CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

| | |
|---|---|
| *Rodzaj dokumentu:* | **Zasady oceniania rozwiązań zadań** |
| *Egzamin:* | **Egzamin maturalny** |
| *Przedmiot:* | **Matematyka** |
| *Poziom:* | **Poziom podstawowy** |
| *Formy arkusza:* | EMAP-P0-100, EMAP-P0-200,<br>EMAP-P0-300, EMAP-P0-400,<br>EMAP-P0-700, EMAP-P0-Q00,<br>EMAP-P0-Z00, EMAU-P0-100 |
| *Termin egzaminu:* | 22 sierpnia 2023 r. |

## ZADANIA ZAMKNIĘTE

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

| Nr zadania | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Odpowiedź poprawna | **A** | **D** | **A** | **A** | **B** | **D** | **C** | **B** | **A** | **C** | **D** | **B** | **B** | **D** | **B** |

| Nr zadania | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Odpowiedź poprawna | **A** | **D** | **B** | **B** | **C** | **C** | **C** | **B** | **D** | **D** | **B** | **C** | **A** | **D** |

## ZADANIA OTWARTE

**Uwagi ogólne:**

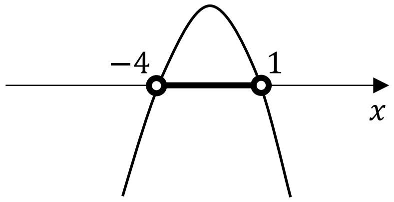
**1.** Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
**2.** Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
**3.** Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie $n$ jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).



### Zadanie 30. (0–2)

**Zasady oceniania**

2 pkt – spełnienie jednego z warunków określonych w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz** zapisanie zbioru rozwiązań nierówności: $(-4, 1)$ lub $x \in (-4, 1)$
*ALBO*
– spełnienie jednego z warunków określonych w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz** przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



1 pkt – obliczenie lub podanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $-x^2 - 3x + 4$:
$x_1 = -4$ oraz $x_2 = 1$
*ALBO*
– odczytanie z wykresu funkcji $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ i zapisanie miejsc zerowych $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 1$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

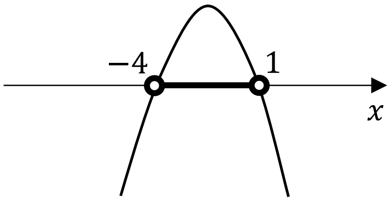
**1.** Jeżeli zdający, wyznaczając pierwiastki trójmianu $-x^2 - 3x + 4$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
**2.** Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik $\Delta$ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
**3.** Jeżeli zdający, rozpoczynając rozwiązanie zadania, rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $5 - x^2$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $5 - x^2 > 0$), to i otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
**4.** Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c$ są liczbami wymiernymi.
**5.** Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów oraz zapisze: $x \in \langle -4, 1 \rangle$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(1, -4)$, to otrzymuje **2 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**
Zapisujemy nierówność w postaci $-x^2 - 3x + 4 > 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu $-x^2 - 3x + 4$.
Obliczamy wyróżnik trójmianu: $\Delta = 25$
i obliczamy jego pierwiastki: $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 1$
ALBO
podajemy pierwiastki trójmianu bezpośrednio, zapisując je lub zaznaczając je na wykresie: $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 1$.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-4, 1)$ lub $x \in (-4, 1)$, lub zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej:



## Zadanie 31. (0–2)

**Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = -4$.

1 pkt – zastosowanie własności/definicji ciągu arytmetycznego i zapisanie równania

$\frac{3x^2+5x+20-x^2}{2} = x^2$ lub $x^2 - (3x^2 + 5x) = (20 - x^2) - x^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

**2.** Jeżeli zdający zapisze równanie $x^2 - 3x^2 + 5x = (20 - x^2) - x^2$ (tj. nie uwzględnia istotnego nawiasu) i rozwiąże je konsekwentnie do końca, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.



