Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Wymagania egzaminacyjne w 2023 i 2024 r.:
https://link.operon.pl/uk

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

C

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$$-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+3-\frac{\sqrt{3}}{3}+3\right)^2=-2\cdot 6^2=-72$$

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
D

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$$\frac{8^{22}}{2}=\frac{(2^3)^{22}}{2}=\frac{2^{66}}{2}=2^{65}$$

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([...] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych. I. 9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
B

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$$\log_3 24-3\log_3 6=\log_3 24-\log_3 6^3=\log_3\frac{24}{216}=\log_3\frac{1}{9}=-2$$

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
D

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$3-x\geq\frac{3}{5}x+7$

$-\frac{8}{5}x\geq4$, czyli $x\leq-2{,}5$, zatem najmniejsza liczba całkowita, która nie należy do zbioru rozwiązań to -2

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: [...] $\|x+3\|\geq4$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
C

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

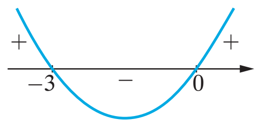
Rozwiązanie
PF

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$, zatem $x=0$ lub $x=-3$

Zatem liczby (-3) oraz 0 są miejscami zerowymi funkcji $f(x)$ – zdanie prawdziwe (P).



$x^2+3x\geq 0$ dla $x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$ – zdanie fałszywe (F).

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów [...] takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej [...] metodą grupowania.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

C

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$\left(-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}\cdot(-2)=10$

Zadanie 8. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów [...] takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej [...] metodą grupowania.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania równania i poddanie rozwiązania równania: $x=\frac{5}{2}$
1 pkt – przekształcenie równania do postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego: $\left(x^2+4\right)(2x-5)=0$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

$2x^3-5x^2+8x-20=0$

$\left(x^2+4\right)(2x-5)=0$

$x^2+4=0$ lub $2x-5=0$

równanie sprzeczne $x=\frac{5}{2}$

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
B

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

Dziedzina równania: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3},\ 5\right\}$

$5x(x+5)(3x-4)=0,$

stąd $x=0$ lub $x=-5$ lub $x=\frac{4}{3}$ nie należy do dziedziny równania

Zatem równanie ma dwa rozwiązania.

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
B

Zadanie 11.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości [...]; V.12) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x-a)$, $y=f(x)+b$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
B

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Wykres funkcji $y=f\left(x\right)$ został przesunięty o 6 jednostek w górę.

Zadanie 11.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, [...] V.12) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x-a)$, $y=f(x)+b$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
F

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Wykres funkcji $y=f\left(x\right)$ został przekształcony w symetrii osiowej względem osi Ox układu współrzędnych.

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V. 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
C

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
$a=\frac{-3-2}{0+3}=-\frac{5}{3}, b=-3$

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
B

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
$f(x)=(3-m)x+15,$

Funkcja rosnąca, jeśli $3-m>0$, zatem $m<3$.

Zadanie 14.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
CD

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
$W=(-1,\ 5)$, gdzie $p=-1,\ q=5$

Parabola będąca wykresem funkcji jest skierowana ramionami w dół, więc zbiór wartości to $(-\infty,\ q]$, czyli $(-\infty,\ 5]$.

Zadanie 14.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
FF

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Parabola będąca wykresem funkcji jest skierowana ramionami w dół, więc funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -1]$ – zdanie fałszywe (F).
$f(3) = -2(3+1)^2 + 5 = -2 \cdot 16 + 5 = -27 < 5$ – zdanie fałszywe (F).

Zadanie 14.3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
A

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Wartość najmniejsza to:
$f(-7) = -2(-7+1)^2 + 5 = -2 \cdot 36 + 5 = -67$

Zadanie 15. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania
2 pkt – poprawne wyznaczenie współczynników b i c we wzorze funkcji: $b = -4, c = -12$ lub zapisanie funkcji w postaci ogólnej: $f(x) = x^2 - 4x - 12$

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji *f* w postaci iloczynowej: $f(x)=(x+2)(x-6)$

ALBO

– poprawne wyznaczenie jednego ze współczynników *b* lub *c*

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Sposób 1

Wyznaczamy drugie miejsce zerowe funkcji: $x=6$

Wtedy: $f(x)=(x+2)(x-6)=x^2-4x-12$

Zatem: $b=-4$, $c=-12$

Sposób 2

Wyznaczamy współczynnik $b=-4$ ze wzoru: $p=\frac{-b}{2a}$.

Do wzoru funkcji $f(x)=x^2-4x+c$ podstawiamy punkt $(-2,0)$ i wyznaczamy $c=-12$.

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

D

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$a_{12}=\sqrt[3]{5\cdot 12-6}=\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$

Zadanie 17. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VI.3) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania uzasadniającego, że ciąg jest arytmetyczny, np. prawidłowe obliczenie różnicy kolejnych wyrazów oraz wykazanie, że jest stała i nie zależy od n (sposób 1.)

