Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej ($n-1$) punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024:
https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej [...]; II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie poprawne – wykazanie, że dana liczba jest równa $\frac{5}{2}$, czyli jest liczbą wymierną

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – obliczenie pierwiastka $\sqrt{13-4\sqrt{3}}=\left|1-2\sqrt{3}\right|$ i usunięcie niewymierności z mianownika ułamka $\frac{2-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – usunięcie niewymierności z mianownika ułamka $\frac{2-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$ albo zapisanie liczby podpierwiastkowej $13-4\sqrt{3}$ w postaci kwadratu, np. $\left(1-2\sqrt{3}\right)^2$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

$$\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1-4\sqrt{3}+12}+\frac{2-\sqrt{3}}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}+\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2}=$$

$$=\left|1-2\sqrt{3}\right|+\frac{4-4\sqrt{3}+3}{2}=2\sqrt{3}-1+\frac{7}{2}-2\sqrt{3}=\frac{5}{2}\in\mathbb{Q}$$

Zadanie 2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: I.2) (R) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2; II.1) (R) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych; II.2) (R) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x-a$.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie poprawne – przekształcenie danej liczby do postaci $\frac{n^3+6n^2+11n+6}{6}$ i wykazanie, że liczba $n^3+6n^2+11n+6$ jest podzielna przez 6

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci – zapisanie wielomianu $n^3+6n^2+11n+6$ w postaci iloczynu $(n+1)(n+2)(n+3)$ przy braku uzasadnienia lub niepełnym uzasadnieniu podzielności liczb postaci $(n+1)(n+2)(n+3)$ przez 6

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – przekształcenie danej liczby do postaci $\frac{n^3+6n^2+11n+6}{6}$ i znalezienie jednego z całkowitych pierwiastków wielomianu $n^3+6n^2+11n+6$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

$$\frac{1}{6}n^3+n^2+\frac{11}{6}n+1=\frac{\mathrm{n}^3+6\mathrm{n}^2+11\mathrm{n}+6}{6}$$

Pierwiastkiem wielomianu $W(n)=n^3+6n^2+11n+6$ jest liczba -1, gdyż $W(-1)=0$. Wielomian $W(n)$ jest więc podzielny przez dwumian $(n+1)$.

Podzielimy wielomian $W(n)$ przez dwumian $(n+1)$.

	1	6	11	6
–1	1	5	6	0

$$n^3+6n^2+11n+6=(n+1)\left(n^2+5n+6\right)$$

Zatem:

$$\frac{n^3+6n^2+11n+6}{6}=\frac{(n+1)\left(n^2+5n+6\right)}{6}$$

Pierwiastki równania $n^2+5n+6=0$ są równe:

$n_1=\frac{-5-1}{2}=-3$ i $n_2=\frac{-5+1}{2}=-2$, więc $n^2+5n+6=(n+3)(n+2)$, więc:

$\frac{1}{6}n^3+n^2+\frac{11}{6}n+1=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$

Stwierdzamy, że $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\in\mathbb{N}$, gdyż liczba naturalna $(n+1)(n+2)(n+3)$ jako iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 2 i jest podzielna przez 3, czyli jest podzielna przez 6.

Zadanie 3. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.4) stosuje wzory na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; IV. 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych; IV.1) (R) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases}ax+by=3\\x^2+y^2+cx+dy=f\end{cases}$ lub $\begin{cases}ax+by=e\\y=cx^2+dx+f\end{cases}$; VI.1) (R) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych.

Zasady oceniania

6 pkt – rozwiązanie poprawne – wyznaczenie wzorów na n-te wyrazy ciągów $a_n=2n+3$ i $b_n=3n-1$ oraz poprawne obliczenie granicy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{2}{3}$

5 pkt – rozwiązanie, w którym zostały bezbłędnie pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczono poprawnie wzory na n-te wyrazy obu ciągów $a_n=2n+3$ i $b_n=3n-1$ i popełniono błędy w obliczaniu granicy ciągu lub tej granicy nie wyznaczono albo popełniono błędy rachunkowe podczas wyznaczania wzorów na n-te wyrazy ciągów i w ich wyniku otrzymano inną granicę typu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, którą obliczono poprawnie

4 pkt – rozwiązanie, w którym zostały bezbłędnie pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczono wzory na n-te wyrazy obu ciągów, przy czym popełniono błędy rachunkowe lub nie uwzględniono, że (a_n) jest ciągiem rosnącym

