CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	EMAP-R0-100, EMAP-R0-200, EMAP-R0-300, EMAP-R0-400, EMAP-R0-600, EMAP-R0-700, EMAP-R0-K00, EMAP-R0-Q00, EMAU-R0-100
Termin egzaminu:	11 czerwca 2024 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.R2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.R1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1698).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.R4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 11.R3) korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.R1) oblicza granice ciągów […].

Zasady oceniania

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

4	3	3

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.R2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{1}{15}$.

2 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru $A \cap B$ i wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru B: $|A \cap B| = 8$ i $|B| = \binom{10}{3}$

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzeń $A \cap B$ oraz B:

$P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}}$ oraz $P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$.

1 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru $A \cap B$: 8

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru B, np. $\binom{10}{3}$,

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia B, np. $P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$,

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cap B$, np. $P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów z rzędu w dziesięciu rzutach monetą,

B – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów w dziesięciu rzutach monetą,

Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Wynikiem każdego rzutu jest orzeł (o) lub reszka (r). Wynikiem doświadczenia losowego jest dziesięciowyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru $\{o, r\}$. Zatem liczba elementów zbioru Ω jest równa $2^{10} = 1024$.

Obliczamy liczbę elementów zbioru B: $|B| = \binom{10}{3} = 120$.

Zdarzenie $A \cap B$ polega na wyrzuceniu w dziesięciu rzutach dokładnie trzech orłów i to trzech orłów z rzędu. Obliczamy liczbę elementów zbioru $A \cap B$: $|A \cap B| = 8$.

Obliczamy prawdopodobieństwo $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{\frac{8}{1024}}{\frac{120}{1024}} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

Uwagi:

1. Zdający może rozwiązać zadanie poprzez obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń B oraz $A \cap B$.

2. Zdający może obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia B, korzystając ze schematu Bernoullego. Sukcesem w pojedynczej próbie jest wyrzucenie orła. Prawdopodobieństwo p sukcesu jest równe $p = \frac{1}{2}$. Przy liczbie prób $n = 10$ oraz liczbie sukcesów $k = 3$ otrzymujemy

$$P(B) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{2^{10}}$$

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 3.R7) rozwiązuje proste nierówności wymierne […].

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wykorzystanie założenia i przekształcenie nierówności $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{4}{3}$ do postaci $4a^2-4a+1\geq 0,\, 4b^2-4b+1\geq 0$ albo $a^2-2ab+b^2\geq 0$

ALBO

– zapisanie nierówności między odpowiednimi średnimi liczb $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ (lub między odpowiednimi średnimi liczb $2a+b$ oraz $a+2b$) i przekształcenie tej nierówności do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować o prawdziwości tezy, np. $\frac{3}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}$.

1 pkt – zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej $\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}\geq 0$, np. $\frac{3(a+2b)+3(2a+b)-4(a+2b)(2a+b)}{3(2a+b)(a+2b)}\geq 0$

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wielomianowej, np. $3(1+b)+3(a+1)\geq 4(a+1)(1+b)$,

ALBO

– zapisanie nierówności między średnią harmoniczną a arytmetyczną liczb $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ (lub między odpowiednimi średnimi liczb $2a+b$ oraz $a+2b$), np.

$$\frac{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{2a+b}}+\frac{1}{\frac{1}{a+2b}}},\quad \frac{2a+b+a+2b}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}},$$

ALBO

– wykorzystanie założenia i zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej z jedną niewiadomą, np. $\frac{1}{2a+(1-a)}+\frac{1}{a+2(1-a)}\geq\frac{4}{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $a>0$ i $b>0$, więc $(2a+b)(a+2b)>0$.

Przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{4}{3}$ i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2a\ +\ b}+\frac{1}{a\ +\ 2b}\geq\frac{4}{3}$$

$$\frac{3(a+2b)}{3(2a\ +\ b)(a+2b)}+\frac{3(2a+b)}{3(a\ +\ 2b)(2a+b)}-\frac{4(a+2b)(2a+b)}{3(a+2b)(2a+b)}\geq 0$$

$$\frac{3a+6b+6a+3b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a\ +\ b)(a+2b)}\geq 0$$

$$\frac{9a+9b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a\ +\ b)(a+2b)}\geq 0$$

$$9a+9b-8a^2-20ab-8b^2\geq 0$$

Korzystamy z założenia i otrzymujemy dalej

$$9a+9(1-a)-8a^2-20a(1-a)-8(1-a)^2\geq 0$$

$$4a^2-4a+1\geq 0$$

$$(2a-1)^2\geq 0$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(2a-1)^2\geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a. To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Sposób II

