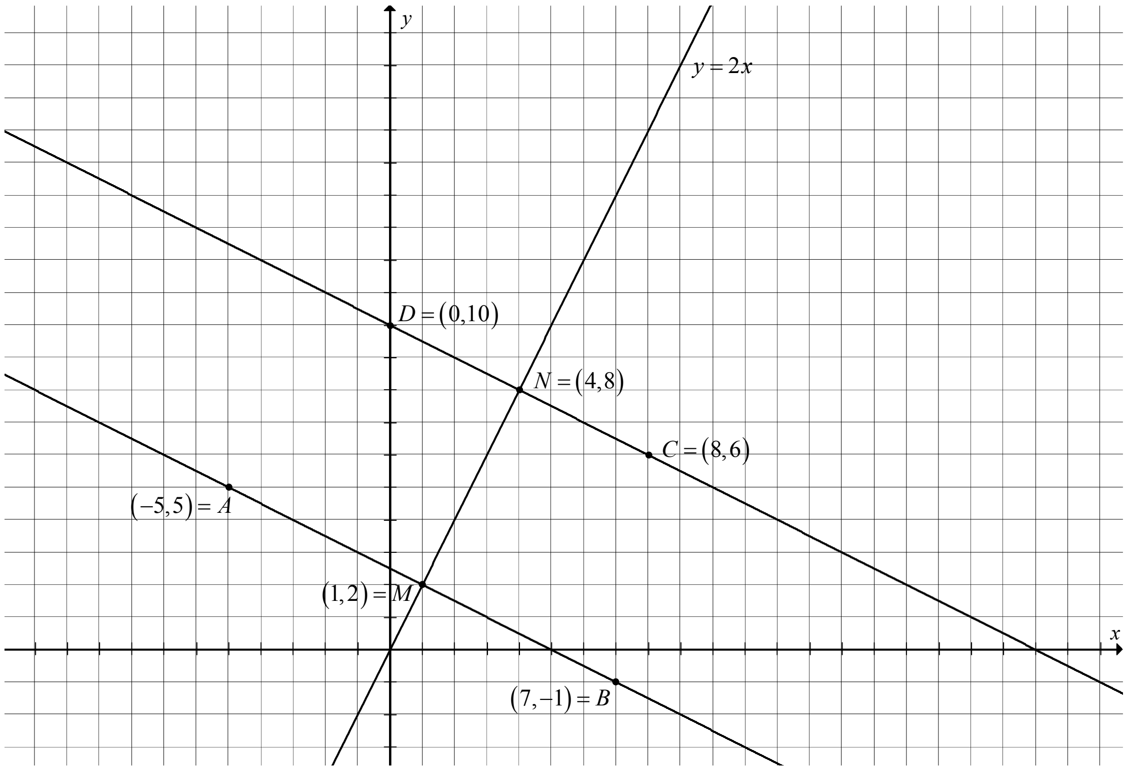
Obliczenie: $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Uwaga:

1. Jeżeli zdający w obliczeniach popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, to przyznajemy **4 punkty**.

Zadanie 8. (*5 pkt*)

Punkty $A=(-5,5)$, $C=(8,6)$ są przeciwległymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Prosta o równaniu $y=2x$ jest osią symetrii tego trapezu. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D oraz pole tego trapezu.



<u>I sposób rozwiązania</u> (punkty symetryczne względem osi symetrii)

Wyznaczamy równania prostych AB i CD prostopadłych do osi symetrii trapezu.

<u>prosta AB</u>

$$y=-\frac{1}{2}x+b$$

$$\frac{5}{2}=b$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

<u>prosta CD</u>

$$y=-\frac{1}{2}x+b$$

$$10=b$$

$$y=-\frac{1}{2}x+10$$

Wyznaczamy współrzędne punktu M leżącego na prostej AB i osi symetrii trapezu

$$\begin{cases} y=2x \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases} \qquad M=(1,2) \qquad .$$

Punkt B leży na prostej AB, $B=\left(x,-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)$, $|AM|=|MB|$ możemy więc zapisać równość

$$(1+5)^2+(2-5)^2=(x-1)^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x-2\right)^2.$$

$$x^2-2x-35=0$$

$$x_1=-5 \qquad x_2=7$$

albo

wykorzystujemy własność: punkt M jest środkiem odcinka AB: $(1,2)=\left(\frac{-5+x_B}{2},\frac{5+y_B}{2}\right)$

Współrzędne punktu B to $B=(7,-1)$.

