CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2018/2019

FORMUŁA OD 2015
„NOWA MATURA”
i
FORMUŁA DO 2014
„STARA MATURA”

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

SIERPIEŃ 2019

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny**. Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeń o niesamodzielność w pisaniu pracy.

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Wersja A/C

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	B	B	C	C	C	D	D	C	A	B	A	C	B	A	B	A	D	A	B	C	D	A	D	D

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $\left(x^2-16\right)\left(x^3-1\right)=0$.

Przykładowe rozwiązanie

Iloczyn jest równy 0, jeśli przynajmniej jeden z czynników jest równy 0.

Zatem $x^2-16=0$ lub $x^3-1=0$.

Równanie $x^2-16=0$ ma dwa rozwiązania $x=4$ i $x=-4$.

Równanie $x^3-1=0$ ma jedno rozwiązanie $x=1$.
Zatem rozwiązaniami równania $\left(x^2-16\right)\left(x^3-1\right)=0$ są liczby: $x=4$, $x=-4$ oraz $x=1$.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:
- zapisze dwa równania $x^2-16=0$ i $x^3-1=0$ lub z zapisu wynika, że rozwiązuje te równania

albo
- wyznaczy poprawnie lub poda rozwiązania jednego z równań: $x^2-16=0$ lub $x^3-1=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x=4$, $x=-4$ oraz $x=1$, ale nie uzyska ich w wyniku błędnej metody.

Uwagi
1. Jeżeli zdający jedynie poda wszystkie rozwiązania równania, bez zapisanych rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poprawnie zapisze lewą stronę równania w postaci sumy jednomianów, znajdzie trzy rozwiązania: $-4, 1, 4$, ale nie uzasadni, że są to jedyne rozwiązania, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli na etapie przyrównywania czynników do zera jedynym błędem zdającego jest błąd przy rozkładzie wielomianu x^3-1, to zdający może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 5x + 3 \le 0$.

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2 - 5x + 3$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 - 5x + 3$
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
    $\Delta = -5\cdot(-5) - 4\cdot 2\cdot 3 = 25 - 24 = 1^2$ i stąd $x_1 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ oraz $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

  albo
  - stosujemy wzory Viète'a:
    $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2}$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$, stąd $x_1 = 1$ oraz $x_2 = \frac{3}{2}$.

Drugi etap rozwiązania.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle$ lub $x \in \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 1$ oraz $x_2 = \frac{3}{2}$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności;
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

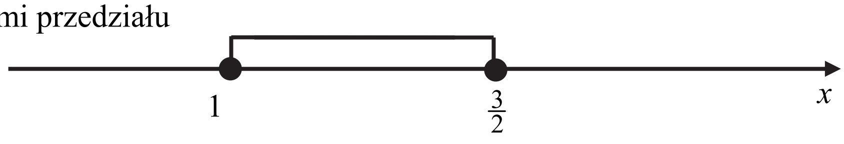
Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle$ lub $x \in \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle$, lub $x \le \frac{3}{2} \wedge x \ge 1$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału



Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x \le \frac{3}{2}$ lub $x \ge 1$, $x \le \frac{3}{2}$ oraz $x \ge 1$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 1$ oraz $x_2 = \frac{3}{2}$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x \in \left\langle -1, \frac{3}{2} \right\rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \left\langle \frac{3}{2}, 1 \right\rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność $x + \frac{1-x}{x} \ge 1$.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie nierówność $x + \frac{1-x}{x} \ge 1$.