Korzystamy z założenia $a+b=1$ i nierówność $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{4}{3}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{a\ +1}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią $3(a+1)(1+b)$ i ponownie korzystamy z założenia, otrzymując kolejno:

$$3(1+b)+3(a+1)\geq 4(a+1)(1+b)$$

$$2-(a+b)\geq 4ab$$

$$1\geq 4ab$$

$$(a+b)^2\geq 4ab$$

$$(a-b)^2\geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(a-b)^2\geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b. To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Sposób III

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną dla liczb dodatnich $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ i otrzymujemy:

$$\frac{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{2a+b}}+\frac{1}{\frac{1}{a+2b}}}$$

$$\frac{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{2a+b+a+2b}$$

$$\frac{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{3(a+b)}$$

$$\frac{1}{2a\ +\ b}+\frac{1}{a\ +\ 2b} \geq \frac{4}{3(a+b)}$$

Po skorzystaniu z założenia $a+b=1$ otrzymujemy tezę.

Sposób IV

Korzystamy z założenia $a+b=1$ i nierówność $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{2a\ +1-a}+\frac{1}{a+2(1-a)} \geq \frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią $3(a+1)(2-a)$ i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{1}{a\ +1}+\frac{1}{2-a} \geq \frac{4}{3}$$

$$3(2-a)+3(a+1) \geq 4(a+1)(2-a)$$

$$6-3a+3a+3 \geq -4a^2+4a+8$$

$$4a^2-4a+1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(2a-1)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a, więc w szczególności dla każdego $a \in (0,1)$. To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Zadanie 8. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.R1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie pola trapezu w zależności od długości jego podstaw: $P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie równania z a, b oraz h, z którego można wyznaczyć długość wysokości trapezu w zależności od długości jego podstaw, np. $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

ALBO

– wyznaczenie długości promienia okręgu w zależności od długości podstaw trapezu, np. $r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}$,

ALBO

– zapisanie, że pole czworokąta wpisanego w okrąg i opisanego na okręgu jest równe pierwiastkowi z iloczynu długości boków tego czworokąta,

ALBO

– zapisanie, że wysokość trapezu równoramiennego jest średnią geometryczną długości podstaw trapezu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

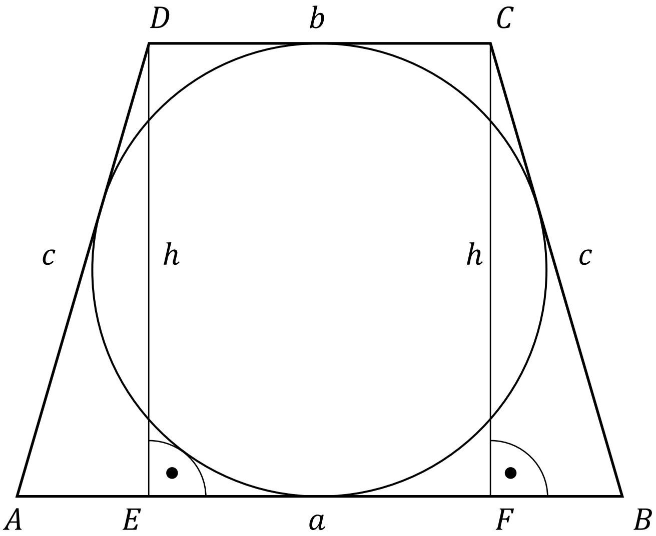
Uwaga:

W przypadku, gdy zdający zapisze nierówność $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$ w postaci równoważnej $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ i stwierdzi, że jej prawdziwość wynika z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną różnych liczb dodatnich a i b, to rozumowanie uznajemy za pełne.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trapez jest równoramienny, więc $|AE| = |BF| = \frac{a-b}{2}$. Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc $a + b = c + c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCF otrzymujemy

$$|BF|^2 + |FC|^2 = |CB|^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = c^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad /\cdot 4$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4h^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h = \sqrt{ab}$$