**Przykładowe pełne rozwiązania**

<u>*Sposób I*</u>

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$\frac{3x^2 + 5x + 20 - x^2}{2} = x^2$$

$$2x^2 + 5x + 20 = 2x^2$$

$$x = -4$$

<u>*Sposób II*</u>

Z definicji/własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$x^2 - (3x^2 + 5x) = (20 - x^2) - x^2$$

Stąd

$$-2x^2 - 5x = 20 - 2x^2$$

$$x = -4$$

## Zadanie 32. (0–2)

**Zasady oceniania**

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj. przekształcenie nierówności $x^2 + 3xy - 10y^2 > 0$ do postaci $(x - 2y)(x + 5y) > 0$ **oraz** powołanie się na założenie i stwierdzenie, że: czynniki $x + 5y$ oraz $x - 2y$ są liczbami dodatnimi oraz iloczyn liczb dodatnich jest liczbą dodatnią (dla sposobu I)

*ALBO*

– przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj. wykorzystanie założenia $x > 2y > 0$ i wywnioskowanie stąd nierówności $x^2 - 4y^2 > 0$ oraz $3xy - 6y^2 > 0$ (lub

$x^2 > 4y^2$ oraz $3xy > 6y^2$), a następnie wywnioskowanie nierówności
$x^2 + 3xy - 10y^2 > 0$.

1 pkt – przekształcenie nierówności $x^2 + 3xy - 10y^2 > 0$ do postaci
$(x - 2y)(x + 5y) > 0$
*ALBO*
– wykorzystanie założenia $x > 2y > 0$ i wywnioskowanie stąd nierówności
$x^2 - 4y^2 > 0$ oraz $3xy - 6y^2 > 0$ (lub: $x^2 > 4y^2$ oraz $3xy > 6y^2$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**
Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności tylko dla wybranych wartości $x$ i $y$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

*Sposób I*

Przekształcamy nierówność $x^2 + 3xy - 10y^2 > 0$ w sposób równoważny:

$$x^2 + 5xy - 2xy - 10y^2 > 0$$

$$x(x + 5y) - 2y(x + 5y) > 0$$

$$(x - 2y)(x + 5y) > 0$$

Z założenia $x$ oraz $y$ są dodatnie, więc $x + 5y > 0$. Z założenia $x > 2y$, więc $x - 2y > 0$. Stąd $(x - 2y)(x + 5y) > 0$.
To należało wykazać.

*Sposób II*

Ponieważ z założenia liczby $x$ oraz $y$ są dodatnie i $x > 2y$, więc $x^2 > 4y^2$, czyli

$$x^2 - 4y^2 > 0$$

Mnożąc obie strony nierówności $x > 2y$ przez liczbę dodatnią $3y$ otrzymujemy $3xy > 6y^2$, czyli

$$3xy - 6y^2 > 0$$

Zatem $x^2 - 4y^2 + 3xy - 6y^2$ jest liczbą dodatnią (jako suma liczb dodatnich $x^2 - 4y^2$ oraz $3xy - 6y^2$). Oznacza to, że dla każdego $x$ oraz $y$ takich, że $x > 2y$, spełniona jest nierówność $x^2 + 3xy - 10y^2 > 0$.

**Zadanie 33. (0–2)**

**Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $16\sqrt{3}$.

1 pkt – obliczenie/podanie długości odcinka $AE$ (lub $BF$): $|AE| = 2$

*ALBO*

– obliczenie wysokości trapezu: $2\sqrt{3}$,

*ALBO*

– podzielenie trapezu $ABCD$ na równoległobok bokach $6$ i $4$ oraz trójkąt równoboczny i zapisanie pola $P$ trapezu $ABCD$ jako sumy pól tego równoległoboku i tego trójkąta, np. $P = P_{AGCD} + P_{GBC}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

