

# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ 2014/2015

## MATEMATYKA POZIOM PODSTAWOWY

### ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMATY PUNKTOWANIA

## KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Odpowiedź	B	D	A	A	B	B	B	C	C	A	C	B	B	A	D	B	D	A	A	B	D	B	A

### Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1.7. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd względny przybliżenia.

#### Odpowiedź

B

#### Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

### Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe.

#### Odpowiedź

D

#### Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

### Zadanie 3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia. 1.3. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

#### Odpowiedź

A

#### Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 4. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia. 3.3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

**Odpowiedź**

A

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 5. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach. 4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych.

**Odpowiedź**

B

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 6. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw. 4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$ , $y = f(x) + a$ , $y = -f(x)$ , $y = f(-x)$ .

**Odpowiedź**

B

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 7. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: 6) wykorzystuje definicję logarytmu. 4) stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

**Odpowiedź**

B

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 8. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$ , $y = f(x) + a$ , $y = -f(x)$ , $y = f(-x)$ .

**Odpowiedź**

C

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 9. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.7. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. 3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą. 1.8. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.

**Odpowiedź**

C

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 10. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.10. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

**Odpowiedź**

A

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 11. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej.

**Odpowiedź**

C

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 12. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

**Odpowiedź**

B

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 13. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.4. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

**Odpowiedź**

B

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 14. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.2. Równania i nierówności. Zdający wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. 4.7. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

**Odpowiedź**

A

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 15. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.2. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych).

**Odpowiedź**

D

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 16. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

**Odpowiedź**

B

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 17. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.2. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu.

**Odpowiedź**

D

### Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

#### Zadanie 18. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od $0^\circ$ do $180^\circ$ .

### Odpowiedź

A

### Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

#### Zadanie 19. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7. Planimetria. Zdający: 1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym. 4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

### Odpowiedź

A

### Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

#### Zadanie 20. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.2. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

### Odpowiedź

B

### Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 21. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	III etap edukacyjny 9.4. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych. IV etap edukacyjny – poziom podstawowy 10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych.

**Odpowiedź**

D

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 22. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	III etap edukacyjny 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli.

**Odpowiedź**

B

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 23. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający: 3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą). 6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

**Odpowiedź**

A

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi



## KLUCZ OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

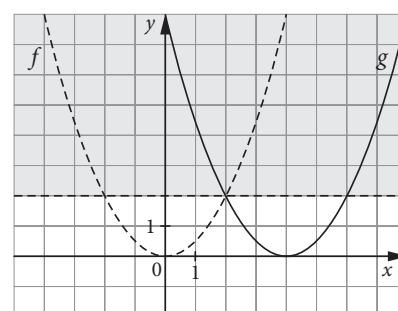
### Zadanie 24. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający: 7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru. 3) odczytuje z wykresu własności funkcji. 4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$ , $y = f(x) + a$ , $y = -f(x)$ , $y = f(-x)$ .

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Rysujemy wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ , a następnie przesuwamy go o 4 jednostki w prawo, otrzymując wykres funkcji  $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ .  
 Z wykresu odczytujemy, że  $g(x) > 2$  dla  $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$ .



#### II sposób

Z informacji o przesunięciu wnioskujemy, że  $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$  i zapisujemy nierówność:

$$\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$$

$$(x-4)^2 > 4$$

$$x^2 - 8x + 16 > 4$$

$$x^2 - 8x + 12 > 0$$

$$\Delta = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{8-4}{2} = 2 \text{ lub } x_2 = \frac{8+4}{2} = 6$$

$$x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$$

$$\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$$

$$(x-4)^2 > 4$$

albo  $x - 4 > 2$  lub  $x - 4 < -2$

$$x > 6 \text{ lub } x < 2$$

$$x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$$

### Schemat oceniania obu sposobów

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

gdy narysuje wykres funkcji  $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$  lub zapisze nierówność  $\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$ .

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy zapisze zbiór rozwiązań:  $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$ .

### Zadanie 25. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.8. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych.