Pole P trapezu jest równe $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

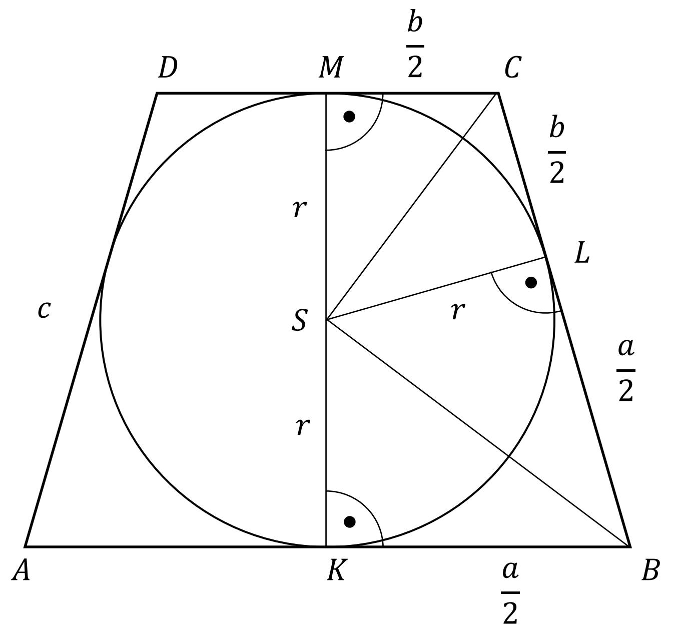
Ponieważ $a > b$, więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich a oraz b otrzymujemy $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli $P > ab$, co należało wykazać.

Sposób II

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku (K, L, M są punktami styczności okręgu z trapezem).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|BL| = \frac{a}{2}$ oraz $|CL| = \frac{b}{2}$.

Ponieważ środek okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trapezu, więc

$$|\measuredangle KBS| = |\measuredangle CBS| \quad \text{oraz} \quad |\measuredangle MCS| = |\measuredangle BCS|$$

Suma miar kątów wewnętrznych trapezu przy ramieniu BC jest równa $180°$, więc

$$|\measuredangle KBS| + |\measuredangle CBS| + |\measuredangle MCS| + |\measuredangle BCS| = 180°$$

Zatem

$$|\measuredangle CBS| + |\measuredangle BCS| = 90°$$

To oznacza, że trójkąt BCS jest prostokątny.

Wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną jest promieniem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$, więc z twierdzenia o wysokości trójkąta prostokątnego wynika, że $r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$.

Pole P trapezu jest równe $P = \frac{a+b}{2} \cdot 2r = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

Pozostaje wykazać, że prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$.

Dzieląc obie strony tej nierówności przez $\sqrt{ab}$, otrzymujemy

$$\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab \quad /: \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0$$

Z założenia $a > b > 0$, więc $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$. Zatem $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0$ jako kwadrat liczby dodatniej $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. To oznacza, że $P > ab$.

<u>Sposób III</u>
Z własności czworokąta opisanego na okręgu i w który można także wpisać okrąg wynika, że pole takiego czworokąta jest równe $\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$, gdzie a, b, c, d są długościami boków czworokąta.
Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu, ale jest on równoramienny, więc można na nim także opisać okrąg. Zatem pole P tego trapezu jest równe $P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot c$, gdzie c jest długością ramienia trapezu.
Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc $a + b = c + c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$.
Stąd $P = \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}$.
Ponieważ $a > b$, więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich a oraz b otrzymujemy $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli $P > ab$, co należało wykazać.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.R2) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

3 pkt – odrzucenie wartości $q = 2$ **oraz** poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania z jedną niewiadomą a_1 : $\frac{a_1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą q oraz obliczenie pierwiastków tego równania, np.

$16(1-q^2) + 16(1-q^2) \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot 16(1-q^2) \cdot q$

i $q = 1$ oraz $q = -1$, oraz $q = \frac{1}{2}$, oraz $q = 2$,

oraz odrzucenie tych wartości q, dla których nie jest spełniony warunek zbieżności $|q^2| < 1$ (dla sposobu II).

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą q **oraz** obliczenie pierwiastków tego równania, np. $2q^2 - 5q + 2 = 0$ i $q = \frac{1}{2}$ oraz $q = 2$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie równań $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2}a_1 \cdot q$ oraz $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$ (dla sposobu II).

1 pkt – zapisanie równania $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2}a_1 \cdot q$ (dla sposobu I)

ALBO

– poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$ (dla sposobu II).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze sumę wszystkich wyrazów ciągu o wyrazach nieparzystych jako $\frac{a_1}{1-q}$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający myli ciąg geometryczny z arytmetycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n). Z warunku $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$ oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

$$a_1 \cdot \left(1 + q^2 - \frac{5}{2}q\right) = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q = 2 \quad \vee \quad q = \frac{1}{2}$$

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj. $a_1, a_3, a_5, \ldots$. Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym a_1 oraz ilorazie q^2. Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc $a_1 \neq 0$ oraz $|q^2| < 1$ i $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$. Pozostaje zatem rozpatrzeć przypadki $q = 2$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Gdy $q = 2$, to warunek $|q^2| < 1$ nie jest spełniony.