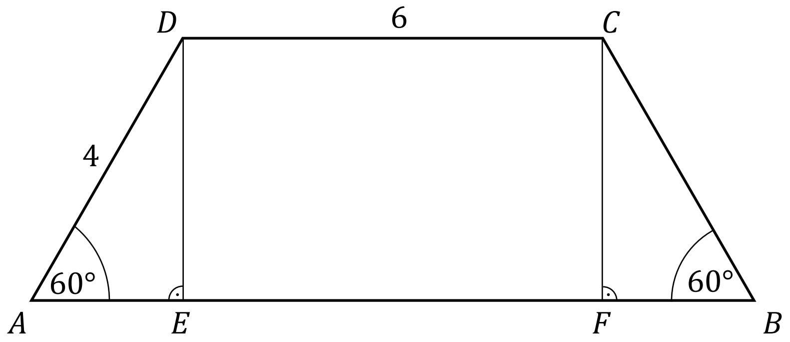
**Uwaga:**

Jeżeli zdający, obliczając wysokość trapezu albo długość odcinka $AE$ (lub $BF$), stosuje błędnie funkcje trygonometryczne lub związki miarowe trójkąta o kątach $30°$, $60°$ i $90°$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

<u>*Sposób*</u> *I*

Niech $DE$ oraz $CF$ będą wysokościami trapezu opuszczonymi na podstawę $AB$.




Stosując definicje funkcji trygonometrycznych dla kąta $BAD$ w trójkącie prostokątnym $FAD$ (lub korzystając ze związków miarowych dla trójkąta o kątach $30°$, $60°$ i $90°$), otrzymujemy

$\frac{|AE|}{|AD|} = cos\,60°$, więc $|AE| = |AD| \cdot cos\,60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

oraz

$\frac{|DE|}{|AD|} = sin\,60°$, więc $|DE| = |AD| \cdot sin\,60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Ponieważ trapez jest równoramienny, więc $|AE| = |FB|$. Zatem

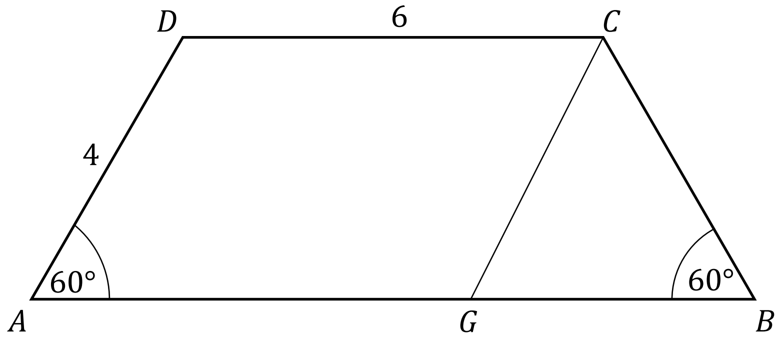
$|AB| = |CD| + 2 \cdot |AE| = 10$.

Obliczamy pole $P$ trapezu $ABCD$:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |DE| = \frac{10 + 6}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

*Sposób II*

Prowadzimy odcinek $CG$ równoległy do ramienia $AD$ tak, żeby koniec $G$ tego odcinka leżał na podstawie $AB$ trapezu $ABCD$.




Odcinek $CG$ dzieli trapez $ABCD$ na równoległobok $AGCD$ i trójkąt równoboczny $GBC$. Zatem pole $P$ trapezu $ABCD$ jest równe

$$P = P_{AGCD} + P_{GBC} = 4 \cdot 6 \cdot sin\,60° + \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

## Zadanie 34. (0–2)

**Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania równania wymiernego i poprawny wynik: $\frac{1}{4}$ oraz $2$.