**Przykładowe rozwiązania**

**I sposób**

Zakładamy, że  $x \neq -3$  i stosujemy wzór skróconego mnożenia  $\frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = 1-x$ , skracamy ułamek i otrzymujemy  $x-3 = 1-x$ , więc  $x = 2$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
 gdy założy, że  $x \neq -3$  i uprości równanie do postaci  $x-3 = 1-x$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
 gdy wyznaczy rozwiązanie równania:  $x = 2$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający uprości równanie bez założenia  $x \neq -3$  i wyznaczy rozwiązanie równania:  $x = 2$ , to otrzymuje **1 punkt**.

**II sposób**

Zakładamy, że  $x \neq -3$  i przekształcamy równanie do postaci  $x^2 - 9 = (1-x)(x+3)$ , mnożymy wyrażenia w nawiasach i redukujemy wyrazy podobne

$$x^2 - 9 = -x^2 - 2x + 3$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe

$$\Delta = 25, x_1 = -3, x_2 = 2$$

Ponieważ  $x_1 = -3$  nie spełnia założenia, rozwiązaniem równania jest  $x = 2$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
 gdy założy, że  $x \neq -3$  i uprości równanie do postaci  $2x^2 + 2x - 12 = 0$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
 gdy rozwiąże równanie kwadratowe, odrzuci rozwiązanie  $x_1 = -3$  i zapisze odpowiedź  $x = 2$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający nie napisze założenia  $x \neq -3$  i poda odpowiedź  $x_1 = -3, x_2 = 2$ , to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 26. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób (model klasyczny)

Z reguły mnożenia wyznaczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli  $|\Omega| = 10 \cdot 9 = 90$ . Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu 2 czarnych piłeczek. Z reguły mnożenia obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , czyli  $|A| = 7 \cdot 6 = 42$ . Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest zatem równe  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$ .

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
 gdy obliczy  $|\Omega| = 90$  i  $|A| = 42$  lub też  $|\Omega| = 45$  i  $|A| = 21$  (w doświadczeniu losowym nie jest istotna kolejność losowania).

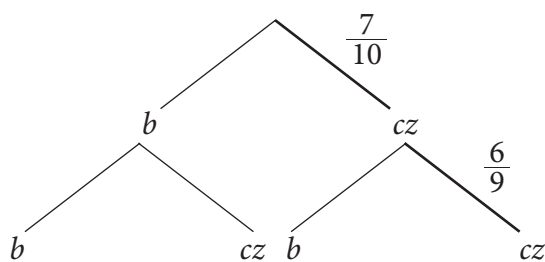
**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
 gdy obliczy prawdopodobieństwo  $P(A) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$ .

#### Uwagi

- Jeżeli zdający nie skróci ułamka i poda odpowiedź  $P(A) = \frac{42}{90}$  lub w innej równoważnej postaci, to otrzymuje **2 punkty**.
- Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia  $|\Omega|$  i  $|A|$ , to otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli z zapisu rozwiązania nie wynika jasno, że zdający rozróżnia pojęcia przestrzeni zdarzeń elementarnych oraz zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  (np. pojawi się jedynie zapis  $10 \cdot 9 = 90$  albo  $7 \cdot 6 = 42$  bez żadnego opisu czy powszechnie używanej symboliki), to otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający uzyska wynik  $P(A) > 1$ , to otrzymuje **0 punktów**.

#### II sposób (metoda drzewa)

Losowanie z pudełka kolejno 2 piłeczek bez zwracania możemy zilustrować za pomocą drzewa, gdzie  $b$  oznacza wylosowanie białej piłeczki, a  $cz$  – czarnej piłeczki. Pogrubiona gałąź drzewa odpowiada zdarzeniu  $A$  polegającemu na wylosowaniu 2 czarnych piłeczek.



Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe  $P(A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$ .

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
 gdy narysuje drzewo i poprawnie zaznaczy prawdopodobieństwa przynajmniej na odcinkach gałęzi odpowiadającej zdarzeniu  $A$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
 gdy obliczy prawdopodobieństwo  $P(A) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$ .

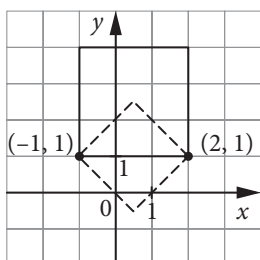
**Uwaga**

Jeżeli zdający nie narysuje drzewa i zapisze  $P(A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 27. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.

