EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA DO 2014

(„STARA MATURA")

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1

MAJ 2018

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0−4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.e).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wyróżniamy na osi liczbowej trzy przedziały: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,3\rangle$, $(3,\infty)$. Rozwiązujemy równanie w tych przedziałach, sprawdzając czy otrzymane rozwiązanie należy do niego.

Dla $x\in(-\infty,-2)$ otrzymujemy równanie $-3x-6=-x+3+11$, a stąd $x=-10$. Liczba -10 spełnia założenia $x\in(-\infty,-2)$, więc jest rozwiązaniem podanego w zadaniu równania.

Dla $x\in\langle -2,3\rangle$ otrzymujemy równanie $3x+6=-x+3+11$, a stąd $x=2$. Liczba 2 spełnia założenia $x\in\langle -2,3\rangle$, więc jest rozwiązaniem podanego w zadaniu równania.

Dla $x\in(3,\infty)$ otrzymujemy równanie $3x+6=x-3+11$, a stąd $x=1$. Liczba 1 nie należy do przedziału $(3,\infty)$, więc nie jest rozwiązaniem podanego równania.

Podane równanie ma zatem dwa rozwiązania $x=-10$ i $x=2$.

II sposób

Rozważamy cztery przypadki $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-3< 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2< 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$..

W pierwszym przypadku: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$ otrzymujemy równanie $3x+6=x-3+11$, a stąd $x=1$.

Liczba ta nie spełnia drugiej nierówności układu, więc nie jest rozwiązaniem podanego równania.

W drugim przypadku: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-3< 0 \end{cases}$ otrzymujemy równanie $3x+6=-x+3+11$, a stąd $x=2$.

Liczba ta spełnia obie nierówności układu, więc jest rozwiązaniem podanego równania.

W trzecim przypadku: $\begin{cases} x+2< 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$ otrzymujemy sprzeczność, ponieważ żadna liczba nie spełnia jednocześnie dwóch warunków: $x<-2$ i $x\ge 3$.

W czwartym przypadku: $\begin{cases} x+2<0 \\ x-3<0 \end{cases}$ otrzymujemy równanie $-3x-6=-x+3+11$, a stąd $x=-10$. Liczba ta spełnia obie nierówności ostatniego układu, więc jest rozwiązaniem równania.

Podane równanie ma zatem dwa rozwiązania $x=-10$ i $x=2$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający

- poprawnie wyróżni na osi liczbowej trzy przedziały, np.: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,3\rangle$, $(3,\infty)$.

albo

- zapisze cztery przypadki np.: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-3<0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2<0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2<0 \\ x-3<0 \end{cases}$.

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy **0 punktów**. Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający

- zapisze równanie w poszczególnych przedziałach, np.:
  dla $x\in(-\infty,-2)$ otrzymujemy równanie $-3x-6=-x+3+11$,
  dla $x\in\langle -2,3\rangle$ otrzymujemy równanie $3x+6=-x+3+11$,
  dla $x\in(3,\infty)$ otrzymujemy równanie $3x+6=x-3+11$,

albo

- zapisze równanie w poszczególnych przypadkach, np.:
  gdy $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$, to wtedy $3x+6=x-3+11$,
  gdy $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-3<0 \end{cases}$, to wtedy $3x+6=-x+3+11$,
  gdy $\begin{cases} x+2<0 \\ x-3\ge 0 \end{cases}$, to wtedy $-3x-6=x-3+11$, (lub stwierdzi, że ten przypadek jest niemożliwy),
  gdy $\begin{cases} x+2<0 \\ x-3<0 \end{cases}$, to wtedy $-3x-6=-x+3+11$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 p.

Zdający poprawnie rozwiąże równania, sprawdzi czy otrzymane liczby spełniają założenia i popełni błąd w jednym z przypadków.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**

Zdający podaje rozwiązania: $x=-10$ i $x=2$.

Uwaga

Jeżeli zdający trzykrotnie poprawnie zapisuje poszczególne przedziały, w każdym z tych przedziałów poprawnie zapisuje i rozwiązuje równanie i w odpowiedzi do zadania podaje: –10, 2, 1, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 2. (0−5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).

Przykładowe rozwiązanie

Oznaczmy przez *r* różnicę ciągu arytmetycznego. Z równania $3a+b+3c=77$ otrzymujemy $3b-3r+b+3b+3r=77$, a stąd $b=11$.
Ciąg geometryczny $(11-r, 12, 22+2r)$ spełnia warunek $144=2(11-r)\cdot(11+r)$. Równanie to ma dwa rozwiązania $r=7$ i $r=-7$.
W pierwszym przypadku otrzymujemy ciąg arytmetyczny $(4,11,18)$ i ciąg geometryczny $(4,12,36)$, a w drugim przypadku otrzymujemy ciąg arytmetyczny $(18,11,4)$ i ciąg geometryczny $(18,12,8)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... **1 p.**

Zdający wykorzystuje definicję ciągu arytmetycznego, np. poprzez wprowadzenie oznaczeń: $a=b-r$, $b=10+r$ i $c=b+r$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 p.**

Zdający zapisuje warunki wystarczające do wyznaczenia wartości b np. równanie z jedną niewiadomą, wynikające z warunku o sumie wyrazów ciągu arytmetycznego: $3b-3r+b+3b+3r=77$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zdający ułoży równanie z jedną niewiadomą, np. $144=2(11-r)\cdot(11+r)$.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 p.**

Zdający

- wyznaczy wartości liczb *a*, *b*, *c* w obu przypadkach i nie poda wyrazów ciągu geometrycznego albo

- wyznaczy wartości liczb a, b, c oraz poda wyrazy ciągu geometrycznego tylko w jednym przypadku.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**

Zdający wyznaczy wartości liczb a, b, c oraz wyrazy ciągu geometrycznego:
$a=4,\ b=11,\ c=18$ i ciąg geometryczny $(4,12,36)$ lub $a=18,\ b=11,\ c=4$ i ciąg geometryczny $(18,12,8)$.

Uwaga

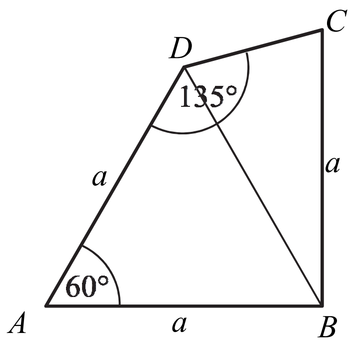
Zapisanie układu równań wynikającego z warunku o sumie wyrazów ciągu arytmetycznego, który wystarcza do wyznaczenia wyrazu b np. $\begin{cases} 7(a+r)=77 \\ b=a+r, \end{cases}$ uznajemy za istotny postęp i przyznajemy w takim przypadku **2 punkty**.

Zadanie 3. (0−5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).

Przykładowe rozwiązania

I sposób – dwa trójkąty: równoboczny oraz równoramienny o kącie między ramionami miary $|\sphericalangle DBC| = 30°$



Trójkąt BAD jest równoramienny, gdyż $|AD|=|AB|=a$. Jego kąt przy wierzchołku A jest równy $|\sphericalangle BAD| = 60°$, więc ten trójkąt jest równoboczny. Zatem $|BD|=a$ oraz $|\sphericalangle ADB| = 60°$. Wobec tego

$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle ADB| = 135° - 60° = 75° \ .$$

Ponieważ $|BD|=a$ i $|BC|=a$, więc trójkąt BCD jest równoramienny. Zatem

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BDC| = 75°,$$

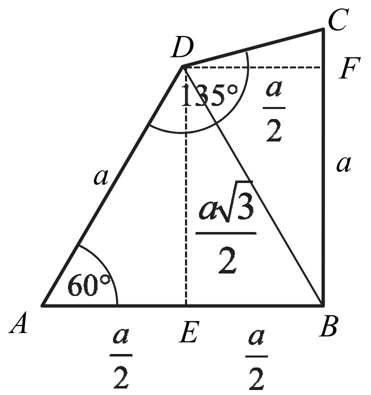
więc

$$|\sphericalangle CBD| = 180^\circ - 2\cdot|\sphericalangle BCD| = 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ.$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 30^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}a^2.$$

<u>II sposób</u> – dwa trójkąty: równoboczny oraz trójkąt o podstawie a i wysokości $\frac{a}{2}$



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Trójkąt BAD jest równoramienny, gdyż $|AD| = |AB| = a$. Jego kąt przy wierzchołku A jest równy $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$, więc ten trójkąt jest równoboczny. Zatem $|BD| = a$ oraz $|\sphericalangle ADB| = 60^\circ$.

