CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00, MMAP-P0-Z00, MMAU-P0-100
Termin egzaminu:	22 sierpnia 2023 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 2. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 3. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 4. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – uzasadnienie, że wyrażenie $3n^3 + 18n^2 + 15n$ jest liczbą podzielną przez 3 oraz przez 2.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $3n^3 + 18n^2 + 15n$ do postaci $3n(n^2 + 6n + 5)$ lub $3(n^3 + 6n^2 + 5n)$, lub $3n(n + 1)(n + 5)$

ALBO

– uzasadnienie, że wyrażenie $3n^3 + 18n^2 + 15n$ jest liczbą podzielną przez 3,

ALBO

– rozpatrzenie przypadku, gdy n jest liczbą parzystą (lub nieparzystą) i uzasadnienie, że wówczas $3n^3 + 18n^2 + 15n$ dzieli się przez 6,

ALBO

– uzasadnienie, że wyrażenie $3n^3 + 18n^2 + 15n$ (lub $3n^3 + 15n$, lub $n^3 + 5n$) jest liczbą podzielną przez 2.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przyjmuje np. $n = 6k + r$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną i r jest resztą z dzielenia liczby n przez 6, i przeprowadzi poprawne rozumowanie dla co najmniej połowy przypadków, ale nie przeprowadzi pełnego rozumowania dla wszystkich przypadków, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równoważnie wyrażenie $3n^3 + 18n^2 + 15n$ do postaci iloczynu

$$3n^3 + 18n^2 + 15n = 3n(n^2 + 6n + 5) = 3n(n + 1)(n + 5)$$

Ponieważ liczby n oraz $n + 1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, to jedna z nich jest liczbą parzystą, zatem iloczyn $n(n + 1)$ jest liczbą parzystą, więc iloczyn $3n(n + 1)(n + 5)$ jest podzielny przez 6. To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy równoważnie wyrażenie $3n^3 + 18n^2 + 15n$ do postaci iloczynu

$$3n^3 + 18n^2 + 15n = 3(n^3 + 6n^2 + 5n)$$

Rozważmy dwa przypadki: gdy n jest liczbą parzystą oraz gdy n jest liczbą nieparzystą.

Jeśli n jest liczbą parzystą, to wtedy n^3 jest liczbą parzystą, $6n^2$ jest liczba parzystą i $5n$ jest liczbą parzystą. Stąd $n^3 + 6n^2 + 5n$ jest liczbą parzystą (jako suma liczb parzystych). Zatem $3(n^3 + 6n^2 + 5n)$ dzieli się przez 3 oraz przez 2, czyli dzieli się przez 6.

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to wtedy n^3 jest liczbą nieparzystą, $6n^2$ jest liczba parzystą i $5n$ jest liczbą nieparzystą. Stąd $n^3 + 6n^2 + 5n$ jest liczbą parzystą (jako suma dwóch liczb nieparzystych i liczby parzystej). Zatem $3(n^3 + 6n^2 + 5n)$ dzieli się przez 3 oraz przez 2, czyli dzieli się przez 6. To należało wykazać.

Zadanie 5. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 6. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 7. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 8. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 9. (0–3)

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i obliczenie wszystkich rozwiązań równania:

$(-1), \frac{2}{3}, 1$

ALBO

– wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania: $(-1), \frac{2}{3}, 1$, **oraz** stwierdzenie, że są to jedyne rozwiązania równania.

2 pkt – przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego **oraz** rozwiązanie jednego z równań wynikającego z tego rozkładu, np. $(3x-2)(x^2-1)=0$ i $x=\frac{2}{3}$,

$(3x-2)(x^2-1)=0$ i $x=-1$ oraz $x=1$

ALBO

– obliczenie jednego z pierwiastków wielomianu W **oraz** poprawne podzielenie wielomianu W przez odpowiedni dwumian, np.

$x=1$ i $(3x^3-2x^2-3x+2):(x-1)=3x^2+x-2$,

ALBO

– rozłożenie wielomianu $W(x)=3x^3-2x^2-3x+2$ na czynniki liniowe, np.

$W(x)=(3x-2)(x-1)(x+1)$,

ALBO

– przekształcenie równania $3x^3-2x^2-3x+2=0$ do postaci alternatywy równań i rozwiązanie jednego z nich, np.