**Przykładowe rozwiązanie**



Zaznaczamy dane punkty w układzie współrzędnych i rysujemy odcinek o końcach w tych punktach. Oznaczamy długość odcinka przez  $a$ , wtedy  $a = 3$ .

Zauważamy, że są dwie możliwości – zaznaczony odcinek może być:

- bokiem kwadratu – wtedy jego pole jest równe  $P = a^2 = 9$ ,
- przekątną kwadratu – wtedy jego bok wynosi  $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$  i pole  $P = \frac{9}{2}$ .

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**  
 gdy poprawnie obliczy odległość między danymi punktami oraz pole tylko jednego kwadratu.

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**  
 gdy poprawnie obliczy pola obu kwadratów.

**Zadanie 28. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	1.5. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje podstawowe własności potęg. 3.4. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

**Przykładowe rozwiązania**

**I sposób**

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = (3^9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (27^7) = 3^{18} - 8 \cdot 3^{21}. \text{ Stąd } \Delta = 3^{18}(1 - 8 \cdot 3^3). \text{ Ostatecznie } \Delta = -215 \cdot 3^{18} < 0.$$

Ponieważ  $\Delta < 0$ , więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 pkt**

gdy zapisze wyróżnik funkcji kwadratowej w postaci  $\Delta = 3^{18} - 8 \cdot 3^{21}$ .

**Zdający otrzymuje** ..... **2 pkt**

gdy doprowadzi wyróżnik do postaci  $\Delta = -215 \cdot 3^{18}$  i zapisze wniosek: ponieważ  $\Delta < 0$ , więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

**II sposób**

Ponieważ  $a = 2 > 0$ , więc parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej  $f$  ma ramiona skierowane do góry. Zatem  $f$  nie ma miejsc zerowych, gdy druga współrzędna wierzchołka  $y_w > 0$ .

Obliczamy:  $x_w = \frac{3^9}{4}$ ,  $y_w = f(x_w) = 2 \cdot \frac{3^{18}}{16} - \frac{3^{18}}{4} + 27^7 = \frac{3^{18}}{8} - \frac{3^{18}}{4} + 3^{21}$ .

Stąd  $y_w = 3^{18} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3^3 \right)$ . Ostatecznie  $y_w = \frac{215}{8} \cdot 3^{18} > 0$ , więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 pkt**

gdy zapisze drugą współrzędną wierzchołka w postaci  $y_w = \frac{3^{18}}{8} - \frac{3^{18}}{4} + 3^{21}$

lub

gdy zauważy, że ramiona paraboli są skierowane do góry oraz zapisze wniosek: aby funkcja nie miała miejsc zerowych, musi być spełniony warunek  $y_w > 0$  (ale nie obliczy  $y_w$ ).

**Zdający otrzymuje** ..... **2 pkt**

gdy obliczy  $y_w = \frac{215}{8} \cdot 3^{18}$  i zapisze wniosek: ponieważ parabola będąca wykresem funkcji  $f$  ma ramiona skierowane do góry i  $y_w > 0$ , więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

**Zadanie 29. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

**Przykładowe rozwiązanie**

Zarobki Bartka za każdy dzień pracy tworzą 40-wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym  $a_1 = 20$  zł i  $r = 3$  zł. Wypłata po 8 tygodniach pracy jest równa sumie 40 wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zatem  $S_{40} = \frac{2 \cdot 20 + 39 \cdot 3}{2} \cdot 40 = 3140$ , więc po 8 tygodniach pracy Bartek otrzyma 3140 zł.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 pkt**

gdy zauważy, że zarobki za kolejne dni pracy tworzą 40-wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym  $a_1 = 20$  zł i  $r = 3$  zł.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 pkt**

gdy obliczy wartość sumy  $S_{40} = 3140$ .