Wobec tego

$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle ADB| = 135^\circ - 60^\circ = 75^\circ.$$

Ponieważ $|BD| = a$ i $|BC| = a$, więc trójkąt BCD jest równoramienny. Zatem

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BDC| = 75^\circ,$$

więc

$$|\sphericalangle CBD| = 180^\circ - 2\cdot|\sphericalangle BCD| = 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ$$

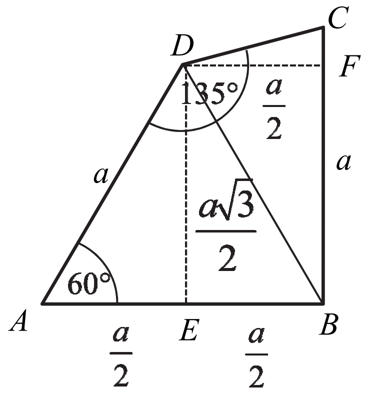
oraz

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC| = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}a^2.$$

III sposób – trójkąt prostokątny AED i trapez prostokątny $EBCD$



Trójkąt BAD jest równoramienny, gdyż $|AD| = |AB| = a$. Jego kąt przy wierzchołku A jest równy $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$, więc ten trójkąt jest równoboczny. Zatem $|BD| = a$ oraz $|\sphericalangle ADB| = 60^\circ$. Wobec tego

$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle ADB| = 135^\circ - 60^\circ = 75^\circ \ .$$

Ponieważ $|BD| = a$ i $|BC| = a$, więc trójkąt BCD jest równoramienny. Zatem

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BDC| = 75^\circ,$$

więc

$$|\sphericalangle CBD| = 180^\circ - 2 \cdot |\sphericalangle BCD| = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$$

oraz

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC| = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ .$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = P_{AED} + P_{EBCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a + \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^2\left(1+\sqrt{3}\right)}{4} .$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze, że trójkąt ABD jest równoboczny.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający
- wywnioskuje, że trójkąt BCD jest równoramienny

albo
- obliczy miarę kąta BDC: $|\sphericalangle BDC| = 75^\circ$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający wywnioskuje, że trójkąt BCD jest równoramienny i obliczy miarę kąta CBD: $|\sphericalangle CBD| = 30^\circ$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Zdający

- zapisze, że pole czworokąta $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD i obliczy pole trójkąta BCD: $P_{BCD}=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot \sin 30^\circ=\frac{a^2}{4}$

albo

- albo zapisze, że pole czworokąta $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD, obliczy miarę kąta ABC: $|\sphericalangle ABC|=90^\circ$ i obliczy pole trójkąta BCD:

$$P_{BCD}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}$$

albo

- albo zapisze, że pole czworokąta $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów AED i trapezu, obliczy miarę kąta ABC: $|\sphericalangle ABC|=90^\circ$ i obliczy pole trapezu

$$P_{EBCD}=\frac{a+\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{8}=\frac{a^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{8}$$

albo

- wyznaczy pole czworokąta $ABCD$, popełniając błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy pole czworokąta $ABCD$: $P_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}a^2$.

Zadanie 4. (0−4)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (R10). Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zdarzeniami elementarnymi są permutacje (bez powtórzeń) zbioru ośmioelementowego $\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega|=8!$.

Niech A będzie zdarzeniem, polegającym na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Ustalmy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

I metoda

W zbiorze Z jest 5 liczb nieparzystych, więc możemy je ustawić w ciąg na $5!$ sposobów. Otrzymamy wtedy sytuację:

$\underline{\ (1)\ }\ n\ \underline{\ (2)\ }\ n\ \underline{\ (3)\ }\ n\ \underline{\ (4)\ }\ n\ \underline{\ (5)\ }\ n\ \underline{\ (6)\ }$

Pierwszą z pozostałych liczb (parzystych) zbioru Z możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc $\underline{\ (1)\ }$ – $\underline{\ (6)\ }$, drugą na jednym z pozostałych pięciu, a trzecią na jednym z pozostałych czterech.

Zatem $|A| = 5!\cdot 6\cdot 5\cdot 4$.

II metoda

W zbiorze Z jest 5 liczb nieparzystych, więc możemy je ustawić w ciąg na $5!$ sposobów.
Otrzymamy wtedy sytuację:

$\underline{\ (1)\ }\ n\ \underline{\ (2)\ }\ n\ \underline{\ (3)\ }\ n\ \underline{\ (4)\ }\ n\ \underline{\ (5)\ }\ n\ \underline{\ (6)\ }$

Trzy pozostałe liczby (parzyste) ze zbioru Z musimy ustawić na wybranych trzech miejscach spośród sześciu miejsc $\underline{\ (1)\ }$ – $\underline{\ (6)\ }$. Te trzy miejsca możemy wybrać na $\binom{6}{3}$ sposobów. Na tych trzech ustalonych miejscach możemy trzy liczby parzyste ze zbioru Z ustawić na $3!$ sposobów.

Zatem $|A| = 5!\cdot \binom{6}{3}\cdot 3!$.

III metoda (ustalenie kolejności parzystych, a następnie ustalenie pozycji parzystych)

W zbiorze Z mamy 3 liczby parzyste: 2, 4, 6. Możemy ustawić je w kolejności na $3! = 6$ sposobów. Jedną z takich możliwości jest kolejność: 2, 4, 6.

Wypiszmy wszystkie przypadki ustawienia tych trzech liczb w kolejności 2, 4, 6 w ciągu 8-wyrazowym:

(a) 2 na pierwszym miejscu

2 – 4 – 6 – – –, 2 – 4 – – 6 – –, 2 – 4 – – – 6 –, 2 – 4 – – – – 6, 2 – – 4 – 6 – –,
2 – – 4 – – 6 –, 2 – – 4 – – – 6, 2 – – – 4 – 6 –, 2 – – – 4 – – 6, 2 – – – – 4 – 6,

(b) 2 na drugim miejscu

– 2 – 4 – 6 – –, – 2 – 4 – – 6 –, – 2 – 4 – – – 6, – 2 – – 4 – 6 –, – 2 – – 4 – – 6,
– 2 – – – 4 – 6,

(c) 2 na trzecim miejscu

– – 2 – 4 – 6 –, – – 2 – 4 – – 6, – – 2 – – 4 – 6,

(d) 2 na czwartym miejscu

– – – 2 – 4 – 6.

Łącznie mamy 20 przypadków ustawienia w ciągu 8-wyrazowym trzech liczb parzystych – 2, 4, 6 – w kolejności 2, 4, 6.

Ponieważ mamy 6 możliwości ustalenia kolejności dla trzech liczb 2, 4, 6, więc liczby parzyste ze zbioru Z możemy ustawić na $6\cdot 20$ sposobów.

Do ustawionych liczb parzystych na wolne miejsca ustawiamy liczby nieparzyste, a możemy to zrobić na 5! sposobów.

Zatem $|A| = 6\cdot 20\cdot 5!$.

IV metoda (ustalenie pozycji parzystych)

Wypiszmy wszystkie przypadki wyboru trzech miejsc, spośród ośmiu, dla liczb parzystych, z uwzględnieniem warunku, że żadne dwie parzyste nie sąsiadują ze sobą.

(a) pierwsza liczba parzysta na pierwszym miejscu

p – p – p – – –, p – p – – p – –, p – p – – – p –, p – p – – – – p, p – – p – p – –,
p – – p – – p –, p – – p – – – p, p – – – p – p –, p – – – p – – p, p – – – – p – p,

(b) pierwsza liczba parzysta na drugim miejscu

– p – p – p – –, – p – p – – p –, – p – p – – – p, – p – – p – p –, – p – – p – – p,
– p – – – p – p,

(c) pierwsza liczba parzysta na trzecim miejscu

– – p – p – p –, – – p – p – – p, – – p – – p – p,

(d) pierwsza liczba parzysta na czwartym miejscu

– – – p – p – p.