$(3x-2=0$ lub $x^2-1=0)$ i $x=1$ oraz $x=-1$.

1 pkt – przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego, np. $(3x-2)(x^2-1)=0$

ALBO

– zapisanie jednego z rozwiązań równania $3x^3-2x^2-3x+2=0$ (jeśli to rozwiązanie nie zostało otrzymane w wyniku zastosowania błędnej metody),

ALBO

– przekształcenie równania $3x^3-2x^2-3x+2=0$ do postaci alternatywy równań, np. $3x-2=0$ lub $x^2-1=0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający uzyska trzy poprawne pierwiastki wielomianu, lecz traktuje równanie jako nierówność (podaje zbiór rozwiązań w postaci przedziału/ sumy przedziałów), to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przy przekształcaniu lewej strony równania do postaci iloczynu zapisuje czynnik $(3x-2)$ z wykładnikiem 2, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2(3x - 2) - (3x - 2) = 0$$

$$(3x - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$(3x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$3x - 2 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 1 \quad \text{lub} \quad x = -1$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-1), \frac{2}{3}, 1$.

Sposób II

Przekształcamy równanie równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$3x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = 0$$

$$(3x - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$(3x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$3x - 2 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 1 \quad \text{lub} \quad x = -1$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-1), \frac{2}{3}, 1$.

Sposób III

Obliczamy $W(1) = 0$ i stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$.

Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Dzielimy wielomian W przez dwumian $x - 1$ i otrzymujemy

$$(3x^3 - 2x^2 - 3x + 2) : (x - 1) = 3x^2 + x - 2$$

Zatem $W(x) = (x - 1)(3x^2 + x - 2)$.

Obliczamy pierwiastki trójmianu $3x^2 + x - 2$:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25$$

$$x = \frac{-1 - 5}{2 \cdot 3} = -1 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-1 + 5}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-1), \frac{2}{3}, 1$.

Sposób IV

Obliczamy $W(1) = 0$ i stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$.

Obliczamy $W(-1) = 0$ i stwierdzamy, że liczba (-1) jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$.

Obliczamy $W\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ i stwierdzamy, że liczba $\frac{2}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$.

Ponieważ W jest wielomianem stopnia trzeciego, więc ma co najwyżej trzy pierwiastki rzeczywiste. Oznacza to, że jedynymi rozwiązaniami równania $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$ są liczby: $(-1), \frac{2}{3}, 1$.

Zadanie 10. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 11. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 12. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 13. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 14.1. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 14.2. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie
$[-7, -5] \cup [-4, 2) \cup (5, 7]$

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze rozwiązanie jako np. $[-7, -5] \cup (2, -4] \cup (5, 7]$ albo $[-5, -7] \cup [-4, 2) \cup [7,5)$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 14.3. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 15. (0–2)

Zasady oceniania
2 pkt – wybranie dwóch odpowiedzi, z których obie są poprawne.
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest poprawna.
0 pkt – odpowiedzi niepoprawne albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
AF

Zadanie 16. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 17. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 18. (0–2)

Zasady oceniania
2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = -4$.
1 pkt – zastosowanie własności/definicji ciągu arytmetycznego i zapisanie równania

$$\frac{3x^2+5x+20-x^2}{2} = x^2 \text{ lub } x^2 - (3x^2 + 5x) = (20 - x^2) - x^2.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie $x^2 - 3x^2 + 5x = (20 - x^2) - x^2$ (tj. nie uwzględnia istotnego nawiasu) i rozwiąże je konsekwentnie do końca, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$\frac{3x^2 + 5x + 20 - x^2}{2} = x^2$$

$$2x^2 + 5x + 20 = 2x^2$$

$$x = -4$$

Sposób II

Z definicji/własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$x^2 - (3x^2 + 5x) = (20 - x^2) - x^2$$

Stąd

$$-2x^2 - 5x = 20 - 2x^2$$

$$x = -4$$

Zadanie 19. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 20. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 21. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 22. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 23. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