Z założenia wiemy, że $x > 0$, zatem możemy pomnożyć nierówność obustronnie przez x i kolejno otrzymujemy:\

$$x^2 + 1 - x \ge x,$$
$$x^2 - 2x + 1 \ge 0,$$
$$(x-1)^2 \ge 0.$$

Z lewej strony nierówności występuje wyrażenie przyjmujące wartość nieujemną, bo jest ono kwadratem liczby rzeczywistej. Zatem nierówność $x + \frac{1-x}{x} \ge 1$ jest prawdziwa.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze nierówność równoważną w postaci

- zawierającej po jednej stronie 0, a po drugiej sumę jednomianów lub iloraz wielomianów, np.:

$$x^2 - 2x + 1 \ge 0 \text{ lub } \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \ge 0$$

albo

- $x + \frac{1}{x} - 1 \ge 1$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

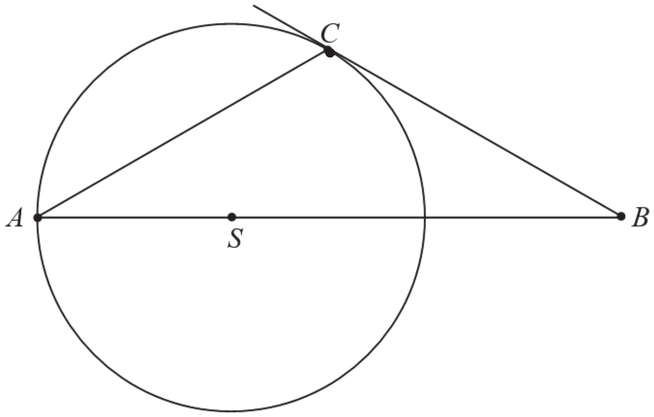
Uwagi

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości x, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający zapisze nierówność $(x-1)^2 \geq 0$ i stwierdzi zakończenie dowodu, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ i nie zapisze uzasadnienia jej prawdziwości, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Zadanie 29. (0–2)

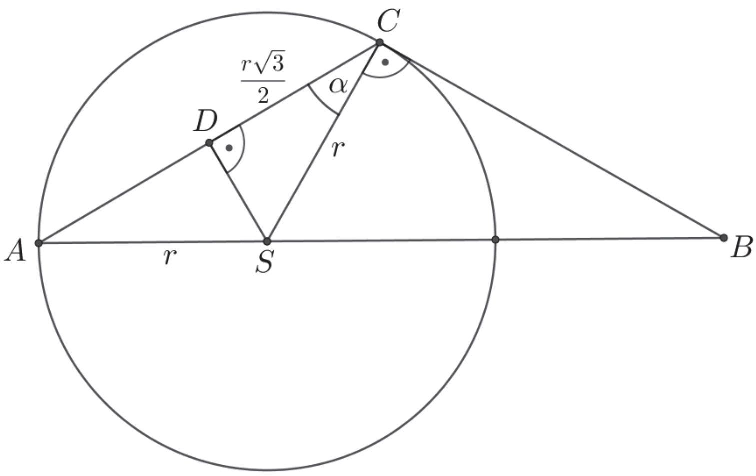
Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r, a środek S tego okręgu leży na boku AB trójkąta (zobacz rysunek). Prosta BC jest styczna do tego okręgu w punkcie C, a ponadto $|AC| = r\sqrt{3}$. Wykaż, że kąt ACB ma miarę $120°$.



Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zauważmy, że prosta BC, jako styczna do okręgu, jest prostopadła do odcinka SC, tj. do promienia okręgu. W trójkącie równoramiennym ACS prowadzimy wysokość SD.



Obliczamy cosinus kąta ostrego ACS:

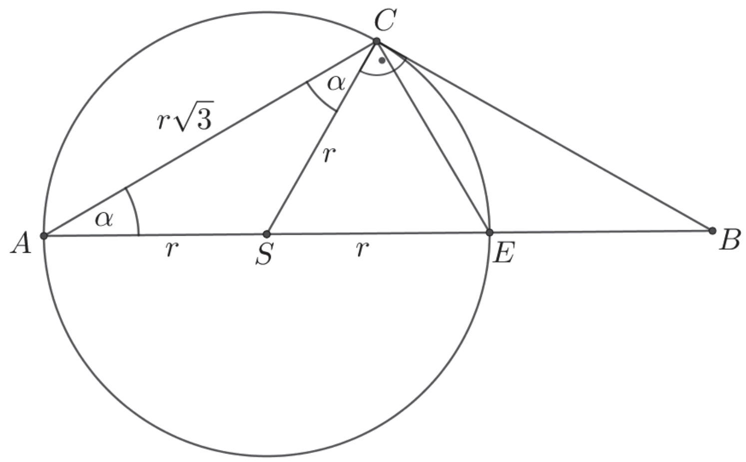
$$\cos\alpha = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Stąd wynika, że $|\sphericalangle ACS| = \alpha = 30°$.