1 pkt – poprawne przekształcenie równania $\frac{2x-3}{3x-2} = \frac{1}{2x}$ do równania kwadratowego, np. $(2x-3) \cdot 2x = 3x - 2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający nie zapisze zastrzeżeń: $x \neq \frac{2}{3}, x \neq 0$, to może otrzymać **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe przy przekształcaniu równania, otrzyma równanie kwadratowe, które ma dwa rozwiązania i konsekwentnie je rozwiąże do końca, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający, przekształcając równanie wymierne do równania kwadratowego, zastosuje błędną metodę i zapisze np. $(2x-3) \cdot 2x = 2x \cdot (3x-2)$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający odgadnie jedno z rozwiązań równania, to otrzymuje **0 punktów**; jeżeli odgadnie dwa rozwiązania równania i nie uzasadni, że są to jedyne rozwiązania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz traktuje równanie jako nierówność (rysuje parabolę i podaje przedziały jako rozwiązanie), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie. Podobnie, jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz poda odpowiedź w postaci przedziału/sumy przedziałów o końcach $\frac{1}{4}$ i $2$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Równanie ma sens liczbowy dla $x \neq \frac{2}{3}$ i $x \neq 0$.

Przekształcamy równanie:

$$\frac{2x-3}{3x-2} = \frac{1}{2x}$$

$$(2x-3) \cdot 2x = (3x-2) \cdot 1$$

$$4x^2 - 6x = 3x - 2$$

$$4x^2 - 9x + 2 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2 - 9x + 2$: $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$ i stąd $x_1 = \frac{1}{4}$ oraz $x_2 = \frac{16}{8} = 2$.

Otrzymane pierwiastki są różne od liczby $\frac{2}{3}$ oraz od liczby $0$, więc są rozwiązaniami danego równania.

## Zadanie 35. (0–2)

**Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia $A$ i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 5 \cdot 4$,

*ALBO*

– sporządzenie tabeli 5x5 i wypełnienie/zaznaczenie pól odpowiadających zdarzeniom elementarnym (lub wykreślenie pól na głównej przekątnej),

*ALBO*

– sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego,

*ALBO*

– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$ i niewypisanie żadnego niewłaściwego: $(1,3), (1,5), (3,1), (3,5), (5,1), (5,3)$,

*ALBO*

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$: $|A| = 6$, jeśli nie została otrzymana w wyniku zastosowania błędnej metody,

*ALBO*

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu $A$ **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,

*ALBO*

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{20}$,

*ALBO*

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{6}{20}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający zapisuje tylko liczbę $6$ lub $20$ i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**2.** Jeżeli zdający przedstawia dwa sprzeczne ze sobą zapisy i z rozwiązania nie wynika jednoznacznie, który z nich zdający uznaje za poprawny, to za te zapisy zdający nie otrzymuje punktów.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb $(a, b)$, gdzie $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $a \neq b$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$.

Zdarzeniu $A$ sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

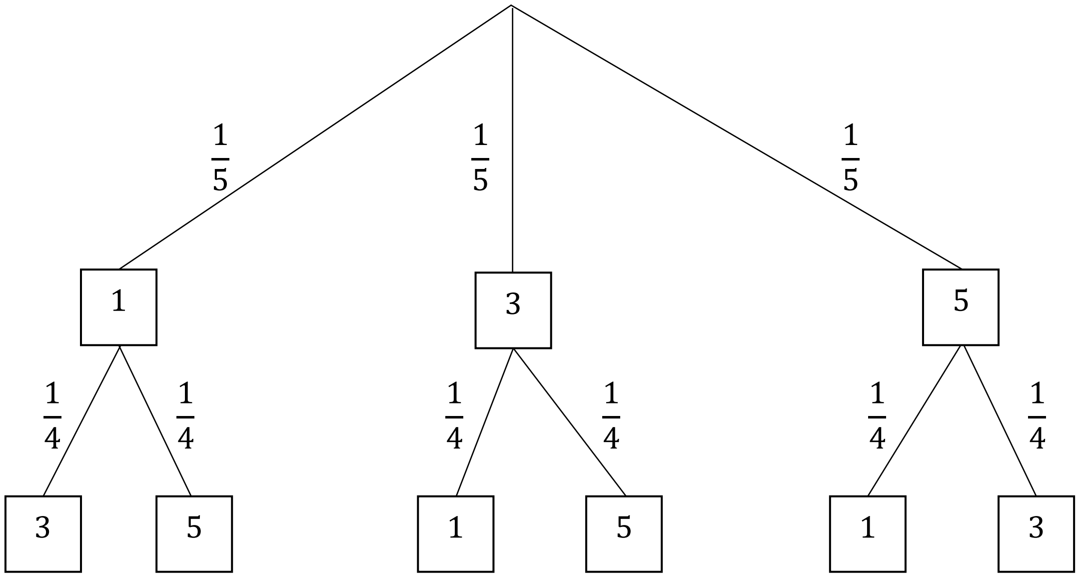
$(1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 1)$, $(3, 5)$, $(5, 1)$, $(5, 3)$,

