PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z NOWĄ ERĄ 2017/2018

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.7. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.	**B**

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.3. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach. 2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.	**A**

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	**D**

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.6. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.	**C**

Zadanie 5. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)	**A**

Zadanie 6. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$. 3. Równania i nierówności. Zdający: 1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności; 3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.	**D**

Zadanie 7. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający: 6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$; 7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$.	**B**

Zadanie 8. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający: 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu […]; 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.	**B**

Zadanie 9. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.3. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).	**C**

Zadanie 10. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość; 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.	**A**

Zadanie 11. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.10. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).	**C**

Zadanie 12. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.2. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.	**A**

Zadanie 13. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5.4. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	**C**

Zadanie 14. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od $0°$ do $180°$.	**B**

Zadanie 15. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6.3. Trygonometria. Zdający oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną).	**D**

Zadanie 16. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. 8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.	**A**

Zadanie 17. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.1. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.	**C**

Zadanie 18. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.2. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.	**B**

Zadanie 19. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.4. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.	**C**

Zadanie 20. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.2. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych	**C**

Zadanie 21. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli.	**B**

Zadanie 22. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający: 4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną.	**D**

Zadanie 23. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).	**D**

Zadanie 24. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	**D**

Zadanie 25. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych. GIMNAZJUM 9.1. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów.	**B**

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność: $x(x-4) \leqslant (2x+1)(x-4)$.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Przykładowe rozwiązania

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów. Pierwszy polega na ustaleniu pierwiastków trójmianu kwadratowego, drugi – na ustaleniu zbioru rozwiązań nierówności.

Realizacja pierwszego etapu

Sposób I

Przenosimy składniki na jedną stronę nierówności

$$(2x+1)(x-4) - x(x-4) \geqslant 0$$

i wyłączamy wspólny czynnik poza nawias, zapisując nierówność w postaci iloczynowej.

$$(x-4)(2x+1-x) \geqslant 0$$

$$(x-4)(x+1) \geqslant 0$$

Pierwiastkami trójmianu kwadratowego $(x-4)(x+1)$ są liczby $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Sposób II

Wymnażamy obie strony nierówności:

$$x^2 - 4x \leqslant 2x^2 - 8x + x - 4$$

i redukujemy wyrazy podobne, zapisując nierówność w postaci równoważnej:

$$x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$$

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 3x - 4$.

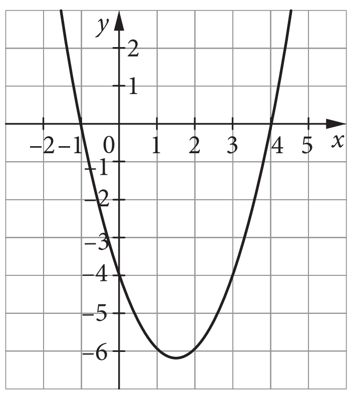
- Obliczamy wyróżnik tego trójmianu kwadratowego:
  $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$, stąd $x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$, $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1 \cdot x_2 = -4$ oraz $x_1 + x_2 = 3$, stąd $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 4$,

albo

- podajemy je bezpośrednio, zapisując pierwiastki trójmianu $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ (podajemy uzasadnienie, np. $f(-1) = f(4) = 0$) lub zaznaczając je na wykresie.



Realizacja drugiego etapu

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \leqslant -1$ lub $x \geqslant 4$.
Alternatywnie: $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy:

- prawidłowo wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = -1, x_2 = 4$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap, popełni błąd, ale otrzyma dwa różne pierwiastki i konsekwentnie rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ albo w postaci: $x \leqslant -1$ lub $x \geqslant 4$

albo

- sporządzi poprawną ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \leqslant -1$ lub $x \geqslant 4$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Uwagi

1. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez $x - 4$ bez stosownego założenia lub rozważy tylko jedno założenie: $x > 4$ albo $x < 4$, to otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez $x - 4$ i rozważy jedno z założeń: $x > 4$, $x < 4$ oraz sprawdzi warunek $x = 4$, rozwiąże nierówność w każdym z dwóch przypadków oraz konsekwentnie wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez $x - 4$ i rozważy dwa założenia: $x > 4$, $x < 4$ oraz sprawdzi warunek $x = 4$, rozwiąże nierówność w każdym z trzech przypadków i poprawnie wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **2 punkty.**

Zadanie 27. (0–2)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \dfrac{4n+5}{2n+1}$ dla $n \geqslant 1$. Sprawdź, czy istnieje wyraz tego ciągu równy $2\frac{1}{2}$.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	3.8. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych. 5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

Ciąg (a_n) ma wyraz $a_n = 2\frac{1}{2}$ wtedy, gdy rozwiązaniem równania $\frac{4n+5}{2n+1} = 2\frac{1}{2}$ jest liczba naturalna dodatnia.

$$\frac{4n+5}{2n+1} = \frac{5}{2}$$

$$10n + 5 = 8n + 10$$

$$n = \frac{5}{2}$$

Liczba $n = \frac{5}{2}$ nie jest liczbą naturalną, więc w tym ciągu nie istnieje wyraz równy $2\frac{1}{2}$.

Sposób II

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu (a_n): $a_1 = 3, a_2 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}, a_3 = \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$. Wystarczy zatem uzasadnić, że ciąg (a_n) jest malejący.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)+5}{2(n+1)+1} - \frac{4n+5}{2n+1} = \frac{(4n+9)(2n+1)-(4n+5)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

Mnożymy wyrażenia w nawiasach, redukujemy wyrazy podobne i ostatecznie otrzymujemy

$a_{n+1} - a_n = \frac{-6}{(2n+3)(2n+1)} < 0$ dla $n \in N_+$, więc ciąg (a_n) jest malejący:

Ciąg (a_n) jest malejący, $a_2 = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}$, a $a_3 = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$, więc w tym ciągu nie istnieje wyraz równy $2\frac{1}{2}$.

Sposób III

Wzór na wyraz ciągu można przekształcić w następujący sposób:

$$a_n = \frac{4n+5}{2n+1} = \frac{(4n+2)+3}{2n+1} = \frac{2(2n+1)+3}{2n+1} = 2 + \frac{3}{2n+1}.$$

Z powyższego zapisu widać, że ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym. I dalej jak wyżej.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy:

- poprawnie wyznaczy rozwiązanie równania wymiernego: $n = \frac{5}{2}$

albo

- uzasadni, że ciąg (a_n) jest malejący.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy poprawnie uzasadni, że w ciągu (a_n) nie istnieje wyraz równy $2\frac{1}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający jedynie wyznaczy wyrazy $a_1 = 3, a_2 = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}, a_3 = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$ i stąd wywnioskuje, że w ciągu (a_n) nie istnieje wyraz równy $2\frac{1}{2}$, to otrzymuje **0 punktów.**

2. Jeżeli zdający wyznaczy wyrazy $a_1 = 3, a_2 = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}, a_3 = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$ i badając monotoniczność ciągu popełni błędy rachunkowe, ale przeprowadzi poprawne rozumowanie prowadzące do wniosku, że wyraz równy $2\frac{1}{2}$ nie istnieje, to otrzymuje **1 punkt.**

Zadanie 28. (0–2)
Udowodnij, że nierówność $(x^2-3)^2+x^4 \geqslant 4\frac{1}{2}$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz a^2-b^2.

Przykładowe rozwiązanie

Sposób I

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Chcemy wykazać, że $(x^2-3)^2+x^4 \geqslant 4\frac{1}{2}$.
Przekształcamy tezę do postaci równoważnej.

$$x^4-6x^2+9+x^4-\frac{9}{2} \geqslant 0$$

$$2x^4-6x^2+\frac{9}{2} \geqslant 0$$

$$4x^4-12x^2+9 \geqslant 0$$

$$(2x^2-3)^2 \geqslant 0$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny. Zatem równoważna jej teza też jest prawdziwa. To kończy dowód.