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu $(a_n)-\begin{cases}a_1=5\\r=2\end{cases}$ oraz wyznaczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu $(b_n)-\begin{cases}b_1=2\\r'=3\end{cases}$

ALBO

rozwiązanie, w którym prawidłowo wyznaczono wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n), albo rozwiązanie, w którym prawidłowo wyznaczono wzór na n-ty wyraz ciągu (b_n)

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu $(a_n)-\begin{cases}a_1=5\\ r=2\end{cases}$ albo wyznaczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu $(b_n)-\begin{cases}b_1=2\\ r'=3\end{cases}$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n), np. $\begin{cases}2a_1+6r=22\\ a_1(a_1+4r)=65\end{cases}$, albo zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć pierwszy wyraz i różnicę ciągu (b_n), np. $\begin{cases}\dfrac{b_1+b_1+48r'}{2}\cdot 25=1850\\ \dfrac{b_1+r'+b_1+49r'}{2}\cdot 25=1925\end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że $a_1(a_1+4r)=65$ i $a_1+r+a_1+5r=22$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases}a_1=11-3r\\ a_1(a_1+4r)=65\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=11-3r\\ (11-3r)(11+r)-65=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=11-3r\\ -3r^2-22r+56=0\end{cases}$$

$-3r^2-22r+56=0$

$\Delta=1156$ $\qquad r=\dfrac{22-34}{-6}=2$ lub $r=\dfrac{22+34}{-6}=-9\dfrac{1}{3}<0$ wynik sprzeczny z informacją o tym, że (a_n) jest ciągiem rosnącym

Rozwiązaniem układu jest para $\begin{cases}a_1=5\\ r=2\end{cases}$. Wyraz ogólny ciągu (a_n) można przedstawić wzorem: $a_n=5+2(n-1)$, stąd $a_n=2n+3$.

Z treści zadania wynika, że skoro:

$b_1+b_3+b_5+\dots+b_{47}+b_{49}=1850$

$b_2+b_4+b_6+\dots+b_{48}+b_{50}=1925$,

to spełniony być musi układ równań:

$$\begin{cases}\dfrac{b_1+b_{49}}{2}\cdot 25=1850\\ \dfrac{b_2+b_{50}}{2}\cdot 25=1925\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{b_1+b_{49}}{2}\cdot 25=1850\\ \dfrac{b_2+b_{50}}{2}\cdot 25=1925\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b_1+b_1+48r'}{2}\cdot 25=1850\\ \dfrac{b_1+r'+b_1+49r'}{2}\cdot 25=1925\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1+24r'=74\\ b_1+25r'=77\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r'=3\\ b_1=2\end{cases}$$

Wyraz ogólny ciągu (b_n) można przedstawić wzorem $b_n=2+3(n-1)$, czyli $b_n=3n-1$.

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

Zadanie 4. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VII.5) (R) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; VII.6) (R) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy to wykluczenie ze zbioru $[0, 2\pi]$ rozwiązań równania $\sin\frac{x}{4} = 0$ i uzyskanie wyniku $x \in (0, 2\pi]$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie zbioru rozwiązań równania $\sin\frac{x}{4} = 0$

Drugi etap to rozwiązanie równania trygonometrycznego $\cos 2x - \cos x = 0$ w przedziale $\left(0, 2\pi\right\rangle$. Za ten etap można otrzymać maksymalnie 3 pkt.

3 pkt – rozwiązanie poprawne i otrzymanie w toku poprawnego rozumowania wyniku:
$x \in \left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi\right\}$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – wyznaczenie rozwiązań równania w zbiorze liczb rzeczywistych w postaci: $x = \frac{2}{3}k\pi$ i $k \in \mathbb{Z}$ lub w postaci $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, lub $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, lub $x = 2k\pi$ i $k \in \mathbb{Z}$, albo rozwiązanie jednego z równań $\sin\frac{x}{2} = 0$ lub $\sin\frac{3x}{2} = 0$ w zbiorze $\left(0, 2\pi\right\rangle$, lub rozwiązanie jednego z równań $\cos x = -\frac{1}{2}$ lub $\cos x = 1$ w zbiorze $\left(0, 2\pi\right\rangle$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania – wykorzystanie wzoru na różnicę cosinusów i zapisanie alternatywy równań trygonometrycznych, np. $\sin\frac{x}{2} = 0$ lub $\sin\frac{3x}{2} = 0$

ALBO

wykorzystanie wzoru na cosinus podwojonego argumentu, zastosowanie podstawienia $t = \cos x$ i zapisanie równania kwadratowego, np. $2t^2 - t - 1 = 0$