więc $|A| = 6$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

*Sposób II (drzewo stochastyczne)*

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.

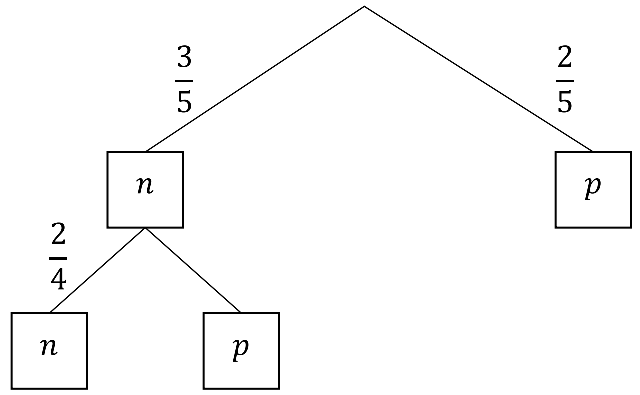


Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe

$$P(A) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

*<u>Sposób IIa (drzewo stochastyczne uproszczone)</u>*

Rozpatrujemy dwuetapowe doświadczenie losowe. Niech $n$ odpowiada zdarzeniu wylosowania liczby nieparzystej, natomiast $p$ – zdarzeniu wylosowania liczby parzystej. Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.




Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe

$$P(A) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

## Zadanie 36. (0–5)

**Zasady oceniania**

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $D = (-6, 3)$.

4 pkt – wyznaczenie równania prostej $BC$ i wyznaczenie równania symetralnej odcinka $AB$:
$y = \frac{1}{3}x + 5$ i $y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7}$
*ALBO*
– zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $BSD$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu $D$), np.
$\left(x - \frac{26}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{28}{5}\right)^2 = (x-6)^2 + \left(\frac{1}{3}x - 2\right)^2$.

3 pkt – wyznaczenie równania symetralnej odcinka $AB$: $y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7}$
*ALBO*
– obliczenie współczynnika kierunkowego $a_2$ prostej prostopadłej do $AB$: $a_2 = -\frac{1}{7}$
i wyznaczenie równania prostej $BC$: $y = \frac{1}{3}x + 5$,
*ALBO*
– obliczenie długości odcinka $SB$ i zapisanie współrzędnych punktu $D$ za pomocą pierwszej/drugiej współrzędnej punktu $D$: $|SB| = \sqrt{32}$ i $D = \left(x, \frac{1}{3}x + 5\right)$
(lub $D = (3y - 5, y)$ ).

2 pkt – spełnienie dwóch spośród trzech warunków wymienionych w kryteriach oceniania za 1 punkt
*ALBO*
– obliczenie współczynnika kierunkowego $a_2$ prostej prostopadłej do odcinka $AB$:
$a_2 = -\frac{1}{7}$.