Sposób II

Do tezy podstawiamy $t=x^2$ i otrzymujemy nierówność kwadratową

$$(t-3)^2+t^2 \geqslant 4\frac{1}{2}$$

$$4t^2-12t+9 \geqslant 0$$

Trójmian kwadratowy $4t^2-12t+9$ najmniejszą wartość przyjmuje dla $t=-\frac{b}{2a}$ $(a>0)$.

Dla $t=-\frac{-12}{8}=1{,}5$ wartość trójmianu wynosi 0.

Ponieważ najmniejsza wartość trójmianu wynosi 0, zatem nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, a tym samym jest prawdziwa teza twierdzenia.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

- gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej $(2x^2-3)^2 \geqslant 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- zapisze nierówność jako nierówność kwadratową (po podstawieniu $t=x^2$) i obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego lub poda współrzędne wierzchołka paraboli.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 29. (0–2)

Dla pewnej liczby rzeczywistej x liczby $1-x$, $2-3x$, $10+2x$ są trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geqslant 1$. Wyznacz x oraz oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykładowe rozwiązanie

Korzystamy z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie.

$$\frac{1-x+10+2x}{2}=2-3x$$

$$x+11=4-6x$$

$$x=-1$$

Stąd $a_1=2$, $a_2=5$, $a_3=8$, ... Różnica tego ciągu $r=3$.

Możemy skorzystać ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_{10}=2+5+8+\ldots+a_{10}=\frac{2\cdot 2+9\cdot 3}{2}\cdot 10=155$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

- gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1=2$ oraz jego różnicę: $r=3$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- wyznaczy wyraz pierwszy oraz różnicę z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy sumę dziesięciu początkowych wyrazów otrzymanego ciągu.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy obliczy sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu: $S_{10}=155$.

Uwaga

Jeżeli zdający stosuje własności ciągu geometrycznego zamiast własności ciągu arytmetycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 30. (0–2)
Osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + 3$, gdzie $a \neq 0$, jest prosta o równaniu $x = -2$. Wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu $y = -x + 2$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej bądź kanonicznej.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Przykładowe rozwiązania

Prosta o równaniu $x = -2$ jest osią symetrii paraboli, więc pierwszą współrzędną jej wierzchołka $W(p,\ q)$ jest $p = -2$. Wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu $y = -x + 2$, więc drugą współrzędną wierzchołka jest $q = 2 + 2 = 4$. Stąd wierzchołkiem paraboli jest punkt $W = (-2, 4)$.
Szukamy wzoru funkcji kwadratowej w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

bądź w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

<u>Sposób I</u>

Zauważmy, że $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 3 = 3$, więc do paraboli należy punkt $P = (0, 3)$. Wstawiamy współrzędne punktu P do wzoru funkcji f.

$$3 = a(0 + 2)^2 + 4$$

$$4a = -1$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

Wzór funkcji w postaci kanonicznej ma postać:

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 4.$$

<u>Sposób II</u>

Tworzymy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = -2 \\ f(-2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 3 = 4 \end{cases}$$

Stąd:

$$4a - 8a = 1$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = 4a,$$

$$b = -1.$$

Zatem

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3.$$

Sposób III

Tworzymy układ równań.

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = -2 \\ \dfrac{-\Delta}{4a} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} = 4 \end{cases}$$

Stąd po podstawieniu otrzymujemy równanie:

$$\frac{-16a^2 + 12a}{4a} = 4$$

$$\frac{4a(-4a + 3)}{4a} = 4$$

$$-4a + 3 = 4$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = 4a,$$

$$b = -1.$$

Zatem

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy wyznaczy współrzędne wierzchołka paraboli $p = -2$, $q = 4$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy zapisze wzór funkcji w postaci kanonicznej $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 + 4$ lub ogólnej $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$.