Analogicznie postępujemy przy obliczeniu współrzędnych wierzchołka D.
Wyznaczamy współrzędne punktu N leżącego na prostej CD i osi symetrii trapezu.

$$\begin{cases} y=2x \\ y=-\frac{1}{2}x+10 \end{cases} \qquad N=(4,8)$$

D leży na prostej CD, $D=\left(x,-\frac{1}{2}x+10\right)$ $\qquad |CN|=|ND|$

$$(4-8)^2+(8-6)^2=(x-4)^2+\left(10-\frac{1}{2}x-8\right)^2$$

$$\frac{5}{4}x^2-10x=0$$

$x=0$ lub $x=8$

albo

wykorzystujemy własność: punkt N jest środkiem odcinka CD: $(4,8)=\left(\frac{8+x_D}{2},\frac{6+y_D}{2}\right)$

Współrzędne punktu D to $D=(0,10)$.

W celu wyznaczenia pola trapezu musimy obliczyć długości podstaw i wysokości trapezu.

$|AB|=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$ $\qquad$ $|CD|=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Długość wysokości h trapezu jest równa, np. odległości wierzchołka C od prostej AB.

$$h=\frac{\left|4+6-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=3\sqrt{5}$$

Obliczamy pole trapezu $P=\frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2}\cdot 3\sqrt{5}=75$.

<u>Odpowiedź:</u> Pole tego trapezu $P=75$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wyznaczenie równań prostych AB i CD: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ $\quad y=-\frac{1}{2}x+10$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktów M i N: $M=(1,2)$, $N=(4,8)$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie współrzędnych punktów B i D jako symetrycznych do punktów A i C względem prostej $y = 2x$: $B = (7, -1)$, $D = (0, 10)$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Obliczenie pola trapezu $P = 75$ oraz podanie współrzędnych $B = (7, -1)$, $D = (0, 10)$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający nie wyznaczy współrzędnych wierzchołków B i D, ale obliczy pole trapezu, to przyznajemy **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie długości podstaw oraz wysokość trapezu i nie obliczy pola trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu długości podstaw lub wysokości trapezu i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu, to przyznajemy **4 punkty.**

II sposób rozwiązania (prosta i okrąg)
Niech $S = (a, 2a)$ oznacza środek okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.

Środek okręgu opisanego na trapezie leży na osi symetrii trapezu i jest równoodległy od punktów A i C, więc $|AS| = |CS|$.

$$(a+5)^2 + (2a-5)^2 = (a-8)^2 + (2a-6)^2$$
$$30a = 50$$
$$a = \frac{5}{3}$$

Środek okręgu $S = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

Obliczamy długość promienia okręgu opisanego na trapezie równoramiennym.

$$r = |AS| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}+5\right)^2 + \left(\frac{10}{3}-5\right)^2} = \frac{5\sqrt{17}}{3}.$$

Wyznaczamy równania prostych AB i CD prostopadłych do osi symetrii trapezu.

prosta AB

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$
$$\frac{5}{2} = b$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

prosta CD

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$
$$10 = b$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 10$$

Obliczamy współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu rozwiązując układy równań.

wierzchołek B

$$\begin{cases} \left(x-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

wierzchołek D

$$\begin{cases} \left(x-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + 10 \end{cases}$$

$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{425}{9}$

$x^2-2x-35=0$

$x_1=-5 \qquad x_2=7$

$\begin{cases} x=-5 \\ y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=7 \\ y=-1 \end{cases}$

$A=(-5,5) \qquad B=(7,-1)$

$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{20}{3}\right)^2=\frac{425}{9}$

$\frac{5}{4}x^2-10x=0$

$x_1=0 \qquad x_2=8$

$\begin{cases} x=0 \\ y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$

$D=(0,10) \qquad C=(8,6)$

W celu wyznaczenia pola trapezu obliczamy długości podstaw i wysokość trapezu.