1 pkt – wyznaczenie równania prostej $BC$: $y = \frac{1}{3}x + 5$
*ALBO*
– wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej $AB$: 7,
*ALBO*
– obliczenie współrzędnych środka $S$ odcinka $AB$: $S = \left(\frac{26}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający zamiast symetralnej boku $AB$ rozpatruje symetralną boku $BC$ (lub $CA$) i poprawnie realizuje strategię obliczenia współrzędnych punktu przecięcia symetralnej boku $BC$ (lub $CA$) z bokiem $CA$ (lub $BC$) oraz (konsekwentnie do popełnionego błędu) rozwiązuje zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**2.** Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:
a) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
b) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$,
c) błędne zastosowanie wzoru na współrzędne środka odcinka,
d) błędne zastosowanie warunku prostopadłości prostych,

e) błędne zastosowanie wzoru na odległość między dwoma punktami,
i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie (o ile nie nabył prawa do 4 punktów).

**Przykładowe pełne rozwiązania**

Sposób I

Wyznaczamy równanie kierunkowe prostej $BC$: $y = ax + b$, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 7 = a \cdot 6 + b \\ 2 = a \cdot (-9) + b \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\begin{cases} 7 - 6a = b \\ 2 + 9a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6a = b \\ 2 + 9a = 7 - 6a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6a = b \\ 15a = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6a = b \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = b \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Zatem prosta $BC$ ma równanie $y = \frac{1}{3}x + 5$.

Obliczamy współrzędne $x_S$ oraz $y_S$ środka $S$ odcinka $AB$:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{22}{5} + 6}{2} = \frac{\frac{52}{5}}{2} = \frac{26}{5}$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-\frac{21}{5} + 7}{2} = \frac{\frac{14}{5}}{2} = \frac{7}{5}$$

Zatem $S = \left(\frac{26}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy $a_{AB}$ prostej $AB$:

$$a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - \left(-\frac{21}{5}\right)}{6 - \frac{22}{5}} = \frac{\frac{56}{5}}{\frac{8}{5}} = 7$$

Wyznaczamy równanie symetralnej boku $AB$: $y = a_2 x + b_2$ .

Obliczamy współczynnik kierunkowy $a_2$ symetralnej: $a_2 \cdot a_{AB} = -1$. Stąd $a_2 = -\frac{1}{7}$.

Symetralna boku $AB$ przechodzi przez punkt $S$, więc $\frac{7}{5} = -\frac{1}{7} \cdot \frac{26}{5} + b_2$. Stąd $b_2 = \frac{15}{7}$

i symetralna ma równanie $y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7}$.

Punkt $D$ jest punktem przecięcia prostej $BC$ i symetralnej boku $AB$.
Obliczamy współrzędne punktu $D$, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7} \\ y = \frac{1}{3}x + 5 \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7} \\ \frac{1}{3}x + 5 = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7} \\ 7x + 105 = -3x + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7} \\ 10x = -60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7} \\ x = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = -6 \end{cases}$$

Zatem $D = (-6, 3)$.
Punkt ten leży na odcinku $BC$, gdyż $x_B = 6 > x_D = -6 > -9 = x_C$.

**Uwaga:**
Równanie symetralnej można również wyznaczyć korzystając z tego, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów równo oddalonych od końców odcinka.
Niech punkt $P = (x, y)$ będzie punktem leżącym na symetralnej boku $AB$. Wtedy $|AP| = |PB|$.
Zatem

$$\sqrt{\left(x - \frac{22}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{21}{5}\right)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-7)^2}$$

$$x^2 - \frac{44}{5}x + \frac{484}{25} + y^2 + \frac{42}{5}y + \frac{441}{25} = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 14y + 49$$

$$\frac{42}{5}y + 14y = \frac{44}{5}x - 12x + 36 + 49 - 37$$

$$\frac{112}{5}y = -\frac{16}{5}x + 48$$

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7}$$

<u>Sposób II</u>

Wyznaczamy równanie kierunkowe prostej $BC$: $y = ax + b$, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 7 = a \cdot 6 + b \\ 2 = a \cdot (-9) + b \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\begin{cases} 7 - 6a = b \\ 2 + 9a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6a = b \\ 2 + 9a = 7 - 6a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6a = b \\ 15a = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6a = b \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = b \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Zatem prosta $BC$ ma równanie $y = \frac{1}{3}x + 5$.