Gdy $q = \frac{1}{2}$, to warunek $|q^2| < 1$ jest spełniony. Wtedy $\frac{a_1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$ i stąd $a_1 = 12$.

Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie $\frac{1}{2}$ spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Sposób II

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n).

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj. $a_1, a_3, a_5, \ldots$. Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym a_1 oraz ilorazie q^2. Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc $a_1 \neq 0$ oraz $|q^2| < 1$ i $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$. Zatem $a_1 = 16(1 - q^2)$.

Z warunku $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$ oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

Stąd oraz z równości $a_1 = 16(1 - q^2)$ otrzymujemy kolejno:

$$16(1 - q^2) + 16(1 - q^2) \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot 16(1 - q^2) \cdot q$$

$$16 - 16q^2 + 16q^2 - 16q^4 = 40q - 40q^3$$

$$-16q^4 + 40q^3 - 40q + 16 = 0$$

$$-16(q^4 - 1) + 40q(q^2 - 1) = 0$$

$$-16(q^2 - 1)(q^2 + 1) + 40q(q^2 - 1) = 0$$

$$(q^2 - 1)[-16(q^2 + 1) + 40q] = 0$$

$$(q^2 - 1)(-16q^2 + 40q - 16) = 0$$

$$q^2 - 1 = 0 \quad \vee \quad -16q^2 + 40q - 16 = 0$$

$$q = 1 \quad \vee \quad q = -1 \quad \vee \quad q = 2 \quad \vee \quad q = \frac{1}{2}$$

Uwzględniając warunek $|q^2| < 1$, otrzymujemy $q = \frac{1}{2}$. Zatem $a_1 = 12$. Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie $\frac{1}{2}$ spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.R4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\sqrt{21}-3$ (lub $\sqrt{30-6\sqrt{21}}$).

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku AC), np.

$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = |AC|^2 + 6^2 - 2\cdot 6\cdot |AC|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$|AC|^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 - 2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$,

$6^2 = |AC|^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot |AC|\cdot 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$

ALBO

– zapisanie długości boków trójkąta ACE za pomocą jednej niewiadomej i zapisanie równania z tą jedną niewiadomą, które prowadzi do jej obliczenia, np. $|AE| = 3x$ oraz $|AC| = 4x$, oraz $|EC| = \sqrt{7}x$, oraz $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{7}x\right)^2 + (3x)^2 = 6^2$ (dla sposobu II),

ALBO

– obliczenie sinusa kąta ABC: $\frac{-3+\sqrt{21}}{8}$ (dla sposobu III).

2 pkt – obliczenie miary kąta BAC: $120°$

ALBO

– zapisanie długości boków trójkąta ACE za pomocą jednej niewiadomej, np. $|AE| = 3x$ oraz $|AC| = 4x$, oraz $|EC| = \sqrt{7}x$,

ALBO

– obliczenie cosinusa kąta ACB: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

1 pkt – zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest miara kąta BAC (lub miara kąta ACB), np. $\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 8$, $\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 8$, $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sin|\sphericalangle BAC| = \frac{6\cdot 4\sqrt{3}}{4\cdot 4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający uzyska $|\sphericalangle BAC| = 60°$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 120°$ i konsekwentnie obliczy długość boku AC dla obu tych wartości kątów, ale w rozwiązaniu nie odrzuci wartości $|AC| = 3+\sqrt{21}$, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 8$$

Stąd $|\sphericalangle BAC| = 60°$ lub $|\sphericalangle BAC| = 120°$.
Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R jest równa $R\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = |BC|$. Niech D będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego BCD wpisanego w dany okrąg. Ponieważ $|AB| = 6$, więc $A \neq D$. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków BD, to wówczas AC byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków CD, to wówczas AB byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Zatem A leży na krótszym z łuków BC okręgu i $|\sphericalangle BAC| = 120°$.
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie cosinusów i obliczamy długość boku AC:

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos|\sphericalangle BAC|$$

$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = |AC|^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot |AC| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|AC|^2 + 6 \cdot |AC| - 12 = 0$$

$$|AC| = -3 + \sqrt{21} \quad \vee \quad |AC| = -3 - \sqrt{21} < 0$$

Zatem $|AC| = -3 + \sqrt{21}$.