$|AB|=\sqrt{144+36}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$ $\qquad$ $|CD|=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Wysokość h trapezu jest równa odległości wierzchołka C od prostej AB

$$h=\frac{\left|4+6-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=3\sqrt{5}.$$

Obliczamy pole trapezu $P=\frac{\sqrt{180}+\sqrt{80}}{2}\cdot 3\sqrt{5}=75$.

Odpowiedź: Pole tego trapezu jest równe 75.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie układu równań lub równania, z którego można wyznaczyć współrzędne środka okręgu np.

$\begin{cases} b=2a \\ (a+5)^2+(b-5)^2=(a-8)^2+(b-6)^2 \end{cases}$ albo $(a+5)^2+(2a-5)^2=(a-8)^2+(2a-6)^2$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie współrzędnych środka okręgu $S=\left(\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$ oraz promienia okręgu $r=\frac{5\sqrt{17}}{3}$ i podanie równania okręgu $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{425}{9}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie współrzędnych punktów B i D, np. poprzez rozwiązanie układów równań:

$\begin{cases} \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{425}{9} \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{425}{9} \\ y=-\frac{1}{2}x+10 \end{cases}$ $:\ B=(7,-1),\ D=(0,10)$

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie pola trapezu $P=75$ oraz podanie współrzędnych $B=(7,-1)$, $D=(0,10)$.

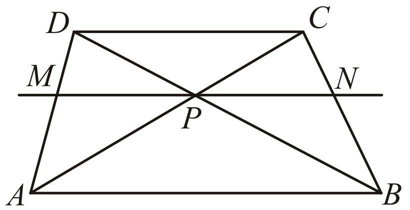
Uwagi:

1. Jeżeli zdający nie wyznaczy współrzędnych wierzchołków *B* i *D,* ale obliczy pole trapezu, to przyznajemy **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie długości podstaw oraz wysokość trapezu i nie obliczy pola trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu długości podstaw lub wysokości trapezu i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu, to przyznajemy **4 punkty.**

Zadanie 9. (*3 pkt*)

Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Prosta równoległa do podstaw trapezu, przechodząca przez punkt P, przecina ramiona AD i BC odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że $|MP| = |NP|$.

Rozwiązanie



Założenie: AC, BD przekątne trapezu $ABCD$,
P – punkt przecięcia przekątnych,
MN prosta równoległa do podstaw trapezu, punkt P leży na prostej MN.

Teza: $|MP| = |NP|$.

Dowód:

Trójkąt ABD jest podobny do trójkąta MPD (*kkk*), więc $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|MD|}{|AD|}$.

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta PNC (*kkk*), więc $\frac{|PN|}{|AB|} = \frac{|NC|}{|BC|}$.

Z twierdzenia Talesa dla prostych AD i BC przeciętych prostymi równoległymi AB, MN i DC zapiszemy proporcję $\frac{|MD|}{|AD|} = \frac{|NC|}{|BC|}$.

Z zapisanych proporcji wnioskujemy, że $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|PN|}{|AB|}$, stąd $|MP| = |NP|$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1pkt

Zauważenie dwóch par trójkątów podobnych: ABD i MPD oraz ABC i PNC i zapisanie proporcji $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|MD|}{|AD|}$, $\frac{|PN|}{|AB|} = \frac{|NC|}{|BC|}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Skorzystanie z twierdzenia Talesa dla prostych AD i BC przeciętych prostymi równoległymi AB, MN i DC i zapisanie proporcji $\frac{|MD|}{|AD|} = \frac{|NC|}{|BC|}$.

Uwaga:

Zdający może skorzystać z proporcji $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|BN|}{|NC|}$ i albo z niej wyprowadzić żądaną proporcję albo do niej sprowadzić żądaną proporcję.