Kąt ACB jest sumą kątów ACS i BCS, zatem ma miarę $30° + 90°$, czyli $120°$.
To kończy dowód.

II sposób

Poprowadźmy promień SC i odcinek CE, gdzie E jest punktem przecięcia okręgu z odcinkiem AB.



Prosta BC, jako styczna do okręgu, jest prostopadła do odcinka SC.
Kąt ACE jest prosty, gdyż jest kątem wpisanym w okrąg opartym na półokręgu. Zatem trójkąt ACE jest prostokątny, w którym $|AC| = r\sqrt{3}$ oraz $|AE| = 2r$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACE otrzymujemy

$$|CE|^2 = |AE|^2 - |AC|^2 = (2r)^2 - \left(r\sqrt{3}\right)^2 = r^2,$$

stąd

$$|CE| = r .$$

To oznacza, że trójkąt SCE jest równoboczny, więc kąt CSE jest równy 60° . Zatem kąt wpisany CAE, oparty na tym samym łuku co kąt środkowy CSE jest równy $\alpha = 30^\circ$.
Trójkąt ACS jest równoramienny, więc $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle CAS| = 30^\circ$.
Kąt ACB jest sumą kątów ACS i BCS, zatem ma miarę $30^\circ + 90^\circ$, czyli 120° .
To kończy dowód.

Uwaga

Miarę kąta ACS (lub kąta ASC) możemy też obliczyć, wykorzystując twierdzenie cosinusów w trójkącie ACS. Wtedy otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AC|^2 + |CS|^2 - 2|AC| \cdot |CS| \cdot \cos\alpha ,$$

$$r^2 = \left(r\sqrt{3}\right)^2 + r^2 - 2 \cdot r\sqrt{3} \cdot r \cdot \cos\alpha .$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{3r^2}{2r^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Zatem $\alpha = 30^\circ$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy

- wyznaczy miarę jednego z kątów ACS, CAS, ASC, SCE, wykorzystując związki miarowe w trójkącie prostokątnym CDS lub ADS lub ACE lub twierdzenie Pitagorasa

albo

- obliczy cosinus jednego z kątów ACS, CAS, ASC

 na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga
Jeżeli zdający zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt BCS jest prosty oraz zapisze bez uzasadnienia, że kąt ACS jest równy $30°$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana liczba w zapisie dziesiętnym ma cyfrę dziesiątek, która należy do zbioru $\{1,3,5,7,9\}$ i jednocześnie cyfrę jedności, która należy do zbioru $\{0,2,4,6,8\}$.

Przykładowe rozwiązania
I sposób (*klasyczna definicja prawdopodobieństwa*)
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary liczb (a,b), gdzie $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ i $b \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$. Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 9 \cdot 10 = 90$.
Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającemu na otrzymaniu w wyniku losowania par liczb (a,b), spełniających warunki: $a \in \{1,3,5,7,9\}$ i $b \in \{0,2,4,6,8\}$.
Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest więc równa $|A| = 5 \cdot 5 = 25$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