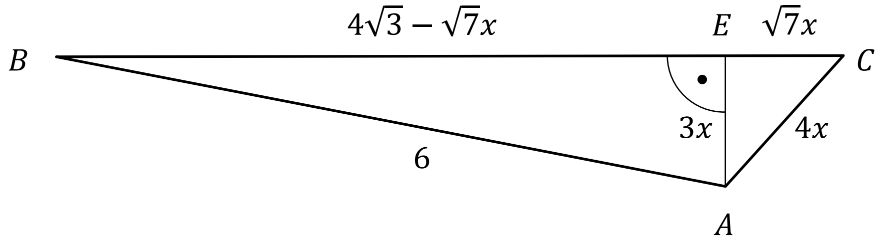
Sposób II

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 8$$

Stąd $\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{3}{4}$.
Niech E będzie spodkiem wysokości poprowadzonej w trójkącie ABC z wierzchołka A na bok BC.
Oznaczmy $|AE| = 3x$. Wtedy $|AC| = 4x$, $|EC| = \sqrt{7}x$, $|BE| = 4\sqrt{3} - \sqrt{7}x$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkąta AEB twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy

$$\left(4\sqrt{3}-\sqrt{7}x\right)^2+(3x)^2=6^2$$

$$16x^2-8\sqrt{21}x+12=0$$

$$4x^2-2\sqrt{21}x+3=0$$

$$x=\frac{2\sqrt{21}-6}{8} \quad \vee \quad x=\frac{2\sqrt{21}+6}{8}$$

$$4x=\sqrt{21}-3 \quad \vee \quad 4x=\sqrt{21}+3$$

Ponieważ $\sqrt{21}+3>7>4\sqrt{3}=|BC|$, więc ostatecznie $|AC|=\sqrt{21}-3$.

<u>Sposób III</u>

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|}=2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|}=8$$

Stąd $|\sphericalangle BAC|=60°$ lub $|\sphericalangle BAC|=120°$.
Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R jest równa $R\sqrt{3}=4\sqrt{3}=|BC|$. Niech D będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego BCD wpisanego w dany okrąg. Ponieważ $|AB|=6$, więc $A\neq D$. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków BD, to wówczas AC byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków CD, to wówczas AB byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Zatem A leży na krótszym z łuków BC okręgu i $|\sphericalangle BAC|=120°$.
Ponownie stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|}=2R$$

$$\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|}=8$$

Stąd $\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{3}{4}$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy

$$\sin^2|\sphericalangle ACB| + \cos^2|\sphericalangle ACB| = 1$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2|\sphericalangle ACB| = 1$$

$$\cos|\sphericalangle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \vee \quad \cos|\sphericalangle ACB| = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ponieważ AB nie jest najdłuższym bokiem trójkąta, więc kąt ACB nie jest rozwarty i dlatego $\cos|\sphericalangle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Obliczamy $\sin|\sphericalangle ABC|$:

$$\sin|\sphericalangle ABC| = \sin(180° - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ACB|) = \sin(|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACB|) =$$

$$= \sin|\sphericalangle BAC| \cdot \cos|\sphericalangle ACB| + \sin|\sphericalangle ACB| \cdot \cos|\sphericalangle BAC| =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3+\sqrt{21}}{8}$$

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = 2R$$

$$|AC| = 2R \cdot \sin|\sphericalangle ABC|$$

$$|AC| = 8 \cdot \frac{-3+\sqrt{21}}{8} = -3 + \sqrt{21}$$

<u>*Uwaga:*</u>

Po obliczeniu $\cos|\sphericalangle ACB|$ można obliczyć $\cos|\sphericalangle ABC|$:

$$\cos|\sphericalangle ABC| = \cos(180° - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ACB|) = -\cos(|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACB|) =$$

$$= -\cos|\sphericalangle BAC| \cdot \cos|\sphericalangle ACB| + \sin|\sphericalangle ACB| \cdot \sin|\sphericalangle BAC| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$$

Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|$$

$$|AC|^2 = 6^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$$

$$|AC| = \sqrt{30 - 6\sqrt{21}}$$

$$|AC| = \sqrt{\left(\sqrt{21} - 3\right)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{21} - 3$$

Zadanie 11. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne […].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{k\pi}{5}$ oraz $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ oraz $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(5x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $\frac{k\pi}{5}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ lub $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równoważne równania do postaci alternatywy dwóch równań trygonometrycznych: $\sin(5x) = 0$ lub $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1 pkt – zastosowanie wzorów na sinus sumy i różnicy kątów i przekształcenie równania do postaci

$\sin(5x)\cos x + \cos(5x)\sin x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x)\cos x - \cos(5x)\sin x = 0$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę sinusów i przekształcenie równania do postaci