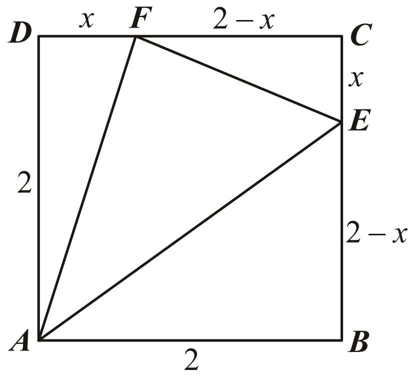
Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zapisanie równości $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|NP|}{|AB|}$ i wyprowadzenie wniosku, że $|MP| = |NP|$.

Zadanie 10. *(5 pkt)*

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku równym 2. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F takie, że $|CE| = |DF| = x$. Oblicz wartość x, dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze i oblicz to pole.

Rozwiązanie



Z warunków zadania $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = 2$, $|CE| = x$ i $|DF| = x$ $\quad 0 \le x \le 2$.

Określamy długość odcinków $|BE|$ i $|CF|$: $|BE| = 2 - x$, $|CF| = 2 - x$.

Obliczamy pole trójkąta AEF.

$$P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - PC_{CEF} - P_{ADF} = 4 - \frac{1}{2}(2-x)\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot x\cdot(2-x) - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot x = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

Pole trójkąta AEF jest funkcją zmiennej x: $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ dla $x \in \langle 0, 2\rangle$. Funkcja ta osiąga najmniejszą wartość dla $x = -\frac{-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1$. Wówczas pole trójkąta AEF jest równe $1\frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie, że $P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ADF} - P_{CEF} - P_{ABE}$ lub $P_{AEF} = P_{ABCD} - (P_{ADF} + P_{CEF} + P_{ABE})$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie pól trójkątów ADF, CEF i ABE: $P_{\Delta ADF} = x$, $P_{\Delta ABE} = 2 - x$

i $P_{\Delta CEF} = \frac{-x^2 + 2x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie P_{AEF} jako funkcji x: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Wyznaczenie x, dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x = 1$.

Obliczenie pola trójkąta AEF: $1\frac{1}{2}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu sumy pól trójkątów *ADF*, *ABE* i *CEF* i rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd w obliczeniu odciętej wierzchołka paraboli i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole trójkąta *AEF*, to otrzymuje **4 punkty**.
3. Nie wymagamy uzasadnienia, że dla znalezionej wartości $x=1$ funkcja przyjmuje minimum (a więc stwierdzenia, że ramiona paraboli są skierowane do góry, czy uzasadnienia, że w jedynym znalezionym miejscu zerowym pochodnej funkcja ma minimum).
4. Jeżeli zdający wyznaczy wartość *x,* dla której pole trójkąta *AEF* jest najmniejsze i nie obliczy pola tego trójkąta, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 11. (*4 pkt*)

Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wszystkich cyfr wylosowanej liczby jest równa 7.

<u>Rozwiązanie</u>

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czteroelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1,2,3\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny, $|\Omega| = 3^4 = 81$.

Zauważmy, że zdarzeniu A - suma wszystkich czterech cyfr wylosowanej liczby jest równa 7, odpowiada sytuacji, gdy w zapisie liczby występują cyfry 3,2,1,1, albo 1,2,2,2 w dowolnej kolejności.

Stąd $|A| = 4\cdot 3\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 16$ i $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{81}$.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zdający zapisze $|\Omega| = 3^4$ albo poda rozkład 7= 1+1+2+3=1+2+2+2 i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze $|\Omega| = 3^4$ i poda rozkład 7= 1+1+2+3=1+2+2+2 i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- Zdający obliczy $|A| = 12 + 4 = 16$ i nie obliczy prawdopodobieństwa.

albo

- Zdający obliczy prawdopodobieństwo $P(A)$ z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa: $P(A) = \frac{16}{3^4}$ lub $P(A) = \frac{16}{81}$.