Łącznie mamy 20 przypadków ustalenia w ciągu 8-wyrazowym pozycji liczb parzystych.
Zatem $\left|A\right| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$.

Uwaga! Te same przypadki wyboru uzyskamy, wypisując wszystkie ustawienia liczb parzystych i nieparzystych przy założeniu, że rozpoczynamy najpierw od liczby parzystej (10 przypadków), a następnie od nieparzystej (kolejne 10 przypadków). Ponadto należy pamiętać, że przedstawione tu przypadki ustawień liczb parzystych (a tym samym i nieparzystych) mogą być przedstawione jako gałęzie drzewa probabilistycznego z 20 gałęziami.

V metoda (przerwy między parzystymi)
Trzy liczby parzyste musimy rozdzielić pięcioma nieparzystymi, przy czym nieparzyste możemy umieszczać także przed wszystkimi parzystymi lub po wszystkich parzystych. Mamy zatem 4 usytuowania dla liczb nieparzystych.
Wypiszmy najpierw przypadki uwzględniające liczbę pozycji dla liczb nieparzystych w poszczególnych usytuowaniach (cyfra oznacza liczbę miejsc zajętych przez liczby nieparzyste, litera p oznacza liczbę parzystą).
0-p-1-p-1-p-3, 0-p-1-p-2-p-2, 0-p-1-p-3-p-1, 0-p-1-p-4-p-0, 0-p-2-p-1-p-2, 0-p-2-p-2-p-1, 0-p-2-p-3-p-0, 0-p-3-p-1-p-1, 0-p-3-p-2-p-0, 0-p-4-p-1-p-0, 1-p-1-p-1-p-1, 1-p-1-p-2-p-1, 1-p-1-p-3-p-0, 1-p-2-p-1-p-1, 1-p-2-p-2-p-0, 1-p-3-p-1-p-0, 2-p-1-p-1-p-1, 2-p-1-p-2-p-0, 2-p-2-p-1-p-0, 3-p-1-p-1-p-0
Łącznie mamy 20 takich przypadków.
Zatem $\left|A\right| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$.
Obliczamy prawdopodobieństwo:
$$P(A) = \frac{20 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$
<u>II sposób</u> (zdarzenie przeciwne)

Zdarzeniami elementarnymi są permutacje (bez powtórzeń) zbioru ośmioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $\left|\Omega\right| = 8!$

Niech A będzie zdarzeniem, polegającym na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu.
Zdarzeniem przeciwnym A' jest otrzymanie w wyniku permutacji zbioru Z ciągu, w którym liczby parzyste są sąsiednimi wyrazami ciągu, tzn.
I: wszystkie trzy liczby parzyste będą kolejnymi wyrazami ciągu
albo
II. dwie liczby parzyste będą kolejnymi wyrazami ciągu, a trzecia liczba parzysta nie będzie sąsiadować z żadną z nich.
W sytuacji I miejsca dla liczb parzystych wybieramy na 6 sposobów, ustawiamy na tych miejscach liczby parzyste na 3! sposobów, a pozostałe liczby ustawiamy na pięciu miejscach na $5!$ sposobów.
W sytuacji II. dla sąsiadujących liczb parzystych wybieramy miejsca na 7 sposobów:
m_1 i m_2, m_2 i m_3, m_3 i m_4, m_4 i m_5, m_5 i m_6, m_6 i m_7, m_7 i m_8.

Miejsce dla trzeciej parzystej liczby możemy wybrać: na 5 sposobów wtedy, gdy parzyste liczby sąsiadują na miejscach m_1 i m_2 albo na miejscach m_7 i m_8 oraz na 4 sposoby w każdej z pozostałych możliwości.
Liczby parzyste możemy rozstawić na wybranych miejscach na 3! sposobów, a pozostałe liczby ustawiamy na pięciu miejscach na $5!$ sposobów.
Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A' jest:
$6\cdot 3!\cdot 5!+2\cdot 5\cdot 3!\cdot 5!+5\cdot 4\cdot 3!\cdot 5!$.
Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{36\cdot 3!\cdot 5!}{8!}=1-\frac{36\cdot 6}{6\cdot 7\cdot 8}=1-\frac{36}{56}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}.$$

Uwaga! Zdający może wypisywać przypadki, w których wystąpią zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A', stosując metody analogiczne do metod III, IV, V z I sposobu rozwiązania, i uwzględnić 36 rozłącznych przypadków.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający
- zapisze $|\Omega|=8!$

albo
- wypisze przynajmniej 11 różnych przypadków spośród 20, gdy rozpatruje zdarzenie A

albo
- wypisze przynajmniej 19 różnych przypadków spośród 36, gdy rozpatruje zdarzenie A',

albo
- zapisze, że jest $\binom{6}{3}$ lub $6\cdot 5\cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A (lub $6+2\cdot 5+5\cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A'),

albo
- zapisze iloczyn $3!\cdot 5!$ lub w inny sposób zaznaczy uwzględnienie iloczynu $3!\cdot 5!$, wynikającego z permutacji liczb parzystych i liczb nieparzystych na wybranych dla nich miejscach,

albo
- narysuje drzewo z wyróżnionymi co najmniej 11 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo z wyróżnionymi co najmniej 19 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A'),

albo
- narysuje niepełne drzewo (może wystąpić brak istotnych gałęzi odpowiadających zdarzeniu A lub A'), ale na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, przy czym gałąź ta musi uwzględniać jeden z przypadków: wylosowano 3 parzyste liczby lub wylosowano 7 liczb

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający
- zapisze $|\Omega|=8!$ i wypisze przynajmniej 11 różnych przypadków spośród 20, gdy rozpatruje zdarzenie A,

albo
- zapisze $|\Omega|=8!$ i wypisze przynajmniej 19 różnych przypadków spośród 36, gdy rozpatruje zdarzenie A',

albo

- zapisze $|\Omega| = 8!$ i zapisze, że jest $\binom{6}{3}$ lub $6 \cdot 5 \cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A (lub $6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A'),

albo

- zapisze $|A| = \binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$ lub $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A'| = (6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A'| = 36 \cdot 3! \cdot 5!$,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi co najmniej 11 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo z wyróżnionymi co najmniej 19 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A') i na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, przy czym gałąź ta musi uwzględniać jeden z przypadków: wylosowano 3 parzyste liczby lub wylosowano 7 liczb

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- zapisze $|\Omega| = 8!$ i zapisze $|A| = \binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$ lub $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A'| = (6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A'| = 36 \cdot 3! \cdot 5!$

albo

- zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia A (albo A') zgodnie z „metodą drzewkową”.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy prawdopodobieństwo: $P(A) = \frac{5}{14}$.

Uwagi

1. Możemy też rozpatrywać model probabilistyczny, w którym zdarzeniem elementarnym jest 3 elementowy podzbiór zbioru 8 elementowego (nie uwzględniamy wówczas kolejności ustawienia liczb nieparzystych ani kolejności ustawienia liczb parzystych, a jedynie pozycje zajmowane przez te liczby). Wtedy $|\Omega| = \binom{8}{3} = 56$, $|A| = \binom{6}{3} = 20$, $P(A) = \frac{5}{14}$.
2. Jeżeli zdający błędnie założy, że podany w treści zadania ośmioelementowy zbiór Z zawiera 4 liczby parzyste i 4 liczby nieparzyste (np. założy, że zbiór Z zawiera liczbę 8 zamiast 9) i rozwiąże zadanie do końca, otrzymując $P(A) = \frac{5 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{14}$, to otrzymuje **2 punkty**. Zdający otrzymuje w tej sytuacji **1 punkt** tylko za zapisanie $|\Omega| = 8!$.
3. Jeżeli zdający błędnie założy, że podany w treści zadania zbiór Z jest 9-elementowy (i zawiera 4 liczby parzyste i 5 liczby nieparzystych) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający zapisze $|\Omega|=8!$ oraz rozpatrując zdarzenie A' rozważy trzy sytuacje:
   I. wszystkie trzy liczby parzyste są kolejnymi wyrazami ciągu;
   II. dwie liczby parzyste są dwoma skrajnymi (pierwszym i drugim lub siódmym i ósmym) wyrazami ciągu, a trzecia liczba parzysta nie sąsiaduje bezpośrednio z żadną z nich;
   III. dwie liczby parzyste są dwoma kolejnymi, ale nie skrajnymi wyrazami ciągu, a trzecia parzysta nie sąsiaduje bezpośrednio z żadną z nich

oraz zapisze sposób zliczania tych ciągów w każdej z tych trzech sytuacji, uwzględniający permutacje liczb parzystych i liczb nieparzystych i jednocześnie gwarantujący to, że żaden ciąg nie zostanie policzony wielokrotnie;
a ponadto nie ustali poprawnej liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A', to otrzymuje **2 punkty**.