$2\sin\frac{6x+4x}{2}\cos\frac{6x-4x}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób I</u>

Stosujemy wzory na sinus sumy oraz różnicy kątów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

$$\sin(5x + x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x - x) = 0$$

$$\sin(5x)\cos x + \cos(5x)\sin x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x)\cos x - \cos(5x)\sin x = 0$$

$$\sin(5x) \cdot \left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Sposób II</u>

Stosujemy wzór na sumę sinusów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

$$2\sin\frac{6x + 4x}{2}\cos\frac{6x - 4x}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$

$$2\sin(5x)\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$

$$\sin(5x) \cdot \left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 12. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 9.1) rozpoznaje w graniastosłupach kąty między odcinkami […]; 9.3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków […], pól powierzchni […].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$.

3 pkt – wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $a\sqrt{2}$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością graniastosłupa), np.

$$(H^2 + a^2) + (H^2 + a^2) - 2 \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \frac{5}{6} = a^2$$

1 pkt – obliczenie cosinusa kąta α: $\frac{5}{6}$

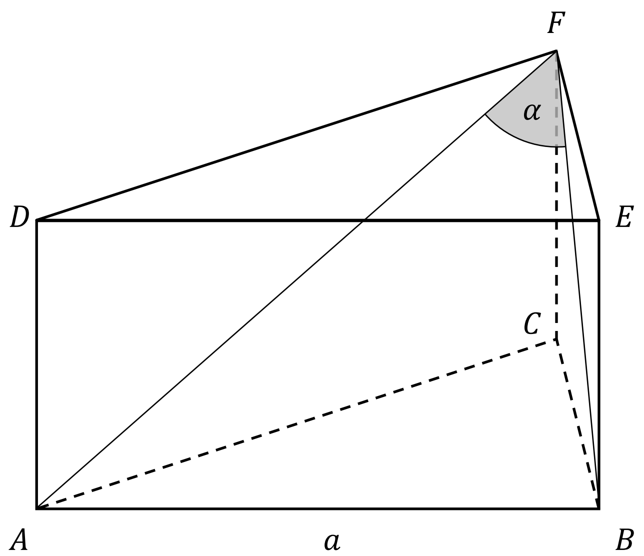
ALBO

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABF i zapisanie równania $|AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos\alpha = a^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Oznaczmy ponadto przez H wysokość graniastosłupa.

Korzystamy z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i obliczamy $\cos\alpha$:

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{36}$$

więc $\cos\alpha = \frac{5}{6}$, gdyż α jest kątem ostrym.

Stosujemy do trójkąta ABF twierdzenie cosinusów, a następnie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy:

$$|AF|^2 + |BF|^2 - 2\cdot|AF|\cdot|BF|\cdot\cos\alpha = a^2$$

$$(H^2+a^2)+(H^2+a^2) - 2\cdot\sqrt{H^2+a^2}\cdot\sqrt{H^2+a^2}\cdot\frac{5}{6} = a^2$$

$$\frac{1}{3}\cdot(H^2+a^2) = a^2$$

$$H = a\sqrt{2}$$

Obliczamy pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa:

$$P = 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot a\cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$$

Zadanie 13. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.R1) oblicza odległość punktu od prostej.

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na obliczeniu współrzędnych punktów A oraz B. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.
Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:
2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A oraz B przecięcia paraboli i prostej $3x + y = 2 = 0$: $A = (-3, 7)$ oraz $B = (2, -8)$.
1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (jedną ze współrzędnych punktu A lub B), które wynika z układu równań $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases}$, np.
$3x + x^2 - 2x - 8 + 2 = 0$, $y = \left(-\frac{y+2}{3}\right)^2 + \frac{2(y+2)}{3} - 8$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Drugi etap polega na obliczeniu współrzędnych punktu C. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C: $C = (6, -2)$.
2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą/drugą współrzędną punktu C), np.

$$\frac{\left|3c + \left(-\frac{1}{2}c + 1\right) + 2\right|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$

1 pkt – uzależnienie drugiej/pierwszej współrzędnej punktu C od pierwszej/drugiej współrzędnej, np. $C = \left(c, -\frac{1}{2}c + 1\right)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na obliczeniu długości boku BC.
Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – obliczenie długości boku BC równoległoboku: $|BC| = 2\sqrt{13}$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Obliczamy współrzędne punktów przecięcia paraboli z prostą o równaniu $3x + y + 2 = 0$:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + x^2 - 2x - 8 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x = -3 \quad \vee \quad x = 2 \end{cases}$$

Stąd $A = (-3\,,7)$ oraz $B = (2\,,-8)$.