<u>Uwagi:</u>

1. Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy obliczy prawdopodobieństwo tylko dla jednego przypadku:

- 7= 1+1+2+3 , $|A| = 12$, zatem $P(A) = \frac{12}{3^4}$

albo

- 7= 1+2+2+2, $|A| = 4$, zatem $P(A) = \frac{4}{3^4}$

2. Zdający otrzymuje 3 punkty, gdy obliczy prawdopodobieństwo $P(A)$ z błędem rachunkowym
3.

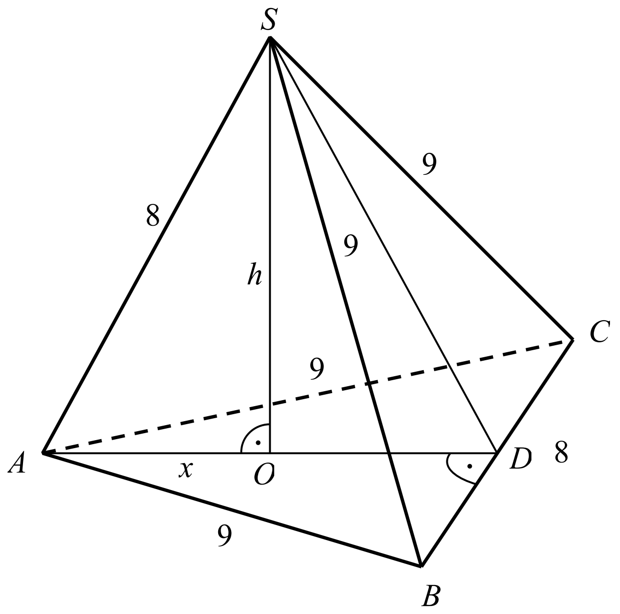
Zadanie 12. *(4 pkt)*

W ostrosłupie trójkątnym $ABCS$ o podstawie ABC i wierzchołku S dane są: $|AB| = |AC| = |BS| = |CS| = 9$ i $|AS| = |BC| = 8$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

<u>**I sposób** (ostrosłup jako „samodzielna bryła”)</u>

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BDS obliczamy wysokość ściany bocznej BCS:



$|SD| = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{65}$

Trójkąty BCS i BCA są przystające, więc

$|AD| = |SD| = \sqrt{65}$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach AOS i ODS mamy

$h^2 + x^2 = 8^2$ i $h^2 + \left(\sqrt{65} - x\right)^2 = \sqrt{65}^2$

Stąd $h^2 = 64 - x^2$ i $64 - x^2 + \left(\sqrt{65} - x\right)^2 = 65$

$$64 - x^2 + 65 - 2\sqrt{65}x + x^2 = 65$$

$x = \frac{32}{\sqrt{65}}$, więc $h^2 = 64 - \left(\frac{32}{\sqrt{65}}\right)^2$,

a stąd $h = \frac{56}{\sqrt{65}}$.

Objętość ostrosłupa jest więc równa $V = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{56}{\sqrt{65}} = \frac{224}{3} = 74\frac{2}{3}$

Uwaga. Wysokość ostrosłupa możemy obliczyć inaczej, np.

A. Ze wzoru Herona obliczamy pole trójkąta ADS

$p=\frac{1}{2}\left(8+\sqrt{65}+\sqrt{65}\right)=4+\sqrt{65}$,

$P_{ADS}=\sqrt{\left(4+\sqrt{65}\right)\left(4+\sqrt{65}-\sqrt{65}\right)\left(4+\sqrt{65}-\sqrt{65}\right)\left(4+\sqrt{65}-8\right)}=\sqrt{\left(4+\sqrt{65}\right)\left(\sqrt{65}-4\right)\cdot 4\cdot 4}=4\sqrt{49}=28$

ale $P_{ADS}=\frac{1}{2}\sqrt{65}\cdot h$, więc $\frac{1}{2}\sqrt{65}\cdot h=28$, stąd $h=\frac{56}{\sqrt{65}}$.

B. Trójkąt *ADS* jest równoramienny, więc z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADE*, gdzie *E* jest środkiem boku *AS* obliczamy wysokość *DE* trójkąta *ADS*

$|DE|=\sqrt{\left(\sqrt{65}\right)^2-4^2}=7$

Wykorzystując dwukrotnie wzór na pole trójkąta *ADS* mamy

$P_{ADS}=\frac{1}{2}|AD|\cdot h$ oraz $P_{ADS}=\frac{1}{2}|AS|\cdot|DE|$, stąd $\frac{1}{2}\sqrt{65}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7$, więc $h=\frac{56}{\sqrt{65}}$