ALBO

zapisanie, że $\cos 2x = \cos x \cdot [(2x = x + 2k\pi$ lub $2x = -x + 2k\pi)$ i $k \in \mathbb{C}]$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Uwaga: Jeżeli zdający nie uwzględni koniecznego założenia i rozwiązań szuka w przedziale domkniętym $\left\langle 0, 2\pi\right\rangle$, to za etap 1. otrzymuje 0 pkt, a za etap 2. – maksymalną liczbę punktów, gdy konsekwentnie do błędu otrzyma odpowiedź $x \in \left\{0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi\right\}$.

Przykładowe rozwiązanie

Etap 1.

Z postaci równania wynika, że spełniony być musi warunek $\sin\frac{x}{4} \neq 0$. Rozwiążemy równanie $\sin\frac{x}{4} = 0$, by wykluczyć ze zbioru $\langle 0, 2\pi\rangle$ pierwiastki tego równania.

$\sin\frac{x}{4} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} = k\pi$ i $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4k\pi$ i $k \in \mathbb{Z}$

$(x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ i $\sin\frac{x}{4} \neq 0) \Leftrightarrow x \in (0, 2\pi\rangle$

Etap 2.

Metoda 1.

Należy rozwiązać równanie $\cos 2x - \cos x = 0$. Do jego lewej strony zastosujemy wzór na różnicę cosinusów.

$\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow -2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \left(\sin\frac{x}{2} = 0 \text{ lub } \sin\frac{3x}{2} = 0\right)$

$\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} = k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow (x = 2k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z})$

$\sin\frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3x}{2} = k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{2}{3}k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z}\right)$

$\left(x = 2k\pi \text{ lub } x = \frac{2}{3}k\pi\right)$ i $k \in \mathbb{Z}$, czyli $x = \frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ponieważ $x \in (0, 2\pi\rangle$, to rozwiązaniami są jedynie $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ i 2π.

$x \in \left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi\right\}$

Metoda 2.

Przekształcamy równanie do postaci równoważnej, stosując wzór na cosinus podwojonego argumentu $\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0$.

Wygodnie jest zastosować podstawienie $t = \cos x$ dla $t \in \langle -1, 1\rangle$.

Otrzymujemy pomocniczo równanie kwadratowe, które następnie rozwiązujemy:

$2t^2 - t - 1 = 0$ $\quad\quad \Delta = 9 \quad\quad t_1 = -\frac{1}{2}$ lub $t_2 = 1$

Na podstawie obliczeń zapiszemy alternatywę równań elementarnych z niewiadomą x:

$\cos x = -\frac{1}{2}$ lub $\cos x = 1$

Zatem:

$\left(x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \text{ lub } x = 2k\pi\right)$ i $k \in \mathbb{Z}$

$x \in \left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi\right\}$

Metoda 3.

$\cos 2x = \cos x \Leftrightarrow (2x = x + 2k\pi \text{ lub } 2x = -x + 2k\pi)$ i $k \in \mathbb{Z}$

$\left(x = 2k\pi \text{ lub } x = \frac{2}{3}k\pi\right)$ i $k \in \mathbb{Z}$

Ponieważ $x \in (0, 2\pi\rangle$, to rozwiązaniami są jedynie $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ i 2π.

$x \in \left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi\right\}$

Zadanie 5. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: V.7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem; V.4) odczytuje z wykresu funkcji dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane; I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach; V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie poprawne – wyznaczenie zbioru wartości funkcji *f*, czyli przedziału $\langle -9, 40\rangle$

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – stwierdzenie, że pomocnicza funkcja o wzorze $g(t) = t^2 - 2t - 8$ jest określona dla $t \in \left\langle -\frac{1}{2}, 8\right\rangle$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – podstawienie $t = 2^x$ i stworzenie pomocniczej funkcji $g(t) = t^2 - 2t - 8$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

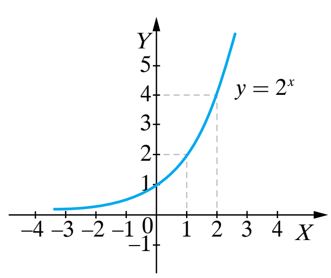
Przykładowe rozwiązanie

Zapiszemy wzór tej funkcji w postaci ułatwiającej zastosowanie podstawienia:

$4^x - 2^{x+1} - 8 = \left(2^x\right)^2 - 2 \Rightarrow 2^x - 8$

Niech $t = 2^x$, wtedy wyrażenie $4^x - 2^{x+1} - 8$ zapisać możemy jako $t^2 - 2t - 8$.
Pomocniczą funkcją będzie funkcja $g(t) = t^2 - 2t - 8$.