Punkt C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią, więc $C = \left(c, -\frac{1}{2}c + 1\right)$ przy pewnym $c > 0$.

Korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\left|3c + \left(-\frac{1}{2}c + 1\right) + 2\right|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{|2{,}5c + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$|2{,}5c + 3| = 18$$

$$c = 6 \quad \vee \quad c = -\frac{42}{5}$$

Zatem $C = (6, -2)$.

Obliczamy długość boku BC:

$$|BC| = \sqrt{(6-2)^2 + (-2+8)^2} = 2\sqrt{13}$$

Zadanie 14. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 3.R1) stosuje wzory Viète'a; 3.R2) rozwiązuje równania […] kwadratowe z parametrem.

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na zapisaniu warunku $\Delta > 0$ w postaci nierówności z niewiadomą m i rozwiązaniu tej nierówności. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku $\Delta > 0$ w postaci nierówności z niewiadomą m i rozwiązanie tej nierówności: $(m+1)^2 + 4\cdot(3-m)\cdot(m+1)^2 > 0$ oraz $m \in (-\infty,-1) \cup \left(-1,\frac{13}{4}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

4 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$: 1, $\frac{-3-2\sqrt{42}}{3}$, $\frac{-3+2\sqrt{42}}{3}$.

3 pkt – zapisanie równania z niewiadomą m w postaci $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2} = 0$ lub $3m^3+3m^2-59m+53=0$ **oraz** wyznaczenie jednego z rozwiązań tego równania (np. $m=1$) i podzielenie wielomianu $3m^3+3m^2-59m+53$ przez odpowiedni dwumian, np. $(3m^3+3m^2-59m+53):(m-1) = 3m^2+6m-53$
ALBO
– zapisanie równania z niewiadomą m w postaci $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2} = 0$ lub $3m^3+3m^2-59m+53=0$ **oraz** zastosowanie metody grupowania i zapisanie wielomianu $3m^3+3m^2-59m+53$ w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopni dodatnich, np. $(m-1)(3m^2+6m-53)$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą m, wynikającego z warunku $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$, np. $\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2\cdot\frac{-(m+1)^2}{3-m} = \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7$.

1 pkt – przekształcenie warunku $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na zapisaniu warunku $3 - m \neq 0$ oraz wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki: $3 - m \neq 0$ i $\Delta > 0$, i $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$.
Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku $3 - m \neq 0$ i poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $3 - m \neq 0$ i $\Delta > 0$, i $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$: 1, $\frac{-3-2\sqrt{42}}{3}$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I etap

Równanie $(3 - m)x^2 + (m + 1)x - (m + 1)^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wtedy, gdy $3 - m \neq 0$ i wyróżnik trójmianu $(3 - m)x^2 + (m + 1)x - (m + 1)^2$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(m + 1)^2 + 4 \cdot (3 - m)(m + 1)^2 > 0$$

$$(m + 1)^2[1 + 4 \cdot (3 - m)] > 0$$

$$(m + 1)^2 \cdot (13 - 4m) > 0$$

$$-4 \cdot (m + 1)^2 \cdot \left(m - \frac{13}{4}\right) > 0$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right)$$

II etap

<u>Sposób I</u>

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$$

$$\left(-\frac{m + 1}{3 - m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m + 1)^2}{3 - m} = \frac{-(m + 1)^2}{3 - m} + 7$$

$$\left(\frac{m + 1}{m - 3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(m + 1)^2}{m - 3} - 7 = 0$$

$$\frac{(m + 1)^2 - 3 \cdot (m + 1)^2(m - 3) - 7(m - 3)^2}{(m - 3)^2} = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 3(m^2 + 2m + 1)(m - 3) - 7(m^2 - 6m + 9) = 0 \ \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53 = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m^3 + 3m - 3m^2 + 3m + 53m - 53 = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m(m^2 - 1) - 3m(m - 1) + 53(m - 1) = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$(m - 1)[-3m(m + 1) - 3m + 53] = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$(m - 1)[-3m^2 - 6m + 53] = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$\left(m = 1 \quad \vee \quad m = \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3} \quad \vee \quad m = \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}\right) \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$m = 1 \quad \vee \quad m = \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3} \quad \vee \quad m = \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}$$