5. Jeżeli zdający rozważa zdarzenie A i wypisuje przynajmniej 12 przypadków, ale jeden z nich zapisuje dwukrotnie, to otrzymuje przynajmniej **1 punkt**. Dotyczy to także sytuacji wypisania 21 przypadków.

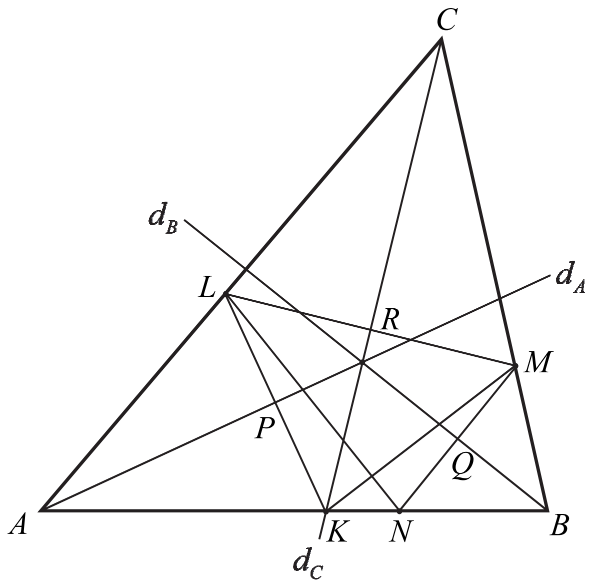
Zadanie 5. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R7.a).

Przykładowe rozwiązania

I sposób – bilans kątów

Oznaczmy miary kątów trójkąta ABC odpowiednio przez $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$, a punkt wspólny dwusiecznej d_A i odcinka KL przez P, dwusiecznej d_C i odcinka LM przez R oraz dwusiecznej d_B i odcinka MN przez Q.



Wówczas $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, stąd $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Wtedy

$$|\sphericalangle KAP| = \alpha \text{, zatem } |\sphericalangle AKP| = 90° - \alpha \text{ i } |\sphericalangle LKN| = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$$

oraz

$$|\sphericalangle CMR| = 90° - \gamma \text{ oraz } |\sphericalangle BMQ| = 90° - \beta,$$

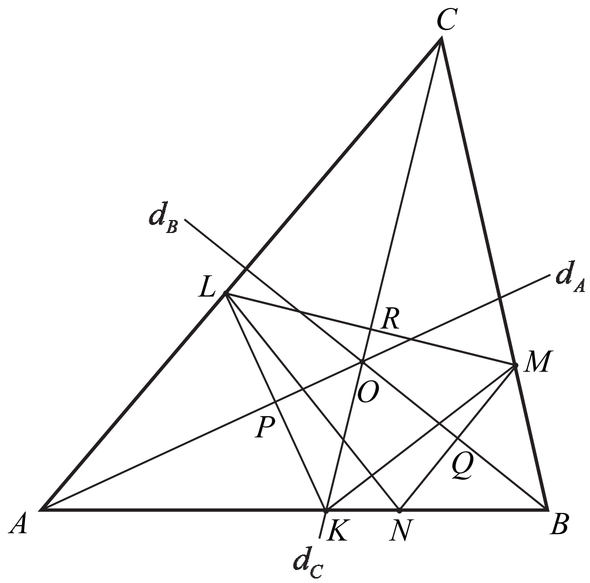
$$\text{zatem } |\sphericalangle LMN| = 180° - (90° - \gamma) - (90° - \beta) = \beta + \gamma.$$

Suma kątów LKN i LMN jest więc równa

$$|\sphericalangle LKN| + |\sphericalangle LMN| = (90^\circ + \alpha) + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma + 90^\circ = 180^\circ.$$

To oznacza, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.

<u>II sposób</u> – symetralne

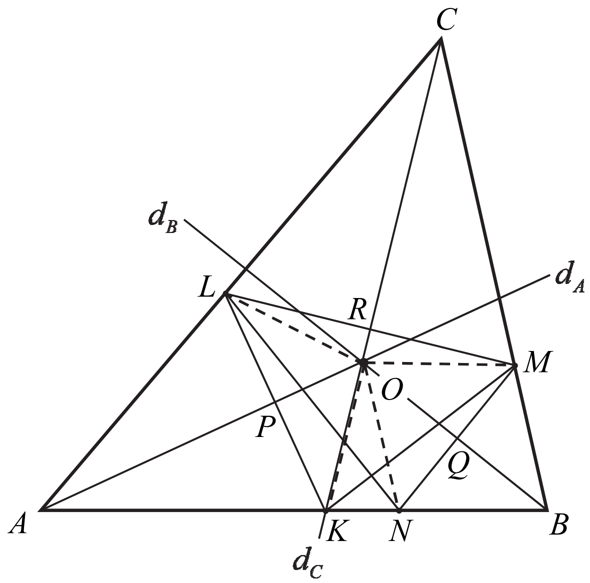


Rozważmy trójkąt KLM. Z definicji symetrii osiowej wynika, że dwusieczna d_A jest symetralną boku KL. Analogicznie dwusieczna d_C jest symetralną boku LM. Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie – oznaczmy go przez O. Czyli punkt wspólny dwusiecznych d_A i d_C (symetralnych boków trójkąta KLM) jest środkiem okręgu, którego promieniem jest w szczególności odcinek OL.

Podobnie rozważmy trójkąt LMN. Z definicji symetrii osiowej wynika, że dwusieczna d_C jest symetralną boku LM. Analogicznie dwusieczna d_B jest symetralną boku MN. Punkt wspólny tych dwusiecznych (symetralnych) jest tym samym punktem, o którym była mowa wyżej i jest oczywiście środkiem okręgu opisanego na trójkącie LMN. Zatem musi to być ten sam okrąg. Wszystkie wierzchołki czworokąta $KNML$ leżą na tym okręgu. To kończy dowód.

III sposób – równość promieni

Oznaczmy przez O punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta ABC, punkt wspólny dwusiecznej d_A i odcinka KL przez P, dwusiecznej d_C i odcinka LM przez R oraz dwusiecznej d_B i odcinka MN przez Q.



Z definicji symetrii osiowej i z treści zadania wynika, że $|KP| = |LP|$ oraz $KL \perp AO$. Oznacza to, że trójkąty OPK i OPL są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną OP oraz pozostałe przyprostokątne są równej długości. Są to więc trójkąty przystające (na mocy cechy *bkb* przystawania trójkątów). Stąd wynika, że $|OL| = |OK|$. Analogicznie trójkąty ORL i ORM są przystające oraz trójkąty OQM i OQN są przystające, a w konsekwencji $|OL| = |OM|$ oraz $|OM| = |ON|$. Zatem punkt O jest więc równooddalony od wszystkich wierzchołków czworokąta $KNML$, a to oznacza, że na tym czworokącie można opisać okrąg.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający
- wyznaczy miarę jednego z kątów czworokąta $KNML$ w zależności od miar kątów trójkąta ABC, np.: $|\sphericalangle LKN| = 90° + \alpha$

albo
- zapisze, że prosta zawierająca dwusieczną kąta trójkąta ABC jest symetralną jednego z odcinków KL, LM, MN

albo
- zapisze jedną lub dwie równości spośród: $|OL| = |OK|$, $|OL| = |OM|$, $|OM| = |ON|$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 p.**
Zdający
- wyznaczy miary dwóch przeciwległych kątów czworokąta *KNML* w zależności od miar kątów trójkąta *ABC*, np.: $|\sphericalangle LKN| = 90° + \alpha$ i $|\sphericalangle LMN| = \beta + \gamma$

albo
- zapisze, że punkt przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta *ABC* jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie *KLM* lub na trójkącie *LMN*, lub że jest punktem przecięcia symetralnych trzech boków czworokąta *KNML*

albo
- zapisze i uzasadni jedną lub dwie równości spośród: $|OL| = |OK|$, $|OL| = |OM|$, $|OM| = |ON|$