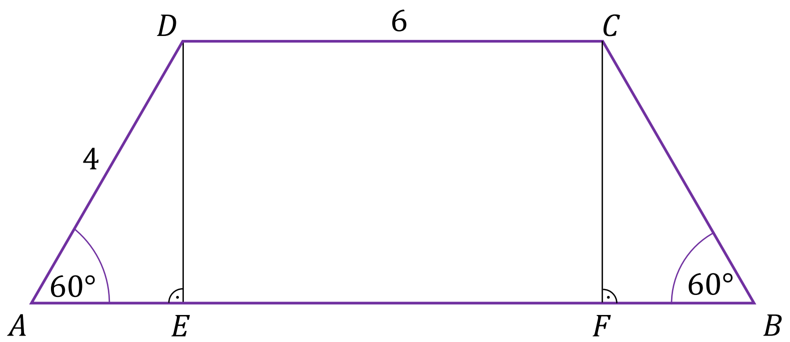
Rozwiązanie
C

Zadanie 24. (0–2)

Zasady oceniania
2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $16\sqrt{3}$.
1 pkt – obliczenie/podanie długości odcinka AE (lub BF): $|AE| = 2$
ALBO
– obliczenie wysokości trapezu: $2\sqrt{3}$,
ALBO
– podzielenie trapezu $ABCD$ na równoległobok bokach 6 i 4 oraz trójkąt równoboczny i zapisanie pola P trapezu $ABCD$ jako sumy pól tego równoległoboku i tego trójkąta, np. $P = P_{AGCD} + P_{GBC}$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający, obliczając wysokość trapezu albo długość odcinka AE (lub BF), stosuje błędnie funkcje trygonometryczne lub związki miarowe trójkąta o kątach $30°$, $60°$ i $90°$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Niech DE oraz CF będą wysokościami trapezu opuszczonymi na podstawę AB.



Stosując definicje funkcji trygonometrycznych dla kąta BAD w trójkącie prostokątnym FAD (lub korzystając ze związków miarowych dla trójkąta o kątach $30°$, $60°$ i $90°$), otrzymujemy

$\frac{|AE|}{|AD|} = cos\,60°$, więc $|AE| = |AD| \cdot cos\,60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

oraz

$\frac{|DE|}{|AD|} = sin\,60°$, więc $|DE| = |AD| \cdot sin\,60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

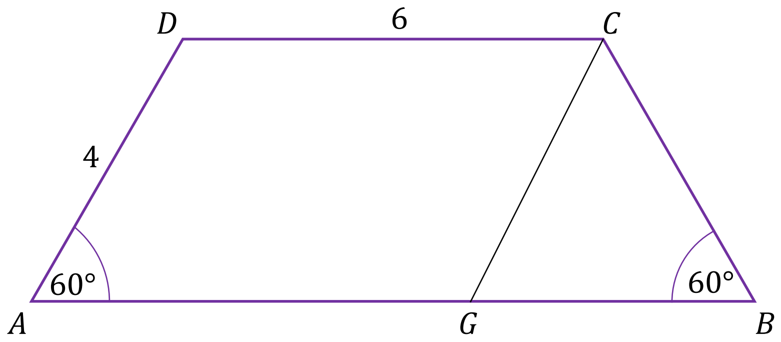
Ponieważ trapez jest równoramienny, więc $|AE| = |FB|$. Zatem
$|AB| = |CD| + 2 \cdot |AE| = 10$.

Obliczamy pole P trapezu $ABCD$:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |DE| = \frac{10 + 6}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

Sposób II

Prowadzimy odcinek CG równoległy do ramienia AD tak, żeby koniec G tego odcinka leżał na podstawie AB trapezu $ABCD$.



Odcinek CG dzieli trapez $ABCD$ na równoległobok $AGCD$ i trójkąt równoboczny GBC. Zatem pole P trapezu $ABCD$ jest równe

$$P = P_{AGCD} + P_{GBC} = 4 \cdot 6 \cdot sin\,60° + \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

Zadanie 25. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 26. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 27. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B2

Zadanie 28. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 29.1. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 29.2. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie
$\frac{2}{\sqrt{5}}$

Zadanie 30. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 31. (0–2)

Zasady oceniania
2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.
1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 5 \cdot 4$,
ALBO
– sporządzenie tabeli 5x5 i wypełnienie/zaznaczenie pól odpowiadających zdarzeniom elementarnym (lub wykreślenie pól na głównej przekątnej),
ALBO
– sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego,
ALBO
– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego:
$(1,3), (1,5), (3,1), (3,5), (5,1), (5,3)$,
ALBO
– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 6$, jeśli nie została otrzymana w wyniku zastosowania błędnej metody,
ALBO
– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,
ALBO
– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{20}$,
ALBO
– zapisanie tylko $P(A) = \frac{6}{20}$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający zapisuje tylko liczbę 6 lub 20 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przedstawia dwa sprzeczne ze sobą zapisy i z rozwiązania nie wynika jednoznacznie, który z nich zdający uznaje za poprawny, to za te zapisy zdający nie otrzymuje punktów.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (a, b), gdzie $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $a \neq b$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