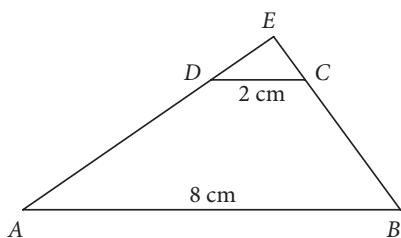
Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

**Zadanie 30. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.3. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

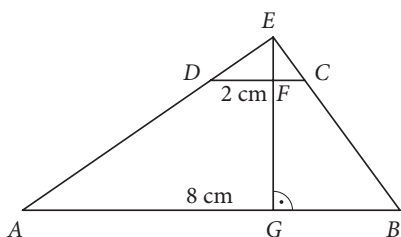
**Przykładowe rozwiązania**

**I sposób**



Trójkąt  $ABE$  jest podobny do trójkąta  $DCE$  w skali  $k = \frac{|AB|}{|DC|} = 4$ . Z zależności między polami figur podobnych mamy:  $P_{ABE} = k^2 \cdot P_{DCE} = 32 \text{ cm}^2$ , więc  $P_{ABCD} = P_{ABE} - P_{DCE} = 30 \text{ cm}^2$ .

**II sposób**



Trójkąt  $ABE$  jest podobny do trójkąta  $DCE$  w skali  $k = \frac{|AB|}{|DC|} = 4$ . Pole trójkąta  $DCE$  jest równe  $2 \text{ cm}^2$ , więc wysokość  $|EF| = 2 \text{ cm}$ . Z podobieństwa rozważanych trójkątów otrzymujemy  $|EG| = k \cdot |EF| = 8 \text{ cm}$ , zatem wysokość  $FG$  trapezu  $ABCD$  jest równa  $6 \text{ cm}$ . Stąd  $P_{ABCD} = 30 \text{ cm}^2$ .

**Schemat oceniania obu sposobów**

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**  
 gdy stwierdzi, że trójkąt  $ABE$  jest podobny do trójkąta  $DCE$  w skali  $k = 4$ .

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**  
 gdy obliczy pole trapezu  $P_{ABCD} = 30 \text{ cm}^2$ .

**Zadanie 31. (0–4)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	III etap edukacyjny 7.7. Równania. Zdający za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

### Przykładowe rozwiązanie

Zaczynamy od uzgodnienia jednostek: prędkość jest w  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ , więc czas  $4 \text{ min} = \frac{1}{15} \text{ h}$ . Wprowadzamy oznaczenia:

$s$  – odległość hali od domu,

$t$  – czas pieszej wędrówki do hali,

$t - \frac{1}{15}$  – czas biegu do hali.

Na podstawie wzoru  $s = v \cdot t$  otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} s = 4t \\ s = 6\left(t - \frac{1}{15}\right) \end{cases}$$

$$4t = 6\left(t - \frac{1}{15}\right)$$

$$t = \frac{1}{5} [\text{h}]$$

Zatem odległość hali od domu Janka  $s = \frac{4}{5} \text{ km} = 800 \text{ m}$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Uzgodnienie jednostek, np. czas w godz. lub prędkość w  $\frac{\text{m}}{\text{min}}$  i wprowadzenie oznaczeń, np.:

$s$  – odległość hali od domu,

$t$  – czas pieszej wędrówki do hali,

$t - \frac{1}{15}$  – czas biegu do hali.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zapisanie układu równań, np.:  $\begin{cases} s = 4t \\ s = 6\left(t - \frac{1}{15}\right) \end{cases}$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:  $4t = 6\left(t - \frac{1}{15}\right)$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Obliczenie odległości między domem Janka a halą:  $s = \frac{4}{5} \text{ km} = 800 \text{ m}$ .

### Uwaga

Zdający może wprowadzić inne oznaczenia i zapisać równoważny układ równań lub bezpośrednio

zapisać równanie z jedną niewiadomą, np.  $\frac{s}{4} - \frac{s}{6} = \frac{4}{60}$ .

### Zadanie 32. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej). 5) wyznacza współrzędne środka odcinka. 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt. 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych.