Wyznaczymy teraz jej dziedzinę.
Z własności funkcji wykładniczej mamy, że jeśli $x \in \langle -1, 3\rangle$, to 2^x przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\left\langle \frac{1}{2}, 8\right\rangle$.



Funkcja pomocnicza g ma wzór $g(t)=t^2-2t-8$ i jest określona dla $\frac{1}{2}\le t\le 8$.

Na podstawie własności wykresu funkcji g podamy poszukiwany zbiór wartości. W celu analizy wykresu wyznaczamy miejsca zerowe funkcji g i wierzchołek W paraboli, której ten wykres jest fragmentem.

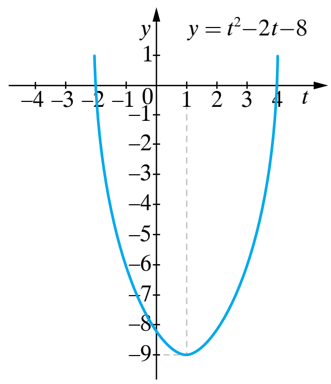
$t^2-2t-8=0$

$\Delta=4+32=36,\ t_1=\frac{2-6}{2}=-2,\ t_2=4$

$W=(1,-9)$

Obliczymy wartości tej funkcji na krańcach jej dziedziny $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-1-8=-8\frac{3}{4}$ i $g(8)=64-16-8=40$.

Na rysunku jest narysowana część paraboli. Fragmentem tej paraboli jest też wykres funkcji g. Jego końcami są punkty paraboli $\left(\frac{1}{2},-8\frac{3}{4}\right)$ i $(8,40)$.



Najmniejszą wartością, jaką funkcja g osiągnie dla argumentów $t\in\left\langle\frac{1}{2},8\right\rangle$, jest rzędna wierzchołka, czyli -9, a największą jest 40. Funkcja osiąga wszystkie wartości z przedziału $\langle -9,40\rangle$.

$ZW_f=\langle -9,40\rangle$.

Zadanie 6. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; 4) (R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; III.5) (R) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie poprawne – funkcja f nie ma ekstremów dla $m \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zapisanie warunków na brak zmiany znaku pochodnej $\begin{cases} -2m < 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \le 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} -2m > 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \le 0 \end{cases}$, w przypadku gdy licznik pochodnej jest wyrażeniem kwadratowymi, i uzasadnienie, że dla $m = 0$ pochodna funkcji ma postać $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ i nie zmienia znaku, lub pominięcie przypadku, gdy licznik pochodnej jest liniowy, i rozwiązanie warunków $\begin{cases} -2m < 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \le 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} -2m > 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \le 0 \end{cases}$ oraz uzyskanie odpowiedzi $m \in \left(0, \frac{1}{2} \right\rangle$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – uzasadnienie, że dla $m = 0$ pochodna funkcji ma postać $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ i nie zmienia znaku

ALBO

zapisanie warunków na to, by wyrażenie kwadratowe $-2mx^2 + 4mx - 1$ nie zmieniało znaku $\begin{cases} -2m < 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \le 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} -2m > 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \le 0 \end{cases}$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp – obliczenie pochodnej funkcji $f'(x) = \frac{-2mx^2 + 4mx - 1}{(x-1)^2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Uwaga: Za rozwiązanie, w którym jedynym błędem jest uwzględnienie warunku $\Delta < 0$ zamiast $\Delta \le 0$, zdający otrzymuje 3 punkty.

Przykładowe rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{-4mx(x-1) - 1 + 2mx^2}{(x-1)^2} = \frac{-2mx^2 + 4mx - 1}{(x-1)^2}$$

$f'(x)$ nie zmienia znaku, gdy wyrażenie $-2mx^2 + 4mx - 1$ nie zmienia znaku dla $x \in \mathrm{D}$

Tak będzie, gdy $m = 0$. Wtedy $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ dla każdej wartości $x \in \mathrm{D}$.