ALBO

– przeprowadzenie pełnego rozumowania uzasadniającego, że ciąg jest arytmetyczny, np. powołanie się na własność trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz sprawdzenie tej własności (sposób 2.)

1 pkt – zapisanie różnicy dwóch kolejnych wyrazów: $\frac{7n+2}{5}-\frac{7n-5}{5}$ (sposób 1.)

ALBO

– zapisanie związku między trzema kolejnymi wyrazami ciągu: $\frac{7n+2}{5}=\frac{\frac{7n-5}{5}+\frac{7n+9}{5}}{2}$ dla każdego $n \geq 1$ (sposób 2.)

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

<u>*Sposób 1*</u>

Aby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że różnica dwóch kolejnych wyrazów $a_{n+1}-a_n$ jest stała i nie zależy od n. Wyznaczymy wzór ogólny na a_{n+1} wyraz ciągu: $a_{n+1}=\frac{7n+2}{5}$

Wtedy: $a_{n+1}-a_n=\frac{7n+2}{5}-\frac{7n-5}{5}=\frac{7}{5}$ dla każdego $n \geq 1$

To oznacza, że ciąg (an) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r=\frac{7}{5}$.

<u>*Sposób 2*</u>

Aby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że dla dowolnych kolejnych trzech wyrazów ciągu, np. a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, zachodzi związek: $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$ dla $n \geq 1$.

Wyznaczymy wzór ogólny na a_{n+1} oraz a_{n+2} wyraz ciągu:

$a_{n+1}=\frac{7n+2}{5}$, $a_{n+2}=\frac{7n+9}{5}$

Sprawdzamy, czy dla kolejnych trzech wyrazów ciągu (an) zachodzi związek:

$$\frac{a_n+a_{n+2}}{2}=\frac{\frac{7n-5}{5}+\frac{7n+9}{5}}{2}=\frac{\frac{14n+4}{5}}{2}=\frac{14n+4}{10}=\frac{7n+2}{5}=a_{n+1}$$

Zatem: $\frac{a_n+a_{n+2}}{2}=a_{n+1}$

To oznacza, że ciąg (an) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
C

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$a_2 = \frac{3+27}{2} = 15$, zatem $r = a_2 - a_1 = 12$

Ze wzoru: $a_n = a_1 + (n-1)r$, otrzymujemy:

$99 = 3 + (n-1)\cdot 12$, stąd $n = 9$.

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
C

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$$S_8 = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = -3\cdot\frac{1-(-2)^8}{1-(-2)} = -3\cdot\frac{1-256}{3} = 255$$

Zadanie 20. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° [...].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

BF

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

$\sin\beta = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{9}{11}$ oraz $|BC| = 2\sqrt{10}$, więc

$\operatorname{tg}\beta = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{9}{2\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{20}$

Zadanie 21.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.3) stosuje twierdzenie cosinusów [...].

Zasady oceniania

2 pkt – wyznaczenia długości przekątnej rombu: $\sqrt{600}$

1 pkt – wyznaczenie wartości cosinusa 120° oraz poprawne zapisanie twierdzenia cosinusów dla danych z zadania

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$d^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 10\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$d^2 = 600$

$d = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$

Zadanie 21.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.3) stosuje [...] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$.

Zasady oceniania

1 pkt – wyznaczenie pola rombu: $100\sqrt{3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

$P = a^2\cdot\sin\alpha = \left(10\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
D

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie otrzymujemy zależność, np.: $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}$, czyli $\frac{|AC|}{4} = \frac{5}{3{,}2}$, więc $|AC| = 6{,}25$.

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
A

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Kąt BAD ma miarę $90°$, więc kąt BAC ma miarę $65°$. Kąt α jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt BAC, więc ma miarę $130°$.

Zadanie 24. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
C

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

Skala podobieństwa czworokątów: $k=\frac{24\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}=2\sqrt{2}$

Obwód czworokąta $ADCD$ jest równy $18\sqrt{6}$, zatem obwód czworokąta $KLMN$ wynosi $18\sqrt{6}\cdot k=18\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}=36\sqrt{12}=72\sqrt{3}$.

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
FP

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Proste nie mają tych samych współczynników kierunkowych – stwierdzenie fałszywe (F).
Iloczyn współczynników kierunkowych obu prostych jest równy (-1), zatem proste są prostopadłe – stwierdzenie prawdziwe (P).

Zadanie 26. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)=r^2$; IX.6) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

D

Obliczenie prowadzące do rozwiązania

Obrazem okręgu O w symetrii względem osi Oy jest okrąg o środku w punkcie $(-2,-7)$.

Zadanie 27. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje; IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu).