## Przykładowe rozwiązania

### I sposób

a) Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $a_{AB} = \frac{-4-1}{-2-8} = \frac{1}{2}$  oraz współrzędne środka odcinka  $AB$ :  $S = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-4+1}{2}\right)$ , stąd  $S = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$ . Prosta będąca osią symetrii trapezu równoramiennego  $ABCD$  jest prostopadła do  $AB$  i przechodzi przez punkt  $S$ , więc  $y = -2x + b$ ,  $-\frac{3}{2} = -2 \cdot 3 + b$ , stąd  $b = \frac{9}{2}$ .  
 Oś symetrii trapezu ma postać  $y = -2x + \frac{9}{2}$ .

b) Punkt  $O$  będący środkiem podstawy  $CD$  tego trapezu jest punktem przecięcia osi symetrii z podstawą  $CD$ . Prosta  $CD$  jest równoległa do  $AB$  i przechodzi przez punkt  $C$ , więc  $y = \frac{1}{2}x + b$ ,  $4 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$ , stąd  $b = 2$ . Prosta  $CD$  jest zatem dana równaniem  $y = \frac{1}{2}x + 2$ .  
 Współrzędne punktu  $O$  obliczymy, rozwiązując układ równań zbudowany z równań prostej  $CD$  i osi symetrii trapezu  $ABCD$ :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + \frac{9}{2} \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para  $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$ , czyli  $O = \left(1, \frac{5}{2}\right)$  jest środkiem podstawy  $CD$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej  $AB$ :  $a_{AB} = \frac{1}{2}$  lub współrzędnych punktu  $S = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$  – środka podstawy  $AB$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Wyznaczenie równania osi symetrii trapezu:  $y = -2x + \frac{9}{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Wykorzystanie warunku równoległości lub prostopadłości do wyznaczenia równania prostej

zawierającej podstawę  $CD$ :  $y = \frac{1}{2}x + 2$  i zapisanie układu równań  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + \frac{9}{2} \end{cases}$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania** ..... 4 pkt

Rozwiązanie zadania do końca z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu  $O = \left(1, \frac{5}{2}\right)$  – środka podstawy  $CD$  trapezu  $ABCD$ .

### II sposób

b) Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $a_{AB} = \frac{-4-1}{-2-8} = \frac{1}{2}$ . Prosta  $CD$  jest równoległa do  $AB$  i przechodzi przez punkt  $C$ , więc  $y = \frac{1}{2}x + b$ ,  $4 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$ , stąd  $b = 2$ . Prosta  $CD$  jest więc dana równaniem  $y = \frac{1}{2}x + 2$ .



Następnie wyznaczamy współrzędne punktu  $D$ . Należy on do prostej  $CD$ , więc jego współrzędne można zapisać w postaci  $D = \left(d, \frac{1}{2}d + 2\right)$ . Trapez  $ABCD$  jest równoramienny, zatem zapisujemy równanie:  $|AD| = |BC|$ .

$$\sqrt{(d+2)^2 + \left(\frac{1}{2}d + 2 + 4\right)^2} = \sqrt{(4-8)^2 + (4-1)^2}$$

Obie strony równania są nieujemne, więc możemy je podnieść do kwadratu:

$$(d+2)^2 + \left(\frac{1}{2}d + 2 + 4\right)^2 = 25$$

Stąd po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$$\frac{5}{4}d^2 + 10d + 15 = 0 \quad | \cdot \frac{4}{5}$$

$$d^2 + 8d + 12 = 0$$

$$\Delta = 16, \quad d_1 = -6, \quad d_2 = -2$$

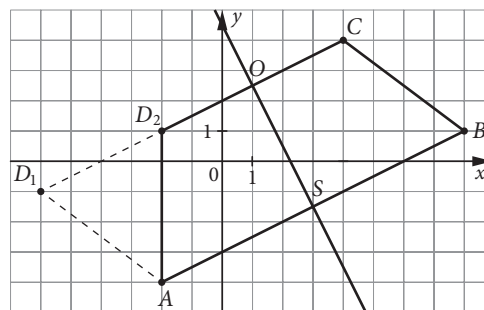
Zatem są dwa takie punkty:  $D_1 = (-6, -1)$  oraz  $D_2 = (-2, 1)$ .

Zauważmy (np. na podstawie rysunku), że  $D_1$  nie spełnia warunków zadania, gdyż  $ABCD_1$  jest równoległobokiem.