Dla $m \neq 0$ wyrażenie $-2mx^2 + 4mx - 1$ nie zmieni znaku, gdy:

$$\begin{cases} -2m < 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \le 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} -2m > 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \le 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniona ta alternatywa:

$$\begin{cases} m > 0 \\ 16m\left(m - \frac{1}{2}\right) \le 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} m < 0 \\ 16m\left(m - \frac{1}{2}\right) \le 0 \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} m > 0 \\ m \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} m < 0 \\ m \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}, \text{ więc } m \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$$

Po uwzględnieniu parametru $m = 0$ otrzymujemy, że $m \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

$m \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: VIII.3) (R) przeprowadza dowody geometryczne; VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur; II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ i a^2-b^2.

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie poprawne – pełne uzasadnienie tezy

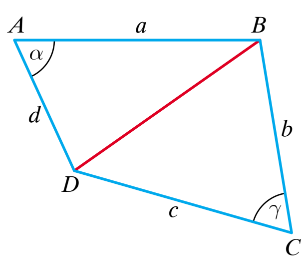
3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci – doprowadzenie do tezy bez pisemnego uzasadnienia, że dla dowolnych liczb rzeczywistych iloczyn tych liczb jest mniejszy lub równy połowie sumy ich kwadratów, bądź bez uzasadnienia, że skoro a, b, c i d są jako długości boków liczbami dodatnimi, to uzasadnienie nierówności wynika z zależności między średnimi

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wykorzystanie faktu, że wartość funkcji sinus jest zawsze mniejsza lub równa 1 i oszacowanie pola $P \le \frac{1}{2}a \cdot d + \frac{1}{2}b \cdot c$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – zapisanie pola czworokąta jako sumy pól dwóch trójkątów z zastosowaniem wzoru wykorzystującego sinus kąta między dwoma bokami trójkąta

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie



Zapiszemy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę pól trójkątów ABD i DBC:

$P = \frac{1}{2}a \cdot d \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\gamma$

Ponieważ $\sin\alpha \le 1$ i $\sin\gamma \le 1$, to prawdziwa jest nierówność:

$P = \frac{1}{2}a \cdot d \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\gamma \le \frac{1}{2}a \cdot d + \frac{1}{2}b \cdot c$

Ponadto ponieważ dla dowolnych liczb a i d prawdziwa jest nierówność $(a-d)^2 \geq 0$, to możemy wykazać, że dla dowolnych liczb a i d prawdziwa jest nierówność $ad \leq \frac{a^2+d^2}{2}$:

$$(a-d)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2-2ad+d^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+d^2 \geq 2ad \Rightarrow ad \leq \frac{a^2+d^2}{2}$$

Analogicznie można wykazać prawdziwość nierówności $bc \leq \frac{b^2+c^2}{2}$. Wykorzystując te nierówności, otrzymujemy, że:

$$\frac{1}{2}a\cdot d+\frac{1}{2}b\cdot c=\frac{1}{2}(a\cdot d+b\cdot c) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+d^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$$

Zatem:

$$P \leq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \qquad \text{c.n.d.}$$

Zadanie 8. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje; IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu).

Zasady oceniania

6 pkt – rozwiązanie poprawne i uzyskanie odpowiedzi: $A=(-1,4)$, $B=(-5,8)$ i $C=(3,12)$

5 pkt – rozwiązanie, w którym zostały wyznaczone współrzędne punktów A, B i C, ale popełniono przy tym błędy rachunkowe

4 pkt – rozwiązanie, w którym wyznaczono współrzędne punktów A i B

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczenie współrzędnych punktu A oraz równania prostej będącej osią symetrii tego trójkąta – $y=x+9$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczenie współrzędnych punktu wspólnego prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez D oraz prostej zawierającej ramię AC – punktu (1, 8)

ALBO

wyznaczenie współrzędnych punktu A oraz wyznaczenie równania prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt D

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – wyznaczenie współrzędnych punktu A

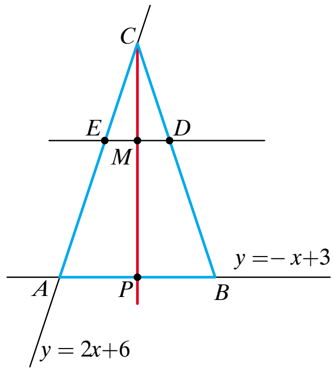
ALBO

wyznaczenie równania prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt D

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC z zaznaczonym punktem D. Przez ten punkt jest poprowadzona prosta równoległa do podstawy AB trójkąta. Przecina ona ramię AC trójkąta w punkcie E. Punkt M, leżący na prostej będącej osią symetrii trójkąta, jest środkiem odcinka ED.