Zasady oceniania

4 pkt – zapisanie poprawnego układu równań lub równania prowadzącego do wyznaczenia wierzchołka C oraz wyznaczenie współrzędnych wierzchołka $C(4,8)$

3 pkt – wyznaczenie równania prostej AC: $y=x+4$,

ALBO

– wyznaczenie współrzędnych wierzchołka C w zależności od jednej zmiennej, np.: $C(x,-x+12)$ oraz zapisanie poprawnie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC w zależności od współrzędnych wierzchołka C

2 pkt – wyznaczenie współrzędnych wierzchołka $B(0,12)$ oraz równania prostej BC: $y=-x+12$

1 pkt – wyznaczenie współrzędnych wierzchołków $A(-4,0)$ i $B(0,12)$

ALBO

– wyznaczenie współrzędnych wierzchołka $B(0,12)$ oraz równania prostej BC: $y=-x+12$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Uwaga:
Jeśli zdający poprawnie zastosuje twierdzenie Pitagorasa i otrzyma dwa możliwe rozwiązania i nie odrzuci odpowiedzi $C(0,12)$, to za całe zadanie otrzymuje maksymalnie 3 punkty, o ile wcześniej nie popełnił błędów.

Przykładowe rozwiązanie
Sposób 1
Współrzędne A oraz B trójkąta wyznaczamy z równania prostej AB: $y=3x+12$.
Punkt B jest punktem przecięcia prostej AB z osią Oy, więc $B(0, 12)$.
Punkt A jest punktem przecięcia prostej AB z osią Ox, więc z równania $3x+12=0$ otrzymujemy współrzędne punktu $A(-4, 0)$.
Do prostej zawierającej przyprostokątną BC należy punkt $D(6, 6)$ oraz punkt $B(0, 12)$.
Zatem do równania prostej: $y=ax+12$ podstawiamy współrzędne punktu B i otrzymujemy równanie prostej BC: $y=-x+12$.
Prosta AC jest prostopadła do prostej BC, więc punkt A należy do prostej $y=x+b$. Podstawiając współrzędne punktu A do równania $y=x+b$, otrzymujemy równanie prostej AC w postaci $y=x+4$.
Punkt C jest punktem wspólnym prostych AC i BC, zatem współrzędne punktu C spełniają układ równań $\begin{cases} y=-x+12 \\ y=x+4 \end{cases}$

Stąd $C(4, 8)$.
Sposób 2
Wyznaczamy współrzędne punktów A i B oraz prostej BC jak w sposobie 1.
Punt C należy do prostej BC, zatem $C(x, -x+12)$.
Trójkąt ABC jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$$

$$(x+4)^2+(-x+12)^2+(x)^2+(-x+12-12)^2=160$$

$$4x^2-16x=0$$

$$x=4 \text{ lub } x=0$$

Zatem punkt C może mieć współrzędne $C(4,8)$ lub $C(0,12)$. Z uwagi na to, że punkt $B(0,12)$, więc punkt $C(4,8)$.

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów i ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
B

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Jedna krawędź sześcianu ma długość: $72\,\text{cm} : 12 = 6\,\text{cm}$
Objętość sześcianu: $6\,\text{cm}^3 = 216\,\text{cm}^3$

Zadanie 29. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż: a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2, b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
C2

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Liczb czterocyfrowych o parzystych cyfrach jest $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$, ponieważ liczbę tworzą tylko cyfry parzyste i pierwsza cyfra tej liczby nie może być zerem.

Zadanie 30. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną [...].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie
C

Obliczenie prowadzące do rozwiązania
Średnia arytmetyczna zestawu liczb: 3, 6, 9, 14, jest równa 8, więc średnia arytmetyczna zestawu liczb: 3, 6, 9, 14, x, $x+4$, jest równa 11.
Czyli $\frac{3+6+9+14+x+x+4}{6} = 11$, stąd $x = 15$.

Zadanie 31. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia obu wymiarów ogrodzonego placu i podanie poprawnych wyników: $x = 20m$, $y = 180m$ oraz łącznej długości płotu ogradzającego plac: 386 m

3 pkt – obliczenie wartości $x = 20$, dla której funkcja P przyjmuje wartość największą oraz podanie dziedziny funkcji: $x \in (0, 40)$

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole placu w zależności od jednej zmiennej, np.: $P(x) = 9x(40 - x)$

1 pkt – zapisanie poprawnego związku między wymiarami placu, np.: $\frac{40}{360} = \frac{40 - x}{y}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Niech x, y – długości krawędzi placu (zgodnie z rysunkiem), gdzie: $0 < x < 40$, $0 < y < 360$.

Korzystając z własności trójkątów podobnych, możemy zapisać zależność: $\frac{40}{360} = \frac{40 - x}{y}$

Pole powierzchni placu jest funkcją: $P(x) = 9x(40 - x)$, $x \in (0, 40)$

Pole jest największe dla $x = 20$, bo wykresem funkcji P jest fragment paraboli o ramionach skierowanych w dół.

Wtedy długość: $y = 9(40 - x) = 180$

Zatem: $x = 20\text{m}$, $y = 180\text{m}$ oraz łączna długość płotu ogradzającego plac:

$2 \cdot 20 + 2 \cdot 180 - 14 = 386$ m