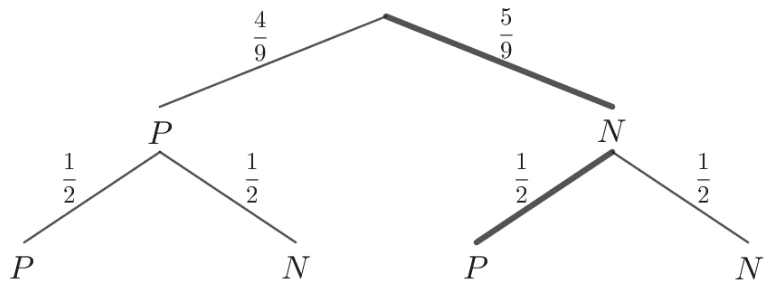
II sposób (*metoda tabeli*)
Wszystkie zdarzenia elementarne możemy przedstawić w prostokątnej tablicy. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu zaznaczamy symbolem x

b \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x		x		x		x		x
1									
2	x		x		x		x		x
3									
4	x		x		x		x		x
5									
6	x		x		x		x		x
7									
8	x		x		x		x		x
9									

Stąd $|\Omega| = 9 \cdot 10 = 90$, $|A| = 5 \cdot 5 = 25$.

Zatem $P(A) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

III sposób (*metoda drzewka*)
Przedstawiamy model graficzny doświadczenia.
P – oznacza liczbę parzystą, N – nieparzystą.



Pogrubiona gałąź drzewa odpowiada zdarzeniu A. Zatem prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe

$$P(A)=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{18}.$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=90$

albo

- wyznaczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A|=25$ i nie wskaże przy tym zdarzeń elementarnych niesprzyjających zdarzeniu A,

albo

- zapisze przy stosowaniu drzewa probabilistycznego na dwóch etapach prawdopodobieństwa potrzebne do wyznaczenia końcowego wyniku oraz wskaże wszystkie sytuacje sprzyjające rozważanemu zdarzeniu,

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{5}{18}$, $P(A)=\frac{25}{90}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd przy wypisywaniu wszystkich zdarzeń elementarnych i wypisze o jedno za mało lub jedno powtórzy, ale nie wypisze żadnego niewłaściwego i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$ lub $P(A)<0$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**, o ile końcowy wynik nie jest skutkiem błędu w działaniach na ułamkach.
3. Jeżeli zdający stosuje rozbudowane drzewo probabilistyczne, w którym przynajmniej pięć gałęzi odpowiada sytuacjom sprzyjającym rozważanemu zdarzeniu, i zdający pominie jedną z takich gałęzi, to może otrzymać **1 punkt**, jeśli doprowadzi rozumowanie do końca.
4. Jeżeli zdający zapisze tylko sam wynik końcowy: $P(A)=\frac{25}{90}$ lub $P(A)=\frac{5}{18}$, to otrzymuje **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze tylko: $|A|=25$, $|\Omega|=90$, $P(A)=\frac{25}{90}$, to otrzymuje **2 punkty**.
6. Jeżeli zdający zapisze prawdopodobieństwo $P(A)=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 31. (0–2)

Przekątne rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S=\left(-\frac{21}{2},-1\right)$. Punkty A i C leżą na prostej o równaniu $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{2}$. Wyznacz równanie prostej BD.

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ przekątne rombu są prostopadłe, więc prosta BD jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez punkt S. Zatem prosta BD ma równanie postaci:

$$y=-3x+b\ .$$

Współrzędne punktu S spełniają to równanie, zatem

$$-1=-3\cdot\left(-\tfrac{21}{2}\right)+b\ .$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$b=-1-\tfrac{63}{2}=-\tfrac{65}{2}\ .$$

Równanie prostej BD to:

$$y=-3x-\tfrac{65}{2}$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy poprawnie zapisze współczynnik kierunkowy prostej BD, prostopadłej do prostej AC: $a=-3$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy wyznaczy równanie prostej BD: $y=-3x-\tfrac{65}{2}$.

Zadanie 32. (0–4)

W ciągu arytmetycznym $\left(a_1,a_2,...,a_{39},a_{40}\right)$ suma wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 1340, a suma wyrazów ciągu o numerach nieparzystych jest równa 1400. Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu arytmetycznego.

Przykładowe rozwiązanie

Niech r oznacza różnicą rozważanego ciągu arytmetycznego.

Suma wyrazów o numerach parzystych tego ciągu to suma dwudziestu początkowych wyrazów innego ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a_1+r i różnicy $2r$.