Zadanie 31. (0–3)

Na ściankach symetrycznej dwunastościennej kostki do gry zapisano liczby 1, 2, 3, …, 12 (jak na rysunku). Rzucamy tą kostką trzy razy i zapisujemy wyrzucone liczby w kolejności otrzymywania, tworząc ciąg trójwyrazowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzymy w ten sposób ciąg geometryczny o ilorazie całkowitym.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Przykładowe rozwiązanie

Zdarzeniem elementarnym jest każdy trójwyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru {1, 2, 3, ..., 12}. Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym. Z reguły mnożenia wynika, że liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 12^3 = 1728$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy ciąg geometryczny o ilorazie całkowitym. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A pogrupujmy w zależności od ilorazu ciągu geometrycznego.

Iloraz ciągu	Ciągi	Liczba ciągów
$q = 1$	(1, 1, 1), (2, 2, 2), ..., (12, 12, 12)	12
$q = 2$	(1, 2, 4), (2, 4, 8), (3, 6, 12)	3
$q = 3$	(1, 3, 9)	1

Stąd liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 16$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{12 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{1}{108}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający:

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 12^3 = 1728$

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A: (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6), (7, 7, 7), (8, 8, 8), (9, 9, 9), (10, 10, 10), (11, 11, 11), (12, 12, 12), (1, 2, 4), (2, 4, 8), (3, 6, 12) (1, 3, 9)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 12^3 = 1728$ oraz zapisze, że $|A| = 16$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A i poda wynik w postaci ułamka nieskracalnego: $P(A) = \frac{1}{108}$.

Uwaga

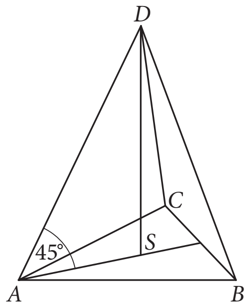
Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, ale przy wyznaczaniu liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A pominie jedno zdarzenie elementarne lub popełni błąd przy zliczaniu poprawnie wypisanych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32. (0–3)
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości $2\sqrt{3}$ krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9.2. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów. GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli.

Przykładowe rozwiązania

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny *ABC*, punkt *S* jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy jest równy 45°, zatem możemy zauważyć, że trójkąty prostokątne *SBD*, *SAD*, *SCD* są równoramienne. Można też skorzystać z własności funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym i obliczyć długość odcinków $AS = BS = CS$.

$$\mathrm{tg}45^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{x}$$
$$1 = \frac{2\sqrt{3}}{x}$$
$$AS = BS = CS = 2\sqrt{3}$$

Aby obliczyć pole podstawy, potrzebna jest długość boku trójkąta lub wysokość trójkąta *ABC*. Wiadomo, że *AS* to $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta *ABC*. Obliczamy wysokość trójkąta *ABC*.

$$\frac{2}{3}h = 2\sqrt{3}$$
$$h = 3\sqrt{3}$$

Wyznaczmy długość krawędzi podstawy ostrosłupa *ABCD*, korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego *ABC*.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$3\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$a = 6$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa. Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego.

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

Na koniec obliczamy objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający obliczy długość odcinka *AS* lub *BS* lub *CS* i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający obliczy wysokość podstawy ostrosłupa $(3\sqrt{3})$ oraz długość boku tej podstawy (6).

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający obliczy objętość ostrosłupa *ABCD* (18).

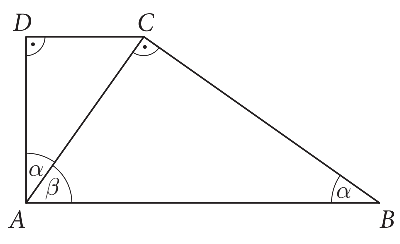
Zadanie 33. (0–4)

W trapezie prostokątnym *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* przekątna *AC* jest prostopadła do ramienia *BC*, dłuższa podstawa *AB* ma długość 9, a sinus kąta *CAD* jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz pole tego trapezu.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych. GIMNAZJUM 10. Figury płaskie. Zdający: 7) stosuje twierdzenie Pitagorasa; 9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