To samo uzyskamy wykorzystując podobieństwo trójkątów *AOE* i *AED* (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *A*)

$\frac{|OS|}{|AS|}=\frac{|ED|}{|AD|}$, czyli $\frac{h}{8}=\frac{7}{\sqrt{65}}$, stąd $h=\frac{56}{\sqrt{65}}$

Możemy też zapisać sinus kąta przy wierzchołku *A* raz w trójkącie prostokątnym *AOS*, drugi raz w trójkącie prostokątnym *AED*

$\sin|\sphericalangle A|=\frac{|OS|}{|AS|}$ oraz $\sin|\sphericalangle A|=\frac{|ED|}{|AD|}$, stąd $\frac{|OS|}{|AS|}=\frac{|ED|}{|AD|}$, czyli $\frac{h}{8}=\frac{7}{\sqrt{65}}$, więc $h=\frac{56}{\sqrt{65}}$

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa $P=4\sqrt{65}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- obliczenie wysokości ostrosłupa $h=\frac{56\sqrt{65}}{65}$ i nie obliczenie pola podstawy ostrosłupa

albo

- obliczenie pola podstawy ostrosłupa i wskazanie metody obliczenia wysokości ostrosłupa.

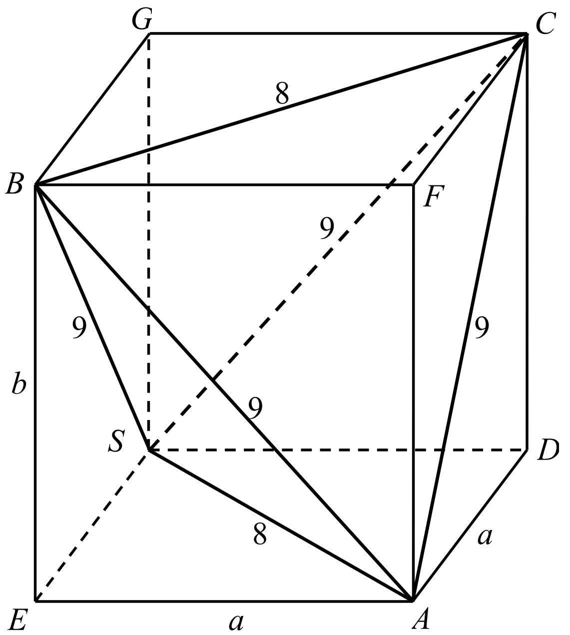
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa $h=\frac{56\sqrt{65}}{65}$ oraz pola podstawy ostrosłupa i nie obliczenie objętości lub obliczenie objętości ostrosłupa z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V=\frac{224}{3}$.

II sposób (ostrosłup wpisany w prostopadłościan)



Wpiszmy ostrosłup w prostopadłościan o podstawie kwadratowej (zobacz rysunek). Ze wzoru na długość przekątnej kwadratu obliczamy długość krawędzi podstawy prostopadłościanu

$a = \frac{8}{\sqrt{2}}$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABE obliczamy wysokość tego prostopadłościanu

$b = \sqrt{9^2 - \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{81 - 32} = 7$.

Objętość ostrosłupa $ABCS$ obliczymy odejmując od objętości prostopadłościanu objętości czterech przystających ostrosłupów: $AESB$, $ADSC$, $BFCA$ i $BGCS$. Wysokość każdego z tych ostrosłupów jest zarazem wysokością prostopadłościanu, a podstawą każdego z nich jest połowa podstawy prostopadłościanu, więc

$$V_{ABCS} = V - 4 \cdot \frac{1}{6} V = \frac{1}{3} V = \frac{1}{3} \cdot a^2 b = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 7 = \frac{224}{3} = 74\frac{2}{3}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ... 1 pkt

Wpisanie ostrosłupa w prostopadłościan o podstawie kwadratowej.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ... 2 pkt

Obliczenie długości krawędzi prostopadłościanu $a = \frac{8}{\sqrt{2}}$ i $b = 7$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ... 3 pkt

Zapisanie objętości ostrosłupa $ABCS$ jako różnicy objętości prostopadłościanu i czterech przystających ostrosłupów.

Rozwiązanie pełne ... 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{224}{3}$.