Ze wzoru na środek odcinka wyznaczamy:

$$S = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-4+1}{2}\right) = \left(3, -\frac{3}{2}\right) \text{ – środek podstawy } AB$$

oraz  $O = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$  – środek podstawy  $CD_2$ .



a) Wyznaczamy równanie prostej  $OS$  – osi symetrii trapezu  $ABCD_2$ :

$$a_{OS} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{1 - 3} = -2, \quad \frac{5}{2} = -2 + b, \text{ więc } b = \frac{9}{2}, \text{ czyli równanie prostej } OS:$$

$$y = -2x + \frac{9}{2} \text{ – oś symetrii trapezu.}$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego**

**rozwiązania** ..... 1 pkt

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej  $AB$ :  $a_{AB} = \frac{1}{2}$  i wyznaczenie równania prostej  $CD$ :

$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Wykorzystanie własności  $|AD| = |BC|$  i zapisanie równania z jedną niewiadomą, np. w postaci

$$\sqrt{(d+2)^2 + \left(\frac{1}{2}d + 2 + 4\right)^2} = 5.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Obliczenie współrzędnych punktów  $D_1 = (-6, -1)$  oraz  $D_2 = (-2, 1)$  spełniających warunek

$|AD| = |BC|$  i odrzucenie rozwiązania  $D_1$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania** ..... 4 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu  $O = \left(1, \frac{5}{2}\right)$  – środka podstawy  $CD_2$  trapezu  $ABCD_2$

i poprzestanie na tym lub rozwiązanie do końca z błędami rachunkowymi

(nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

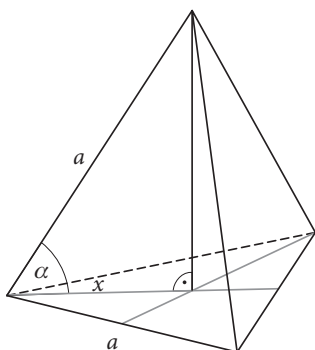
Wyznaczenie równania osi symetrii trapezu:  $y = -2x + \frac{9}{2}$ .

**Zadanie 33. (0–4)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9.2. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami). 6. Trygonometria. Zdający: 4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ . 1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od $0^\circ$ do $180^\circ$ .

**Przykładowe rozwiązania**

**I sposób**



Korzystamy ze wzorów  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  oraz  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$  i przekształcamy wyrażenie:  
 $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$ . Ponieważ  $\cos \alpha = \frac{x}{a}$ , więc obliczamy  $x$ :  
 $x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Stąd  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , zatem wartość wyrażenia  
 $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Wyznaczenie długości odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodem wysokości:

$$x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Przekształcenie wyrażenia  $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha$  do postaci  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

**Uwaga**

Jeśli zdający przekształci wyrażenie do postaci  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$  i nie obliczy wartości  $x$ , to otrzymuje 1 punkt.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Wyznaczenie  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , zastosowanie jedynki trygonometrycznej i zapisanie wyrażenia w postaci  $1 - 2 \cos^2 \alpha$ .

lub

Wyznaczenie  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , skorzystanie z jedynki trygonometrycznej i wyznaczenie  $\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$ .

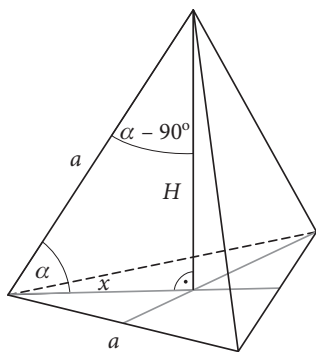
**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie wartości wyrażenia  $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$ .

lub

Obliczenie wartości wyrażenia  $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$ .

**II sposób**



Wprowadzamy oznaczenia (np. jak na rysunku). Obliczamy  $x: x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  oraz z twierdzenia Pitagorasa  $H: \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + H^2 = a^2$ , stąd  $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ . Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy:  $\cos \alpha = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . Zatem wartość wyrażenia  $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Wyznaczenie długości odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości:

$$x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i obliczenie wysokości czworoscianu:  $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznych i wyznaczenie:  $\cos \alpha = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  oraz

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie wartości wyrażenia:  $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$ .