Stąd możemy zapisać równanie:

$$\frac{a_1+r+a_1+r+19\cdot 2r}{2}\cdot 20=1340\ .$$

Z kolei suma wyrazów o numerach nieparzystych rozważanego w treści zadania ciągu to suma dwudziestu początkowych wyrazów innego ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy $2r$.

Stąd możemy zapisać równanie:

$$\frac{a_1+a_1+19\cdot 2r}{2}\cdot 20=1400\ .$$

Rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1+r+a_1+r+19\cdot 2r}{2}\cdot 20=1340 \\ \dfrac{a_1+a_1+19\cdot 2r}{2}\cdot 20=1400. \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} (a_1+20r)\cdot 20=1340 \\ (a_1+19r)\cdot 20=1400, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1+20r=67 \\ a_1+19r=70. \end{cases}$$

Po odjęciu stronami drugiego równania od pierwszego otrzymujemy:

$$r=-3,$$

a następnie:

$$a_1=127.$$

Obliczamy ostatni wyraz rozważanego ciągu:

$$a_{40}=127+39\cdot(-3)=10.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze jedno równanie z dwiema niewiadomymi, wynikające z treści zadania, np.:

$$\frac{a_1+r+a_1+r+19\cdot 2r}{2}\cdot 20=1340 \text{ lub } \frac{a_1+a_1+19\cdot 2r}{2}\cdot 20=1400 \text{, lub } \frac{2a_1+39r}{2}\cdot 40=2740,$$

$$\text{lub } \frac{a_2+a_{40}}{2}\cdot 20=1340 \text{, lub } \frac{a_1+a_{39}}{2}\cdot 20=1400$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze dwa nierównoważne równania z tymi samymi dwiema niewiadomymi, wynikające z treści zadania, np.:

$$\frac{a_1+r+a_1+r+19\cdot 2r}{2}\cdot 20=1340 \text{ oraz } \frac{a_1+a_1+19\cdot 2r}{2}\cdot 20=1400$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy wyraz a_1 i różnicę r rozważanego w zadaniu ciągu arytmetycznego:

$$a_1=127,\ r=-3,$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy czterdziesty wyraz rozważanego ciągu: $a_{40}=10$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.

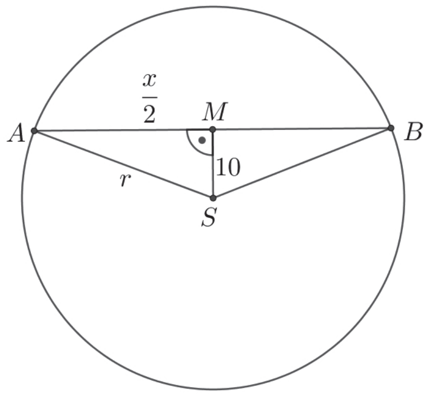
2. Jeżeli zdający stosuje metodę prób i błędów, sprawdzi, np. obliczając sumy odpowiednich składników, że wybrany ciąg spełnia warunki zadania, i wyznaczy $a_{40} = 10$, to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze jedynie $a_1 = 127$, $r = -3$ i $a_{40} = 10$, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający pomyli sumy i przyjmie, że suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 1400, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 1340 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający, zapisując równania z sumą dwudziestu wyrazów ciągu, próbuje wypisać wszystkie 20 wyrazów i pominie w równaniu jeden lub dwa wyrazy ciągu, ale konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 33. (0–4)

Środek okręgu leży w odległości 10 cm od cięciwy tego okręgu. Długość tej cięciwy jest o 22 cm większa od promienia tego okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

Przykładowe rozwiązanie

Niech A i B oznaczają końce rozpatrywanej cięciwy, niech S i r będą odpowiednio środkiem i promieniem okręgu, oraz niech x oznacza długość cięciwy AB.



Odległość środka S okręgu od cięciwy AB jest długością odcinka łączącego punkt S z środkiem M tej cięciwy. Zatem $|AM| = \frac{x}{2}$.