  Uwaga
  Jeżeli zdający zapisze wszystkie równości $|OL| = |OK|$, $|OL| = |OM|$, $|OM| = |ON|$ i stąd wyciągnie wniosek, że punkt *O* jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie *KNML*, ale nie uzasadni żadnej z tych równości (lub uzasadnienie nie będzie pełne), to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi
1. Jeżeli zdający przeprowadza dowód z wykorzystaniem bilansu kątów i korzysta z równości kątów w trójkątach równoramiennych, to może otrzymać **3 punkty** także w przypadku, gdy bez stosownego komentarza korzysta z faktu, że trójkąty są równoramienne.
2. Jeżeli zdający
   - uzależni wszystkie kąty trójkąta *ABC* oraz jeden z kątów czworokąta *KNML*

   albo
   - uzależni jeden z kątów *LKN*, *KNM* i jeden z kątów *KLM*, *NML*

   od kątów $\alpha = \sphericalangle AKL = \sphericalangle ALK$, $\beta = \sphericalangle BML = \sphericalangle BLM$ i $\gamma = \sphericalangle CLM = \sphericalangle CML$, to otrzymuje **1 punkt**.
   Jeżeli zdający
   - wyznaczy 2 przeciwległe kąty czworokąta *KNML* w zależności od α, β, γ i wykaże, że $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

   albo
   - wyznaczy wszystkie kąty czworokąta *KNML* i obliczy sumę dwóch przeciwległych kątów czworokąta *KNML*,

   to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 6. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia rozkłada wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia, grupowanie wyrazów, wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias (2.b). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze (R1.a).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zauważmy, że $k^3m - km^3 = km\left(k^2 - m^2\right) = km(k+m)(k-m)$.
Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów:
- uzasadnienie podzielności przez 2;
- uzasadnienie podzielności przez 3.

Podzielność przez 2.
Gdy którakolwiek z liczb k, m jest parzysta, to iloczyn $km\left(k^2 - m^2\right)$ jest parzysty, a gdy obie liczby k, m są nieparzyste, to ich suma $k+m$ jest liczbą parzystą, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 2.

Podzielność przez 3. (I sposób)
Dowód przeprowadzimy w czterech rozłącznych sytuacjach: A, B, C, D.

A. Którakolwiek z liczb k, m jest podzielna przez 3
Wtedy iloczyn $km\left(k^2 - m^2\right)$ jest podzielny przez 3.

B. Obie liczby k, m przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1
Wtedy liczba $k-m$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 3.

C. Obie liczby k, m przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2
Wtedy liczba $k-m$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 3.

D. Jedna z liczb k, m przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a druga przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2
Wtedy liczba $k+m$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 3.

Podzielność przez 3. (II sposób)
Dowód przeprowadzimy w dwóch rozłącznych sytuacjach: E, F.

E. Którakolwiek z liczb k, m jest podzielna przez 3.
Wtedy iloczyn $km\left(k^2 - m^2\right)$ jest podzielny przez 3.

F. Żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 3.
Wtedy kwadrat każdej z nich przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, więc różnica $k^2 - m^2$ jest podzielna przez 3.

Wykazaliśmy zatem, że liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez $2 \cdot 3$, czyli przez 6. To kończy dowód.

II sposób

Zauważmy, że

$$k^3m-km^3=km\left(k^2-1+1-m^2\right)=km\left(k^2-1\right)-km\left(m^2-1\right)=km\left(k-1\right)\left(k+1\right)-km\left(m-1\right)\left(m+1\right)$$

Iloczyn $k\left(k-1\right)\left(k+1\right)$ to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, więc dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2, więc iloczyn jest podzielny przez 2 i przez 3, a więc jest podzielny przez 6. Analogicznie iloczyn $m\left(m-1\right)\left(m+1\right)$ jest podzielny przez 6. Różnica dwóch liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

jeśli

- uzasadni podzielność przez 2

albo

- uzasadni podzielność przez 3 w dwóch przypadkach spośród A, B, C, D,

albo

- uzasadni podzielność przez 3 w przypadku F.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

jeśli

- uzasadni podzielność przez 2 i uzasadni podzielność przez 3 w dwóch przypadkach spośród A, B, C, D

albo

- uzasadni podzielność przez 2 i uzasadni podzielność przez 3 w przypadku F,

albo

- uzasadni podzielność przez 3,

albo

- zapisze liczbę k^3m-km^3 w postaci $km\left(k-1\right)\left(k+1\right)-km\left(m-1\right)\left(m+1\right)$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

przeprowadzi pełne rozumowanie uzasadniające podzielność przez 6.

Uwagi

1. Akceptujemy stwierdzenie, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6 oraz różnica liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6.
2. Jeżeli zdający rozważa reszty z dzielenia liczb k i m przez 6 i udowodni podzielność przez 6 w jednym z poniższych 5 przypadków:
   - dokładnie jedna z liczb k, m jest podzielna przez 6 lub obie liczby k, m dają przy dzieleniu przez 6 tę samą resztę;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby k^3m-km^3 można wnioskować na podstawie iloczynu liczb k, m;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby k^3m-km^3 można wnioskować na podstawie sumy liczb k, m;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby k^3m-km^3 można wnioskować na podstawie sumy i iloczynu liczb k, m;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby k^3m-km^3 można wnioskować na podstawie różnicy i iloczynu liczb k, m,

   to otrzymuje **1 punkt**.

Jeżeli zdający rozważa reszty z dzielenia liczb k i m przez 6 i udowodni podzielność przez 6 w trzech z poniższych 5 przypadków:
- dokładnie jedna z liczb k, m jest podzielna przez 6 lub obie liczby k, m dają przy dzieleniu przez 6 tę samą resztę;
- żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie iloczynu liczb k, m;
- żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie sumy liczb k, m;
- żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie sumy i iloczynu liczb k, m;
- żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie różnicy i iloczynu liczb k, m,

to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 7. (0−4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.e).

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$2\left(1-\sin^2 x\right)+3\sin x=0,$$

$$-2\sin^2 x+3\sin x+2=0.$$

Możemy dokonać podstawienia $\sin x=t$, przy czym $t\in\left\langle -1,1\right\rangle$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$-2t^2+3t+2=0$$

$$\Delta=25,\ t_1=2,\ t_2=-\frac{1}{2}.$$

Pierwsza obliczona wartość $t_1=2$ nie spełnia warunku $t\in\left\langle -1,1\right\rangle$.

Dla drugiej wartości t wyznaczamy wartości x w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\rangle$:

$$\sin x=-\frac{1}{2}$$

$$x=-\frac{\pi}{6}\ \text{lub}\ x=\frac{7\pi}{6}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze równanie w postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego argumentu, np. $2\left(1-\sin^2 x\right)+3\sin x=0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający rozwiąże równanie $-2t^2+3t+2=0$ i zapisze $t_1=2$, $t_2=-\frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający odrzuci wartość $t_1=2$ i znajdzie jedno rozwiązanie równania $\sin x=-\frac{1}{2}$ w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w podanym przedziale: $x=-\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{7\pi}{6}$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełnia błędy rachunkowe w doprowadzaniu do równania kwadratowego lub błędy w rozwiązaniu poprawnego równania kwadratowego, w rezultacie otrzymuje np. $\sin x=2$ lub $\sin x=1$, pierwsze równanie uznaje za sprzeczne, drugie rozwiązuje poprawnie we właściwym przedziale, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 8. (0−5)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R2.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe (R3.c).

Przykładowe rozwiązanie

Liczba $\frac{2}{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, więc $W\left(\frac{2}{5}\right)=0$.