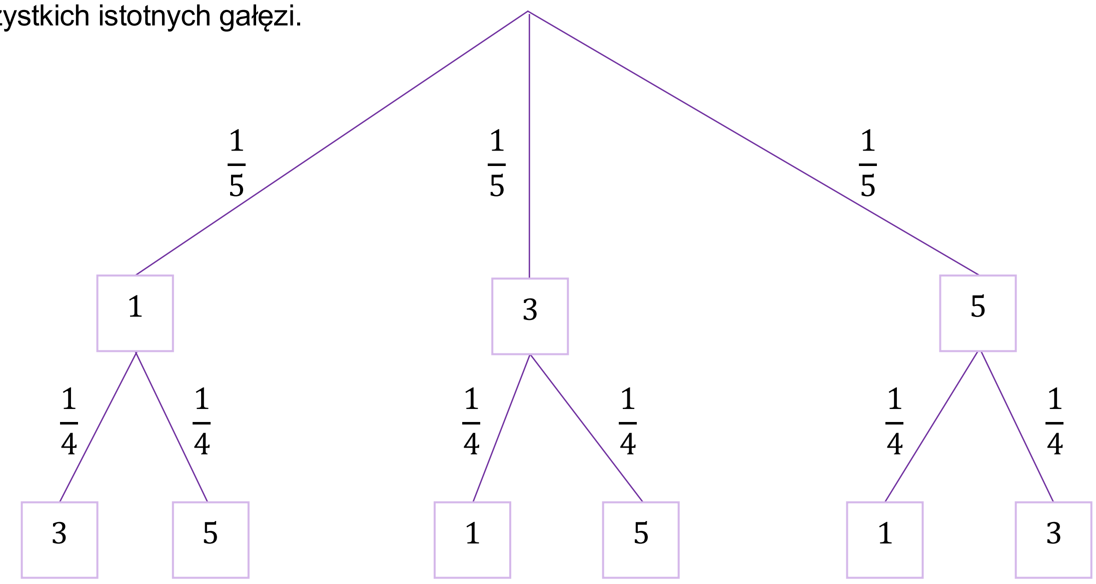
$(1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 1)$, $(3, 5)$, $(5, 1)$, $(5, 3)$,

więc $|A| = 6$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Sposób II (drzewo stochastyczne)

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.

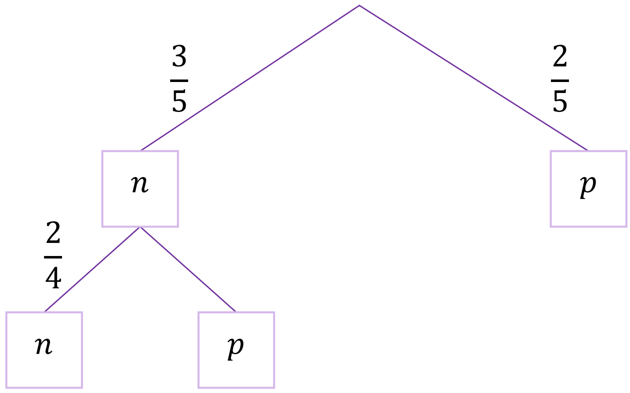


Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Sposób IIa (drzewo stochastyczne uproszczone)

Rozpatrujemy dwuetapowe doświadczenie losowe. Niech n odpowiada zdarzeniu wylosowania liczby nieparzystej, natomiast p – zdarzeniu wylosowania liczby parzystej. Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Zadanie 32. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 33. (0–4)