Odcinek MS jest prostopadły do cięciwy AB. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AMS otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AM|^2 + |MS|^2,$$

$$r^2 = \left(\tfrac{x}{2}\right)^2 + 10^2.$$

Z treści zadania wynika, że $x = r + 22$. Otrzymujemy więc równanie z jedną niewiadomą r

$$r^2 = \left(\tfrac{r+22}{2}\right)^2 + 10^2,$$

$$r^2 = \frac{1}{4}r^2 + 11r + 121 + 100,$$

$$\tfrac{3}{4}r^2 - 11r - 221 = 0.$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe. Możemy wyznaczyć wyróżnik trójmianu kwadratowego, a następnie obliczyć rozwiązania.

Obliczamy wyróżnik Δ:

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot \tfrac{3}{4} \cdot (-221) = 121 + 663 = 784 = 28^2.$$

Obliczamy dwie wartości r:

$r_1 = \frac{11-28}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{-17}{2\cdot\frac{3}{4}} < 0$, ta wartość jest ujemna i nie może być długością odcinka,

oraz $r_2 = \frac{11+28}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{39}{\frac{3}{4}} = \frac{39\cdot 2}{3} = 26$.

Zatem promień okręgu jest równy 26.

Schemat punktowania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.
Zdający
- rozważa trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątną jest promień r okręgu, a przyprostokątnymi są: odcinek o długości 10 i odcinek o długości połowy rozważanej cięciwy (zdający może przedstawić sytuację na rysunku pomocniczym)

albo
- zapisze zależność między promieniem i długością rozważanej cięciwy, np.: $x = r + 22$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze zależność, wynikającą z twierdzenia Pitagorasa, np.:

$$10^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np. r (r oznacza promień okręgu):

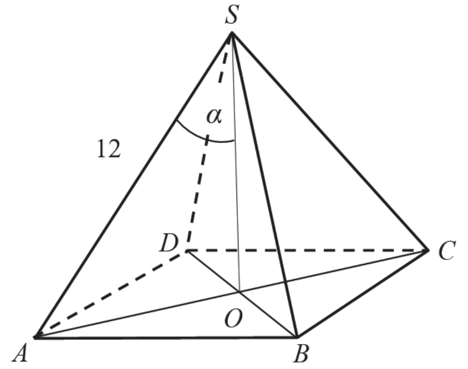
$$10^2 + \left(\frac{r}{2}+11\right)^2 = r^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający stwierdzi, że zadanie ma jedno rozwiązanie i poprawnie obliczy promień okręgu: $r = 26$.

Uwagi
1. Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
2. Jeżeli jedynym błędem jest niepoprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa, np. pomylenie przyprostokątnej z przeciwprostokątną, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 34. (0–5)
Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest równa 12. (zobacz rysunek). Krawędź boczna tworzy z wysokością tego ostrosłupa kąt α taki, że $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wprowadzamy oznaczenia: $|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=a$, $|SO|=H$.

Trójkąt AOS jest prostokątny, zatem $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{H}=\frac{a\sqrt{2}}{2H}$, czyli $\frac{a\sqrt{2}}{2H}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Stąd $a=\frac{4H}{\sqrt{10}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS dostajemy

$$H^2+\left(\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2=12^2,$$

$$H^2+\tfrac{1}{2}a^2=144.$$

Otrzymujemy więc równanie z jedną niewiadomą H

$$H^2+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{4H}{\sqrt{10}}\right)^2=144,$$

$$H^2+\tfrac{4}{5}H^2=144,$$

$$\tfrac{9}{5}H^2=144$$

$$H^2=\tfrac{5}{9}\cdot 144=16\cdot 5.$$

Stąd $H=4\sqrt{5}$ oraz $a=\frac{4H}{\sqrt{10}}=\frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=8\sqrt{2}$.

Objętość ostrosłupa jest równa $V=\frac{1}{3}a^2H=\frac{1}{3}\left(8\sqrt{2}\right)^2\cdot 4\sqrt{5}=\frac{512\sqrt{5}}{3}$

II sposób

Wprowadzamy oznaczenia $|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=a$, $|SO|=H$.