Obliczamy współrzędne $x_S$ oraz $y_S$ środka $S$ odcinka $AB$:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{22}{5} + 6}{2} = \frac{\frac{52}{5}}{2} = \frac{26}{5}$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-\frac{21}{5} + 7}{2} = \frac{\frac{14}{5}}{2} = \frac{7}{5}$$

Zatem $S = \left(\frac{26}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka $AB$.
Ponieważ symetralna $SD$ jest prostopadła do prostej $AB$, więc trójkąt $BSD$ jest trójkątem prostokątnym, w którym wierzchołkiem kąta prostego jest punkt $S$.
Punkt $D$ przecięcia symetralnej boku $AB$ i boku $BC$, należy do prostej $BC$, więc
$D = \left(x, \frac{1}{3}x + 5\right)$.
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $BSD$ i obliczamy współrzędne punktu $D$:

$$|SD|^2 + |SB|^2 = |BD|^2$$

$$\left(x - \frac{26}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x + 5 - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(6 - \frac{26}{5}\right)^2 + \left(7 - \frac{7}{5}\right)^2 = (x-6)^2 + \left(\frac{1}{3}x + 5 - 7\right)^2$$

$$\left(x - \frac{26}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{28}{5}\right)^2 = (x-6)^2 + \left(\frac{1}{3}x - 2\right)^2$$

$$x^2 - \frac{52}{5}x + \frac{676}{25} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{36}{15}x + \frac{324}{25} + 32 = x^2 - 12x + 36 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4$$

$$-\frac{52}{5}x + \frac{36}{15}x = -12x - 32 - \frac{4}{3}x$$

$$\frac{16}{3}x = -32$$

$$x = -6$$

Zatem $\frac{1}{3}x + 5 = \frac{1}{3} \cdot (-6) + 5 = 3$, czyli $D = (-6, 3)$.
Punkt ten leży na odcinku $BC$, gdyż $x_B = 6 > x_D = -6 > -9 = x_C$.

## Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują **Zasady oceniania** stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

a) **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);

b) dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin poprawkowy 2023.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.



II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

**Zadanie 30.**

1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $-x^2-3x+4$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków
*ALBO*
– konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego wyróżnika) narysowanie paraboli,
*ALBO*
– konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

**Uwagi:**
1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(1,-4)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. <u>Nie stosuje się</u> uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.

**Zadanie 31.**

1 pkt – zapisanie równania z dwiema niewiadomymi: $x$ oraz $r$ (gdzie $r$ jest różnicą ciągu arytmetycznego), np. $3x^2+5x=x^2+r$.

**Zadanie 32.**

1 pkt – zapisanie nierówności $x^2>4y^2$ lub $3xy>6y^2$.

**Zadanie 33.**

1 pkt – zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznej lub związków miarowych w trójkącie o kątach $30°, 60°, 90°$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością $h$ trapezu lub długością odcinka $AE$, lub długością odcinka $BF$), np. $\frac{h}{4} = \sin 60°$, $\frac{|AE|}{4} = \cos 60°$.

**Zadanie 34.**

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

**Zadanie 35.**

1 pkt – zapisanie jedynie liczby $20$ (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

**Uwagi:**

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi 1. ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu $A$, lecz popełni błąd w ich zliczeniu ($|A| = 5$) i konsekwentnie zapisze wynik $\frac{5}{20}$, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 36.**

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej $BC$: $\frac{1}{3}$.