Wyznaczamy współrzędne punktu A. Spełniają one układ równań:

$$\begin{cases} y = -x+3 \\ y = 2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6 = -x+3 \\ y = 2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ czyli } A = (-1, 4)$$

Prosta ED ma równanie postaci $y = -x + b$.
Współrzędne punktu D spełniają to równanie, więc:
$10 = 1 + b \Rightarrow b = 9$
Równaniem prostej ED jest równanie $y = -x + 9$.

Wyznaczamy współrzędne punktu E: $\begin{cases} y = -x+9 \\ y = 2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6 = -x+9 \\ y = 2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$, czyli $E = (1, 8)$.

M jest środkiem odcinka DE, czyli $M = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{10+8}{2}\right)$ $\qquad M = (0, 9)$

Prosta CM jest prostopadła do prostej AB, czyli jej równanie ma postać $y = x + k$.
M należy do tej prostej, czyli $k = 9$.
Prosta CM ma równanie $y = x + 9$.
Wyznaczamy współrzędne punktu P, który jest środkiem odcinka AB i jednocześnie jest punktem wspólnym prostych CM i AB.
Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = x+9 \\ y = -x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+3 = x+9 \\ y = -x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$$

Zatem: $P = (-3, 6)$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka B:

$$\left(\frac{-1+x_B}{2} = -3 \text{ i } \frac{4+y_B}{2} = 6\right) \Rightarrow (x_B = -5 \text{ i } y_B = 8), \text{ czyli } B = (-5, 8)$$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka C:

$$\begin{cases} y = 2x+6 \\ y = x+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+9 = 2x+6 \\ y = x+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases}, \text{ czyli } C = (3, 12)$$

$A = (-1, 4)$, $B = (-5, 8)$ i $C = (3, 12)$

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; V.1) określa funkcję jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach); XIII. rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową. albo XIII.5) (R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie poprawne – pole powierzchni prostokąta spełniającego warunki zadania jest równe $18\frac{3}{8}\ \text{dm}^2$

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci – brak obliczenia pola

ALBO

obliczenie największego pola prostokąta bez pełnego uzasadnienia istnienia wartości największej, osiąganej dla $x = 5\frac{1}{4}$ (w tym bez porównania największego pola z polami prostokątów o bokach długości 3 dm i 5 dm oraz 3 dm i 6 dm)

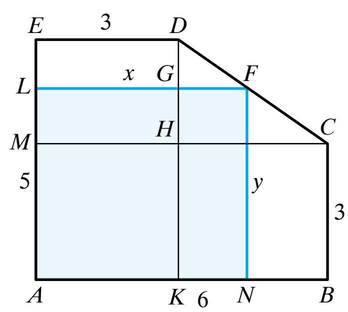
2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – zapisanie wzoru funkcji opisującej pole prostokąta, np. $P(x) = x \Rightarrow \left(7-\frac{2}{3}x\right)$ i $x \in [3, 6]$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – uzależnienie długości jednego boku prostokąta od długości drugiego boku, np. $y = \frac{21-2x}{3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Metoda 1:



Obliczamy pola największych prostokątów uzyskanych w wyniku tylko jednego cięcia.

Pole prostokąta *EDKA* jest równe $3 \cdot 5 = 15\ \text{dm}^2$.

Pole prostokąta *MCBA* jest równe $3 \cdot 6 = 18\ \text{dm}^2$.

W przypadku gdy linie cięcia przecinają się na odcinku DC:
$P = x \cdot y$ i $x \in [3, 6]$ i $y \in [3, 5]$

$\Delta DGF \sim \Delta DHC(kkk)$, więc $\frac{|DG|}{|GF|} = \frac{|DH|}{|HC|}$, czyli $\frac{5-y}{x-3} = \frac{2}{3}$

$\frac{5-y}{x-3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 15 - 3y = 2x - 6 \Rightarrow y = \frac{21-2x}{3} = 7 - \frac{2}{3}x$

Metoda 2:
Pole pięciokąta to suma pola prostokąta $EDKA$ i trapezu $FCBN$:

$P = 3 \cdot 5 + \frac{3+5}{2} \cdot 3 = 27$

Pole tego pięciokąta można też policzyć jako sumę pól prostokąta $ALFN$ i trapezów $FNBC$ i $EDFL$.