Zauważmy, że $\alpha = 90^\circ - \beta$, więc $\sin\alpha = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta$. Stąd w trójkącie ABC:

$$\cos\beta = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|AC|}{9}$$

$$|AC| = 3\sqrt{3}$$

Następnie w trójkącie ACD:

$$\sin\alpha = \frac{|CD|}{|AC|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|CD|}{3\sqrt{3}}$$

$$|CD| = 3$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ACD:

$$|AD|^2 + 3^2 = (3\sqrt{3})^2$$

$$|AD| = 3\sqrt{2}$$

Pole trapezu $ABCD$ wynosi więc:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(9+3)\cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający:

- zapisze, że $\sin\alpha = \cos\beta$

albo

- zauważy, że trójkąty ABC i ACD są podobne, więc $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CAD| = \alpha$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy długość przekątnej AC: $|AC| = 3\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający wyznaczy długości przyprostokątnych w trójkącie ACD: $|CD| = 3$, $|AD| = 3\sqrt{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

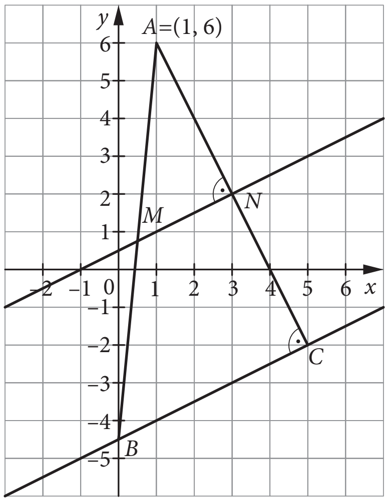
Zdający obliczy pole trapezu: $P_{ABCD} = 18\sqrt{2}$.

Zadanie 34. (0–5)

W trójkącie ABC wierzchołek A ma współrzędne $(1, 6)$, wierzchołek B leży na osi Oy, a $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ jest równoległa do boku BC i przecina każdy z boków AB i AC w połowie. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 5) wyznacza współrzędne środka odcinka.

Przykładowe rozwiązanie



Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AB oraz AC. Z warunku prostopadłości wyznaczamy równanie prostej AN: $y = -2x + b$. Podstawiając współrzędne punktu $A = (1, 6)$ otrzymujemy równanie

$$6 = -2 \cdot 1 + b$$
$$b = 8$$

Zatem równanie prostej AN ma postać: $y = -2x + 8$.

Następnie obliczamy współrzędne punktu N. Jest to punkt wspólny prostych AN i MN, rozwiązujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

Stosując metodę podstawiania, otrzymujemy równanie:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -2x + 8$$
$$\frac{5}{2}x = \frac{15}{2}$$
$$x = 3$$

Wstawiamy wyznaczoną wartość x np. do pierwszego równania układu:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} = 2.$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, stąd punkt $N = (3, 2)$.

Korzystając ze wzoru na środek odcinka, wyznaczamy współrzędne wierzchołka $C = (c_1, c_2)$.

$$\begin{cases} \dfrac{c_1 + 1}{2} = 3 \\ \dfrac{c_2 + 6}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

Zatem $C = (5, -2)$.

Wierzchołek B trójkąta jest punktem przecięcia prostej BC z osią Oy, wystarczy zatem wyznaczyć jej równanie.

Proste MN i BC są równoległe, stąd równanie prostej BC: $y = \frac{1}{2}x + b$. Podstawiając współrzędne punktu $C = (5, -2)$ otrzymujemy równanie:

$$-2 = \frac{5}{2} + b$$

$$b = -\frac{9}{2}$$

Zatem równanie prostej BC ma postać $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$. Wynika stąd, że $B = \left(0, -4\frac{1}{2}\right)$.

Odpowiedź: $B = \left(0, -4\frac{1}{2}\right)$, $C = (5, -2)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający wyznaczy równanie prostej AN: $y = -2x + 8$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający obliczy współrzędne punktu $N = (3, 2)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu $C = (5, -2)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania .... **4 pkt**

Zdający zapisze równanie prostej BC: $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$ i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

Zdający obliczy współrzędne obu punktów: $B = \left(0, -4\frac{1}{2}\right)$, $C = (5, -2)$.