Ponieważ $W\left(\frac{2}{5}\right)=5\left(\frac{2}{5}\right)^3-7\left(\frac{2}{5}\right)^2-3\cdot\frac{2}{5}+p=-\frac{50}{25}+p$, więc $p=2$.

Zatem wielomian $W(x)$ ma postać $W(x)=5x^3-7x^2-3x+2$ i jest podzielny przez dwumian $x-\frac{2}{5}$. Iloraz z tego dzielenia jest równy $5x^2-5x-5$. Wyznaczamy pierwiastki tego trójmianu : $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zatem $W(x)$ ma trzy pierwiastki: $\frac{2}{5}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Rozwiązaniem nierówności $W(x)>0$ jest zatem każda liczba rzeczywista

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze, że $W\left(\frac{2}{5}\right)=0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający wyznaczy $p=2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający wyznaczy iloraz z dzielenia $W(x)=5x^3-7x^2-3x+2$ przez $x-\frac{2}{5}$: $5x^2-5x-5$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Zdający wyznaczy pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający wyznaczy rozwiązania nierówności $W(x)>0$: $x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

Zadanie 9. (0−6)

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.a).

Przykładowe rozwiązanie

Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli

$$\Delta=(m+1)^2-4\cdot1\cdot\left(-m^2+1\right)>0$$

$$5m^2+2m-3>0$$

$$m_1 = -1,\ m_2 = \frac{3}{5}.$$

Stąd $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$

Warunek $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) > -7x_1x_2,$$

$$(x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) > -7x_1x_2.$$

Ze wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego możemy tę nierówność zapisać w postaci:

$$\left(\frac{-b}{a}\right)\left(\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}\right) > -7\frac{c}{a}$$

$$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2 - 3(-m^2+1)\right) > -7(-m^2+1)$$

$$-(m+1)^3 + 3(m+1)(-m^2+1) > -7(-m^2+1)$$

$$-(m+1)^3 + 3(m+1)(-m^2+1) + 7(-m^2+1) > 0$$

$$(m+1)\left(-(m+1)^2 + 3(-m^2+1) + 7(-m+1)\right) > 0$$

$$(m+1)(-m^2 - 2m - 1 - 3m^2 + 3 + 7 - 7m) > 0$$

$$(m+1)(-4m^2 - 9m + 9) > 0$$

$$m_1 = -3 \text{ lub } m_2 = \frac{3}{4} \text{ lub } m_3 = -1.$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right).$$

Wyznaczamy część wspólną zbiorów $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$ i $(-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right)$.

Odpowiedź $m \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

Schemat punktowania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$:
$m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
Uwaga
Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie nierówności w postaci:
$(x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) > -7x_1x_2$

lub równoważnej.
2 punkty zdający otrzymuje za doprowadzenie do nierówności ze zmienną m, np.
$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2 - 3(-m^2+1)\right) > -7(-m^2+1)$

3 punkty zdający otrzymuje za wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu

$$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2-3\left(-m^2+1\right)\right)+7\left(-m^2+1\right),$$

czyli wielomianu $-4m^3-13m^2+9$: -3, -1, $\frac{3}{4}$

4 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie powyższej nierówności.

$m\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-1,\frac{3}{4}\right)$

Trzeci etap polega na wyznaczeniu szukanej wartości parametru m z uwzględnieniem wszystkich warunków.

$m\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(\frac{3}{5},\frac{3}{4}\right)$.

Uwagi

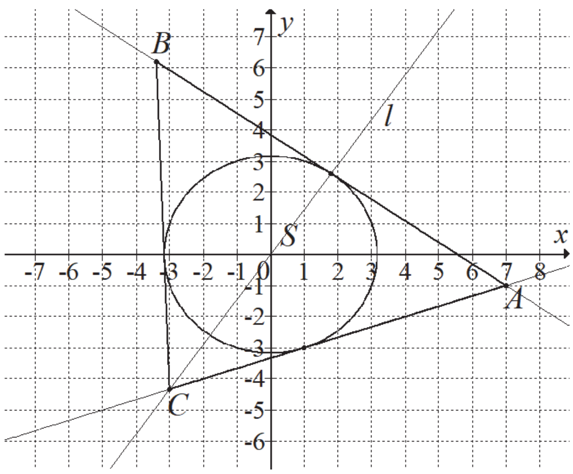
1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (I lub II) zbioru pustego lub zbioru R jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.
2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu lub otrzymania w I etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z II etapu, przyznajemy **0 punktów** za III etap.
3. O ile nie zachodzą przypadki z uwag 1. i 2. i zdający poprawnie wykona etap I oraz popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II, albo gdy popełnia błędy w etapie I i otrzyma co najmniej 1 punkt za etap II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania stosuje nieistniejącą zależność: „suma sześcianów = sześcian sumy", prowadzącą do uproszczenia badanego problemu, lub zdający stosuje inny błędny wzór, prowadzący do uproszczenia badanego problemu, ale otrzyma nierówność wielomianową stopnia trzeciego, uzyska trzy miejsca zerowe i poprawnie rozwiązuje otrzymaną nierówność, to za II etap otrzymuje **1 punkt** (za rozwiązanie nierówności).
5. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania otrzyma poprawną nierówność wielomianową stopnia 3. i popełnia błędy rachunkowe w jej rozwiązaniu, to może otrzymać **3 punkty** za II etap, o ile wyznaczy 3 różne miejsca zerowe wielomianu z tej nierówności i konsekwentnie rozwiąże nierówność do końca, zaś w każdym innym przypadku otrzymuje **2 punkty** za ten etap.
6. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania rozważa nierówność wielomianową stopnia większego niż 3. lub niepoprawną nierówność stopnia 3. i wyznacza miejsca zerowe w liczbie właściwej dla stopnia wielomianu i otrzymuje przynajmniej 3 miejsca zerowe, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za II etap, o ile konsekwentnie rozwiąże nierówność. Jeżeli wielomian w tej nierówności nie ma trzech różnych miejsc zerowych, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za ten etap.
7. Jeżeli zdający przy rozwiązywaniu otrzymanej w II etapie nierówności stopnia co najmniej 3. popełnia błąd, polegający na niepoprawnym grupowaniu wyrazów, np. z nierówności $-4m^3-13m^2+9>0$ uzyska $(4m+13)\left(m^2-9\right)>0$, to nie otrzymuje punktów za części II.3 i II.4.

Zadanie 10. (0−6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, wyznacza współrzędne środka odcinka, podaje równanie prostej w postaci $Ax+By+C=0$ lub $y=ax+b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym, wykorzystuje pojęcie układu współrzędnych na płaszczyźnie, rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu oraz oblicza odległość punktu od prostej (8.g, 8.f, 8.b, 8.a, R8.b, R8.c).

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u> − analitycznie − styczne AC i AB



Proste AC i AB przechodzą przez punkt $A=(7,-1)$, żadna z nich nie jest prostopadła do osi Ox układu współrzędnych, więc mają równania postaci

$$y=a(x-7)-1,$$

$$ax-y-7a-1=0.$$

Obie te proste są styczne do okręgu, zatem ich odległości od środka okręgu są równe promieniowi okręgu. Stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10},$$

$$(-7a-1)^2=10(a^2+1),$$

$$49a^2+14a+1=10a^2+10$$

$$39a^2+14a-9=0$$

$$a=\frac{-14-40}{78}=-\frac{9}{13} \quad \text{lub} \quad a=\frac{-14+40}{78}=\frac{1}{3}.$$

Szukane styczne mają więc równania: $y=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}$, $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$. Tylko druga z tych prostych przechodzi przez trzecią ćwiartkę układu współrzędnych, więc prosta AC ma równanie $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$, a prosta AB ma równanie $y=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}$.

Trójkąt ABC jest równoramienny, a jego ramionami są boki AC i BC. Zatem wierzchołek C leży na przecięciu prostej AC i symetralnej l boku AB. Prosta l jest prostopadła do prostej AB i przechodzi przez punkt $S=(0,0)$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej l jest równy $a_l=\frac{13}{9}$. Stąd l ma równanie postaci

$$y=\frac{13}{9}x.$$

Współrzędne wierzchołka C obliczymy, rozwiązując układ równań

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3} \text{ i } y=\frac{13}{9}x.$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}=\frac{13}{9}x,$$

$$\frac{10}{9}x=-\frac{30}{9}$$

$$x=-3,$$

więc $y=\frac{13}{9}\cdot(-3)=-\frac{13}{3}$, czyli $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$.