$P = x \cdot y + \frac{x+3}{2} \cdot (5-y) + \frac{3+y}{2} \cdot (6-x)$

Mamy:

$x \cdot y + \frac{x+3}{2} \cdot (5-y) + \frac{3+y}{2} \cdot (6-x) = 27 \Rightarrow 2xy + (x+3)(5-y) + (3+y)(6-x) = 54 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2xy + 5x - xy + 15 - 3y + 18 - 3x + 6y - xy = 54 \Rightarrow 2x + 3y = 21 \Rightarrow y = 7 - \frac{2}{3}x$

Zapisaliśmy pole P prostokąta, w przypadku gdy linie cięcia przecinają się na odcinku DC, jako funkcję jednej zmiennej.

$P(x) = x \cdot \left(7 - \frac{2}{3}x\right)$ i $x \in [3, 6]$, czyli $P(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 7x$

Obliczamy pochodną tej funkcji:

$P'(x) = -\frac{4}{3} \cdot x + 7$ i badamy jej znak:

$-\frac{4}{3} \cdot x + 7 > 0 \Rightarrow \frac{4}{3}x < 7 \Rightarrow x < \frac{21}{4}$, więc:

$P'(x) > 0$ dla $x \in \left(3, 5\frac{1}{4}\right)$

$P'(x) < 0$ dla $x \in \left(5\frac{1}{4}, 6\right)$

Ze zmiany znaku pochodnej wynika istnienie maksimum w punkcie $x = 5\frac{1}{4}$, z monotoniczności wynika, że w tym punkcie osiąga funkcja także wartość największą.
Uwaga: Możliwe jest uzasadnienie osiągania wartości największej na podstawie własności funkcji kwadratowej.

$P\left(5\frac{1}{4}\right) = \frac{21}{4} \cdot \left(7 - \frac{2 \cdot 21}{3 \cdot 4}\right) = \frac{21}{4} \cdot \left(7 - \frac{7}{2}\right) = \frac{21 \cdot 7}{8} = \frac{147}{8} = 18\frac{3}{8}\ \mathrm{dm}^2$

To pole jest większe od pól prostokątów uzyskanych w wyniku tylko jednego cięcia.

Zadanie 10. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów i ostrosłupów; X.3) (R) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Zasady oceniania

5 pkt – rozwiązanie poprawne – wyznaczenie objętości $V = 36\,\text{cm}^3$ i pola powierzchni całkowitej $P_C = (36 + 36\sqrt{3}\,)\,\text{cm}^2$

4 pkt – rozwiązanie, w którym przy zastosowaniu poprawnej metody obliczono objętości i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, ale popełniono przy tym błędy rachunkowe

3 pkt – rozwiązanie, w którym wyznaczono długość wysokości ostrosłupa i długość jego krawędzi bocznej $b = 3\sqrt{3}$ i $H = 3$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – porównanie pól ściany bocznej obliczonych różnymi sposobami i obliczenie długości krawędzi bocznej: $b = 3\sqrt{3}$

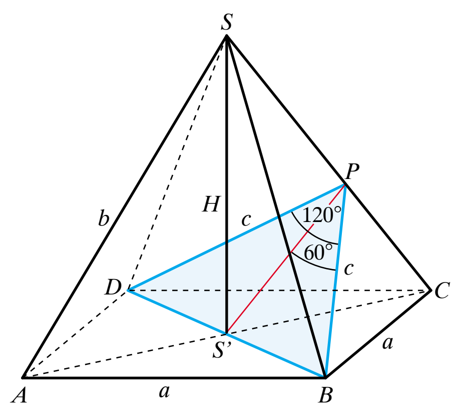
1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – poprawne wybranie trójkąta z kątem miary 120° i wyznaczenie długości ramienia tego trójkąta, niech c oznacza tę długość, wtedy $c = 2\sqrt{6}$

ALBO

wyznaczenie w zależności od długości krawędzi bocznej, np. b, i długości krawędzi podstawy, a ($a = 6$), długości wysokości ściany bocznej ostrosłupa $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie



$a = 6$ cm

W trójkącie $S'BS$ $\sin 60° = \frac{3\sqrt{2}}{c} \Rightarrow c = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$.