Z treści zadania wiemy że, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, zatem $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Stąd $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha$.

Wykorzystując tę zależność oraz tożsamość $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ otrzymujemy

$$\left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1$$

$$\tfrac{4}{5}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\tfrac{9}{5}\cos^2\alpha=1,$$

$$\cos^2\alpha=\tfrac{5}{9}.$$

Stąd $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, gdyż α jest kątem ostrym. Zatem $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{3}$.

Z trójkąta prostokątnego AOS otrzymujemy

$$\sin\alpha = \frac{|AO|}{12} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{12} = \frac{a\sqrt{2}}{24} \text{ oraz } \cos\alpha = \frac{|AO|}{12} = \frac{H}{12}.$$

Zatem

$$\frac{a\sqrt{2}}{24} = \frac{2}{3} \text{ oraz } \frac{H}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$a = 8\sqrt{2} \text{ oraz } H = 4\sqrt{5}.$$

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3}\left(8\sqrt{2}\right)^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512\sqrt{5}}{3}$.

III sposób

Z treści zadania wiemy że, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Wprowadzamy oznaczenia w trójkącie AOS: $|AO| = 2x$, $|SO| = \sqrt{5}x$ i zapisujemy równanie $(2x)^2 + \left(\sqrt{5}x\right)^2 = 12^2$. Rozwiązaniem tego równania jest $x = 4$.

Stąd otrzymujemy $|SO| = \sqrt{5}x = 4\sqrt{5} = H$ (wysokość ostrosłupa) i $|AC| = 4x = 16$.

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|AC|^2 \cdot H = \frac{1}{6}\cdot 16^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512\sqrt{5}}{3}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający:

- zapisze zależność pomiędzy długością krawędzi a podstawy oraz wysokością H ostrosłupa: $\frac{a\sqrt{2}}{2H} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

albo

- zapisze zależność pomiędzy długością krawędzi a podstawy oraz wysokością H ostrosłupa: $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = 12^2$,

albo

- zapisze zależność $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

albo

- zapisze zależność $\frac{|AO|}{|SO|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

albo

- zapisze zależność $|AO|^2 + |SO|^2 = 12^2$,

albo

- wprowadzi oznaczenia: $|AO| = 2x$, $|SO| = \sqrt{5}x$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi a oraz H, np.: $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = 12^2$ oraz $\frac{a\sqrt{2}}{2H} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

albo

- zapisze równanie trygonometryczne, w którym wystąpi jedna funkcja trygonometryczna, np.: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1$,

albo

- zapisze równanie $(2x)^2+\left(\sqrt{5}x\right)^2=12^2$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający obliczy

- wysokość ostrosłupa: $H=4\sqrt{5}$

albo

- długość krawędzi podstawy ostrosłupa: $a=8\sqrt{2}$,

albo

- długość przekątnej podstawy ostrosłupa: $|AC|=16$,

albo

- współczynnik proporcjonalności: $x=4$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $H=4\sqrt{5}$ oraz długość

- krawędzi podstawy ostrosłupa: $a=8\sqrt{2}$

lub

- przekątnej podstawy ostrosłupa: $|AC|=16$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V=\frac{512\sqrt{5}}{3}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe lub przy przepisywaniu, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między krawędzią boczną i wysokością tego ostrosłupa, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający przyjmuje, że krawędź podstawy ostrosłupa jest równa 12, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
4. Akceptujemy poprawne przybliżenia liczb rzeczywistych.
5. Jeżeli jedynym błędem jest:
   a) niepoprawne wyznaczenie długości przekątnej kwadratu, ale niebędące skutkiem ujawnionego błędu rachunkowego,
   b) niepoprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,

   to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie popełnia innych błędów i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
6. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwadze 5. a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
7. Jeśli zdający obliczy $x=4$ i zapisze objętość ostrosłupa w zależności od x, ale nie poda wyniku liczbowego, to otrzymuje **4 punkty**.