Obliczamy współrzędne punktu D styczności prostej AB z danym okręgiem. Jest to punkt przecięcia prostej l z prostą AB. Wystarczy więc rozwiązać układ równań

$$y=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13} \text{ i } y=\frac{13}{9}x.$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}=\frac{13}{9}x,$$

$$\frac{250}{117}x=\frac{50}{13}$$

$$x=\frac{9}{5},$$

więc $y=\frac{13}{9}\cdot\frac{9}{5}=\frac{13}{5}$, czyli $D=\left(\frac{9}{5},\frac{13}{5}\right)$.

Punkt D jest środkiem odcinka AB, więc

$$D=\left(\frac{7+x_B}{2},\frac{-1+y_B}{2}\right).$$

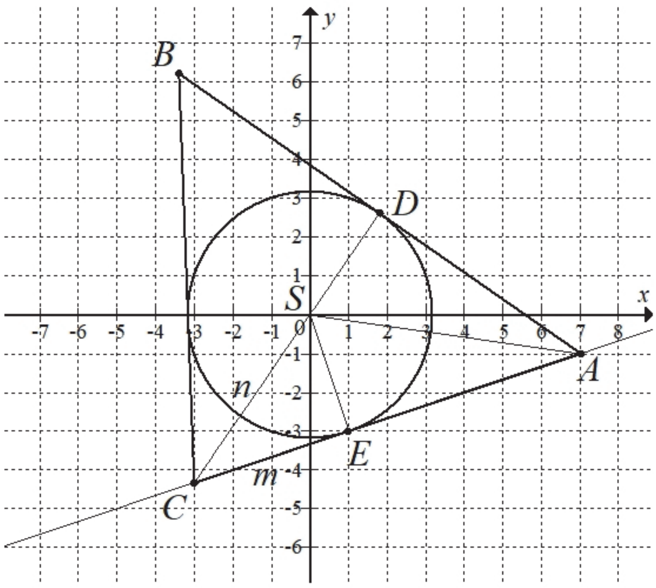
Zatem

$$\frac{7+x_B}{2}=\frac{9}{5} \text{ i } \frac{-1+y_B}{2}=\frac{13}{5},$$

$$x_B=-\frac{17}{5} \text{ i } y_B=\frac{31}{5}.$$

Zatem $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$.

II sposób − syntetycznie – długości odcinków *CE* i *CS*



Promień okręgu jest równy $r=\sqrt{10}$. Długość odcinka *SA* jest równa

$$|SA|=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ASE* otrzymujemy

$$|SA|^2=|SE|^2+|EA|^2,$$

$$50=10+EA^2,$$

$$|EA|^2=40,$$

$$|EA|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy $|DA|=|EA|=2\sqrt{10}$.

Trójkąty *CES* i *CDA* są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *C*. Stąd wynika

$$\frac{|CE|}{|SE|}=\frac{|CD|}{|DA|} \text{ oraz } \frac{|CS|}{|SE|}=\frac{|CA|}{|DA|},$$

$$\frac{m}{\sqrt{10}}=\frac{n+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} \text{ oraz } \frac{n}{\sqrt{10}}=\frac{m+2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}},$$

$$2m=n+\sqrt{10} \text{ oraz } 2n=m+\sqrt{10},$$

$$n=2m-\sqrt{10} \text{ oraz } 2\left(2m-\sqrt{10}\right)=m+\sqrt{10}.$$

Stąd

$$4m-2\sqrt{10}=m+\sqrt{10},$$

$$m=\tfrac{4}{3}\sqrt{10}, \text{ więc } n=2\cdot\tfrac{4}{3}\sqrt{10}-\sqrt{10}=\tfrac{5}{3}\sqrt{10}.$$

Uwaga

Długości m i n możemy też obliczyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów *ACD* i *CSE*. Otrzymujemy wtedy

$$|CA|^2=|CD|^2+|DA|^2 \text{ oraz } |CS|^2=|CE|^2+|SE|^2,$$

$$\left(m+2\sqrt{10}\right)^2=\left(n+\sqrt{10}\right)^2+\left(2\sqrt{10}\right)^2 \text{ oraz } n^2=m^2+\left(\sqrt{10}\right)^2,$$

$$m^2+4m\sqrt{10}+40=n^2+2n\sqrt{10}+10+40 \text{ oraz } n^2=m^2+10,$$

$$4m\sqrt{10}=2n\sqrt{10}+20 \text{ oraz } n^2=m^2+10,$$

$$2m-\sqrt{10}=n \text{ oraz } \left(2m-\sqrt{10}\right)^2=m^2+10,$$

$$2m-\sqrt{10}=n \text{ oraz } 4m^2-4m\sqrt{10}+10=m^2+10,$$

$$2m-\sqrt{10}=n \text{ oraz } m=\tfrac{4}{3}\sqrt{10},$$

$$n=\tfrac{5}{3}\sqrt{10} \text{ oraz } m=\tfrac{4}{3}\sqrt{10}.$$

Zatem długość ramienia AC trójkąta ABC jest równa

$$|AC|=|CE|+|EA|=m+2\sqrt{10}=\tfrac{4}{3}\sqrt{10}+2\sqrt{10}=\tfrac{10}{3}\sqrt{10}.$$

Niech $C=(x,y)$. Ponieważ $|AC|=\frac{10}{3}\sqrt{10}$ i $|CS|=\frac{5}{3}\sqrt{10}$, więc

$$|AC|^2=\tfrac{1000}{9} \text{ i } |CS|^2=\tfrac{250}{9},$$

$$(x-7)^2+(y+1)^2=\tfrac{1000}{9} \text{ i } x^2+y^2=\tfrac{250}{9}.$$

Pierwsze równanie możemy zapisać w postaci

$$x^2+y^2-14x+2y+50=\tfrac{1000}{9}.$$

Stąd i z drugiego równania otrzymujemy

$$\tfrac{250}{9}-14x+2y+50=\tfrac{1000}{9},$$

$$7x-y+\tfrac{50}{3}=0,$$

$$y=7x+\tfrac{150}{9}.$$

Stąd i z pierwszego równania mamy

$$x^2+\left(7x+\tfrac{50}{3}\right)^2=\tfrac{250}{9},$$

$$x^2+49x^2+\tfrac{700}{3}x+\tfrac{2500}{9}-\tfrac{250}{9}=0,$$

$$50x^2+\tfrac{700}{3}x+\tfrac{2250}{9}=0,$$

$$x^2+\tfrac{14}{3}x+5=0,$$

$$3x^2+14x+15=0,$$

$$3x^2+9x+5x+15=0,$$

$$3x(x+3)x+5(x+3)=0,$$

$$(x+3)(3x+5)=0,$$

$$x=-3 \text{ lub } x=-\tfrac{5}{3}.$$

Gdy $x=-3$, to $y=7\cdot(-3)+\frac{50}{3}=-\frac{13}{3}$, a gdy $x=-\frac{5}{3}$, to $y=7\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{50}{3}=5$.

Ponieważ obie współrzędne punktu C są ujemne, więc $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$.

Niech $B=(x,y)$. Ponieważ $|BC|=|AC|=\frac{10}{3}\sqrt{10}$ i $|AB|=2\cdot 2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$, więc

$$|BC|^2=\frac{1000}{9} \text{ i } |AB|^2=160,$$

$$(-3-x)^2+\left(-\frac{13}{3}-y\right)^2=\frac{1000}{9} \text{ i } (x-7)^2+(y+1)^2=160,$$

$$x^2+y^2+6x+\frac{26}{3}y-\frac{250}{3}=0 \text{ i } x^2+y^2-14x+2y-110=0.$$

Stąd

$$x+\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}=0 \text{ i } x^2+y^2-14x+2y-110=0,$$

$$y=-3x-4 \text{ i } x^2+(-3x-4)^2-14x+2(-3x-4)-110=0.$$

Drugie równanie możemy zapisać w postaci

$$10x^2+4x-102=0,$$

$$5x^2+2x-51=0,$$

$$\Delta=2^2-4\cdot 5\cdot(-51)=1024,\ \sqrt{\Delta}=32,$$

$$x=\frac{-2-32}{10}=-\frac{17}{5} \text{ lub } x=\frac{-2+32}{10}=3,$$

Gdy $x=-\frac{17}{5}$, to $y=-3\cdot\left(-\frac{17}{5}\right)-4=\frac{31}{5}$, a gdy $x=3$, to $y=-3\cdot 3-4=-13$.