Wysokość trójkąta BCS opuszczona z S ma długość $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Jeśli porównamy obliczone na dwa sposoby pola, otrzymujemy równość:

$$\frac{1}{2}\text{bc} = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow 2\sqrt{6}b = 6\sqrt{b^2 - 9}$$

$$24b^2 = 36b^2 - 324 \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$$

$$H^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 27 \Rightarrow H^2 = 9 \Rightarrow \text{H} = 3$$

$$V = 36\,\text{cm}^3$$

$$P_C a^2 + 4\cdot\frac{bc}{2} = 36 + 2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{3} = 36 + 12\sqrt{18} = 36 + 36\sqrt{2}\text{cm}^2$$

Zadanie 11. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) (R) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie poprawne – obliczenie liczby kartek: 36 wraz z uzasadnieniem

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci – obliczenie, ile jest kartek, w przypadku gdy każdego dnia ma być rozwiązywana inna liczba zadań – 24

ALBO

obliczenie, ile jest kartek, w przypadku gdy podczas dwóch dni ma być rozwiązywana ta sama liczba zadań – 12

ALBO

obliczenie obu wyżej wymienionych liczb z błędem rachunkowym

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – rozdział zadań na trzy grupy: $\{1,1,8\}$, $\{1,2,7\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,2,6\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,4\}$, $\{3,3,4\}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Uwaga: Jeśli zdający pominie jeden przypadek spośród: $\{1,1,8\}$, $\{1,2,7\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,2,6\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,4\}$, $\{3,3,4\}$, to za całe zadanie (przy poprawnym rozumowaniu) może najwięcej otrzymać 1 pkt. Jeśli zdający, wypisując zapisy na poszczególnych karteczkach, pominie jeden przypadek, to za całe zadanie może otrzymać najwięcej 2 pkt.

Przykładowe rozwiązanie

Rozdział zadań na trzy grupy:

$\{1,1,8\}$, $\{1,2,7\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,2,6\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,4\}$, $\{3,3,4\}$, np.: $\{1,1,8\}$

Dzień	Poniedziałek	Wtorek	Środa
Liczba zadań	1	1	8
	1	8	1
	8	1	1

$\{1,2,7\}$ jest $3! = 6$ przestawień

Dzień	Poniedziałek	Wtorek	Środa
Liczba zadań	1	2	7
	1	7	2
	2	1	7
	2	7	1
	7	1	2
	7	2	1

Jeśli podczas dwóch dni jest rozwiązywana ta sama liczba zadań, to takie ustawienia są 3; jeżeli każdego dnia jest rozwiązywana inna liczba zadań, to takich ustawień jest $3! = 6$.
Liczba kartek będzie równa $4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 36$.

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę; XII.2) (R) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania
5 pkt – rozwiązanie poprawne – uzyskanie odpowiedzi „należy wysiać przynajmniej 6 nasion”
4 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – zapisanie nierówności z niewiadomą n oznaczającą liczbę nasion, które trzeba wysiać, aby z prawdopodobieństwem większym od 0,99 można było stwierdzić, że przynajmniej jedno z nich wykiełkuje: $(0,4)^n < 0,01$

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – zapisanie, z użyciem schematu Bernoullego, prawdopodobieństwa zdarzenia, że przy wysianiu n nasion przynajmniej jedno wykiełkuje, np. $P(A) = 1 - \binom{n}{0}(0,6)^0 \cdot (0,4)^n$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – zauważenie, że w zadaniu mamy do czynienia ze schematem Bernoullego, gdzie próbą jest wysiew jednego nasiona i prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest równe $p = 0,6$
1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – obliczenie na podstawie danych z tabeli siły kiełkowania: 60%
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie
Siła kiełkowania jest równa $\frac{60+66+92+110+106+166}{1000} 100\% = 60\%$.
Niech próbą Bernoullego będzie wysianie jednego nasiona, a sukcesem – jego wykiełkowanie. Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p = 0,6$.
A – zdarzenie, że spośród wysianych n ziaren wykiełkowało przynajmniej jedno
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe prawdopodobieństwu tego, że w schemacie n prób Bernoullego sukces pojawi się przynajmniej raz.

$$P(A) = P(S_n \geq 1) = 1 - P(S_n = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,6)^0 \cdot (0,4)^n$$

$$1 - \binom{n}{0}(0,6)^0 \cdot (0,4)^n > 0,99 \Rightarrow 1 - (0,4)^n > 0,99 \Rightarrow (0,4)^n < 0,01$$

Oszacujemy, jakie musi być n, aby zachodziła ta nierówność.
Ponieważ $(0,4)^5 = 0,01024 > 0,01$ i $(0,4)^6 = 0,004096 < 0,01$, to $n \geq 6$.

Odpowiedź
Należy wysiać przynajmniej 6 nasion.


Matura 2023
Zadania do nowej matury dostępne w Multitece
Chcę zobaczyć
REPETYTORIUM
OPERON
nowa matura
matematyka
zakres rozszerzony