Zasady oceniania
4 pkt – poprawna metoda rozwiązania zadania oraz poprawny wynik: 24 krzesła, 2064 zł.
3 pkt – obliczenie dziennej wielkości produkcji, przy której zysk zakładu jest największy: 24.
2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji Z zysku w postaci jawnej:
$Z(x) = -4x^2 + 192x - 240$.
1 pkt – zapisanie funkcji Z zysku w postaci $Z(x) = P(x) - K(x)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający zapisze wzór funkcji zysku w postaci jawnej, obliczy $Z(24) = 2064$ i $Z(24-k) = Z(24+k)$, gdzie $k \neq 0$, oraz wskaże optymalną wielkość produkcji i odpowiadający tej wielkości zysk, to może otrzymać **4 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający zapisze wzór funkcji zysku w postaci $Z(x) = -4x^2 + 192x - 240$ i dalej zapisze tylko $Z(24) = 2064$, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko 24 krzesła i 2064 zł, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy przez x liczbę krzeseł wyprodukowanych w ciągu jednego dnia.
Zysk ze sprzedaży jest różnicą przychodu ze sprzedaży krzeseł oraz kosztu ich wytworzenia:

$$Z(x) = 196x - K(x) = 196x - (4x^2 + 4x + 240) = -4x^2 + 192x - 240$$

Ponieważ dziennie w zakładzie można wyprodukować maksymalnie 30 krzeseł, więc dziedziną funkcji Z jest zbiór wszystkich liczb całkowitych należących do przedziału $[0, 30]$.
Wykresem funkcji $Z(x) = -4x^2 + 192x - 240$, gdzie x jest liczbą całkowitą z przedziału $[0, 30]$, jest zbiór punktów leżących na paraboli o ramionach skierowanych w dół.
Przekształcamy wzór funkcji Z do postaci kanonicznej:

$$Z(x) = -4x^2 + 192x - 240 = -4(x^2 - 48x) - 240 = -4[(x - 24)^2 - 24^2] - 240 =$$

$$= -4(x - 24)^2 + 2064$$

Z postaci kanonicznej odczytujemy współrzędne wierzchołka paraboli: $W = (24, 2064)$.
Ponieważ 24 należy do dziedziny funkcji Z, więc funkcja zysku przyjmuje największą wartość, równą $2\,064$, dla argumentu 24.

Sposób II

Oznaczmy przez x liczbę krzeseł wyprodukowanych w ciągu jednego dnia.
Zysk ze sprzedaży jest różnicą przychodu ze sprzedaży krzeseł oraz kosztu ich wytworzenia:

$$Z(x) = 196x - K(x) = 196x - (4x^2 + 4x + 240) = -4x^2 + 192x - 240$$

Ponieważ dziennie w zakładzie można wyprodukować maksymalnie 30 krzeseł, więc dziedziną funkcji Z jest zbiór wszystkich liczb całkowitych należących do przedziału $[0, 30]$.
Wykresem funkcji $Z(x) = -4x^2 + 192x - 240$, gdzie x jest liczbą całkowitą z przedziału $[0, 30]$, jest zbiór punktów leżących na paraboli o ramionach skierowanych w dół.
Obliczamy współrzędne wierzchołka $W = (p, q)$ tej paraboli:

$$p = \frac{-192}{2 \cdot (-4)} = 24, \quad 24 \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$$

$$q = Z(p) = -4 \cdot 24^2 + 192 \cdot 24 - 240 = 2\,064$$

Największy dzienny zysk, równy $2\,064$ zł, jest osiągany przy dziennej produkcji 24 krzeseł.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
II. dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin poprawkowy 2023.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 4.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 9.

2 pkt – zapisanie dwóch pierwiastków wielomianu $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ (o ile nie zostały one uzyskane w wyniku błędnej metody).

1 pkt – przekształcenie wielomianu $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ do postaci $3x(x^2-1) - 2(x^2-1)$ lub $x^2(3x-2) - (3x-2)$.

Zadanie 14.2.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 18.

1 pkt – zapisanie równania z dwiema niewiadomymi: x oraz r (gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego), np. $3x^2 + 5x = x^2 + r$.

Zadanie 24.

1 pkt – zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznej lub związków miarowych w trójkącie o kątach $30°, 60°, 90°$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością h trapezu lub długością odcinka AE, lub długością odcinka BF), np. $\frac{h}{4} = \sin 60°$, $\frac{|AE|}{4} = \cos 60°$.

Zadanie 29.2.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 20 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) <u>nie stosuje się</u> uwagi 1. ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, lecz popełni błąd w ich zliczeniu ($|A| = 5$) i konsekwentnie zapisze wynik $\frac{5}{20}$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 33.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.