Ponieważ punkt B nie leży w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, więc $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający:

a) obliczy długości odcinków stycznych poprowadzonych z punktu A:
$|AD|=|AE|=2\sqrt{10}$

albo

b) obliczy współrzędne środka M odcinka AS oraz długość odcinka AS,
gdzie $S=(0,0)$: $M=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $|AS|=5\sqrt{2}$,

albo

c) obliczy sinus kąta SAE: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

albo

d) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt A: $y=ax-7a-1$,

albo

e) zapisze, że trójkąt ADC jest podobny do trójkąta SEC,

f) obliczy długość tylko jednego z odcinków AD lub AE: $|AD|=|AE|=2\sqrt{10}$ oraz zapisze tę długość w zależności od współrzędnych punktu D (lub E) lub obliczy tangens kąta SAE lub SAD: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym istotny postęp .... 2 p.

Zdający:

A) obliczy $|AD| = 2\sqrt{10}$ oraz zapisze układ równań $\begin{cases}(x-7)^2+(y+1)^2=40\\ x^2+y^2=10\end{cases}$

albo

B) obliczy $|AD| = |AE| = 2\sqrt{10}$ oraz zapisze układ równań z niewiadomymi $m=|CE|$ i $n=|CS|$:

- $\frac{m}{\sqrt{10}} = \frac{n+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$ i $\frac{n}{\sqrt{10}} = \frac{m+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$
- $\left(m+2\sqrt{10}\right)^2 = \left(n+\sqrt{10}\right)^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2$ i $n^2 = m^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2$

albo

C) obliczy $|AD| = 2\sqrt{10}$, obliczy tangens kąta SAE: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ oraz obliczy współczynnik kierunkowy prostej AS $\left(a_{AS} = -\frac{1}{7}\right)$

albo

D) obliczy współrzędne środka $M = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, długość odcinka $|AS| = 5\sqrt{2}$ oraz zapisze układ równań $\begin{cases}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\\ x^2+y^2=10\end{cases}$

albo

E) obliczy sinus kąta SAE: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, tangens tego kąta: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ oraz współczynnik kierunkowy prostej AS $\left(a_{AS} = -\frac{1}{7}\right)$

albo

F) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt A: $y = ax - 7a - 1$ oraz równanie z niewiadomą a: $\frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$

albo

G) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt A: $y = ax - 7a - 1$ oraz układu równań $x^2+y^2=10$ i $y = ax - 7a - 1$ wraz z warunkiem istnienia jednego rozwiązania tego układu

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający:

I obliczy współrzędne punktów styczności D i E: $D = \left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$, $E = (1, -3)$

albo

II zapisze równania prostych AC i AB: $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$, $y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$

albo

III obliczy długości odcinków CE i CS: $m = |CE| = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, $n = |CS| = \frac{4}{3}\sqrt{10}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 p.**

Zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka B: $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka C: $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$

Uwaga

Jeżeli zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka B: $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$ oraz zapisze układ równań z niewiadomymi x, y – współrzędnymi wierzchołka C, np.: $x-3y-10=0$ i $13x-9y=0$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka C: $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$ oraz zapisze układ równań z niewiadomymi x, y – współrzędnymi wierzchołka B, np.: $\frac{x+7}{2}=\frac{9}{5}$ i $\frac{y-1}{2}=\frac{13}{5}$

albo

- obliczy współrzędne obu wierzchołków B i C, popełniając w trakcie rozwiązania błędy rachunkowe

to otrzymuje **5 punktów**.

Rozwiązanie pełne .... **6 p.**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołków B i C: $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$, $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$.

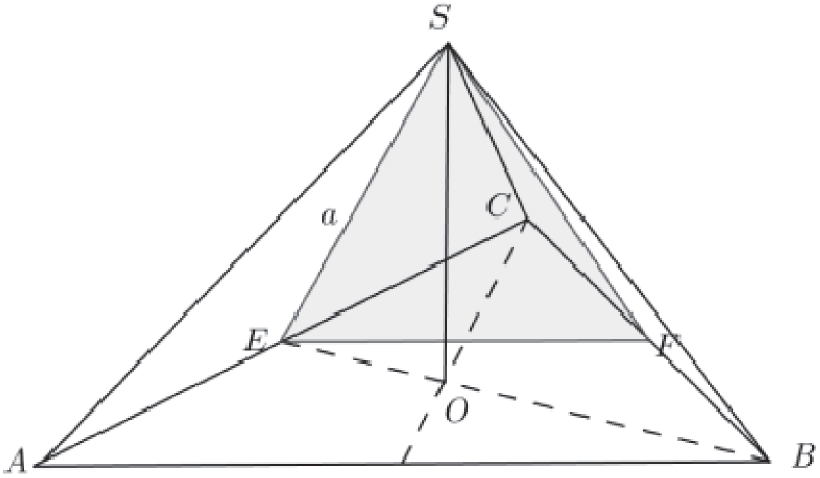
Uwagi

1. Jeżeli zdający pominie informację o ujemnych współrzędnych punktu C i tym samym zamieni miejscami proste AC i AB, to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie popełni innych błędów.
2. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że podstawą trójkąta jest inny bok niż AB, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
3. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania zadania na żadnym etapie.
4. Jeżeli zdający zapisze dwa równania z dwiema tymi samymi niewiadomymi, którymi są współrzędne punktu B lub C, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający odczytuje z rysunku współrzędne punktu E, a następnie wyznacza równanie stycznej AE i na tym poprzestaje, to może otrzymać **1 punkt**.

Zadanie 11. (0−5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza przekroje wielościanów płaszczyzną (R9.a).

Przykładowe rozwiązanie



Niech SO będzie wysokością ostrosłupa $ABCS$, niech BE będzie wysokością podstawy ABC, niech ponadto SE oraz SF będą wysokościami odpowiednich ścian tego ostrosłupa. Zgodnie z warunkami zadania mamy, że trójkąt EFS jest trójkątem równobocznym, przy czym $|EF| = a$.

Punkt E jest środkiem krawędzi AC, punkt F jest środkiem krawędzi BC, zatem długość krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $2a$, stąd $|AE| = a$.

Rozpatrujemy trójkąt prostokątny AES, w którym $|\sphericalangle AES| = 90°$, $|AS| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2a^2$, stąd $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ponieważ $|AB| = 2a$ więc otrzymujemy $|AB| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Obliczamy długość odcinka OE:

$$|OE| = \frac{1}{3}\cdot|EB| \text{ czyli } |OE| = \frac{1}{3}\cdot\frac{|AB|\sqrt{3}}{2},$$

skąd po podstawieniu długości krawędzi AB mamy

$$|OE| = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{4\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Z trójkąta prostokątnego EOS wyznaczamy wysokość SO ostrosłupa;

$$|SO|^2 = |SE|^2 - |EO|^2,$$

$$|SO|^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

Stąd $|SO| = \frac{4}{3}$.

Obliczamy objętość V ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{27}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ………………………………………………………………………1 pkt

Zdający zapisze długość krawędzi podstawy ostrosłupa w zależności od a, np.: $|AB| = 2a$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………………2 pkt

Zdający

- zapisze równanie $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2a^2$,

albo

- zapisze zależność $|OE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB|\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………………………………3 pkt

Zdający obliczy długość odcinka AB: $|AB| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………………………4 pkt

Zdający

- obliczy wysokość ostrosłupa, np. $|SO|^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2$, stąd $|SO| = \frac{4}{3}$.

albo

- obliczy objętość ostrosłupa z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne ……………………………………………………………………5 pkt

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = \frac{32\sqrt{3}}{27}$.