<u>Sposób II</u>

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$$

$$\left(-\frac{m + 1}{3 - m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m + 1)^2}{3 - m} = \frac{-(m + 1)^2}{3 - m} + 7$$

$$\left(\frac{m + 1}{m - 3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(m + 1)^2}{m - 3} - 7 = 0$$

$$\frac{(m + 1)^2 - 3 \cdot (m + 1)^2(m - 3) - 7(m - 3)^2}{(m - 3)^2} = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 3(m^2 + 2m + 1)(m - 3) - 7(m^2 - 6m + 9) = 0 \ \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53 = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

Zauważamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53$. Dzielimy wielomian $-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53$ przez dwumian $m - 1$. Dzielenie to możemy wykonać, korzystając np. z algorytmu Hornera

	-3	-3	59	-53
1	-3	-6	53	0

Otrzymujemy $(m - 1)(-3m^2 - 6m + 53) = 0$. Stąd $m = 1$ lub $m = \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}$, lub $m = \frac{-3+2\sqrt{42}}{3}$.

III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m \neq 3$, które jednocześnie spełniają warunki $m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right)$ oraz $m \in \left\{1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}, \frac{-3+2\sqrt{42}}{3}\right\}$: $m \in \left\{1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}\right\}$.

Zadanie 15. (0–7)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 11.R6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania

Część a)

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie wysokości trapezu w zależności od długości x odcinka łączącego środki ramion trapezu: $|DG| = \sqrt{100 - x^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Część b)

1 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji P: $(0, 10)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Część c)

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja g przyjmuje wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$ i obliczenie wartości największej funkcji P: 50.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja g przyjmuje wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$

ALBO

– przekształcenie nierówności $\sqrt{\frac{x^2+\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2}{2}} \geq \sqrt{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}$ do postaci $50 \geq x \cdot \sqrt{100 - x^2}$ oraz zapisanie, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy liczby x oraz $\sqrt{100 - x^2}$ są równe,

ALBO

– przekształcenie trójmianu $100x^2 - x^4$ do postaci $-(x^2 - 50)^2 + 2500$ i zapisanie, że $g(x) \leq 2500$, **oraz** rozwiązanie równania $x^2 - 50 = 0$ w zbiorze liczb dodatnich: $x = 5\sqrt{2}$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji g: $x = 5\sqrt{2}$

ALBO

– obliczenie wartości x, dla której zachodzi równość średniej kwadratowej i geometrycznej liczb dodatnich x oraz $\sqrt{100 - x^2}$: $x = 5\sqrt{2}$,

ALBO

– przekształcenie nierówności $\sqrt{\frac{x^2+\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2}{2}} \geq \sqrt{x \cdot \sqrt{100-x^2}}$ do postaci $50 \geq x \cdot \sqrt{100-x^2}$,

ALBO

– przekształcenie trójmianu $100x^2 - x^4$ do postaci $-(x^2-50)^2+2500$ i zapisanie, że $g(x) \leq 2500$,

ALBO

– przekształcenie trójmianu $100x^2 - x^4$ do postaci $-(x^2-50)^2+2500$ i rozwiązanie równania $x^2-50=0$ w zbiorze liczb dodatnich: $x=5\sqrt{2}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji g: $g'(x) = 200x - 4x^3$

ALBO

– zapisanie nierówności między średnią kwadratową a geometryczną liczb x oraz $\sqrt{100-x^2}$:

$$\sqrt{\frac{x^2+\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2}{2}} \geq \sqrt{x \cdot \sqrt{100-x^2}}$$

ALBO

– przekształcenie trójmianu $100x^2 - x^4$ do postaci $-(x^2-50)^2+2500$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi do części c):

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości x, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:

– opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji g

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja g ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja g ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

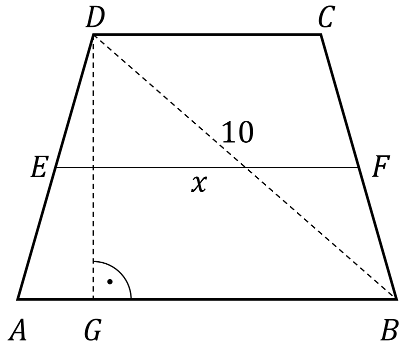
Jeśli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia to za część c) może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej.

Przykładowe pełne rozwiązania

a)

Rozpatrzmy trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD, ramionach AD i BC, w którym każda z przekątnych ma długość 10. Niech DG będzie wysokością trapezu poprowadzoną z wierzchołka D na podstawę AB trapezu. Oznaczmy przez E środek boku AD oraz przez F – środek boku BC (zobacz rysunek). Niech x oznacza długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.



Trapez jest równoramienny, więc $|BG| = |AB| - |AG| = \frac{|AB|+|CD|}{2} = |EF| = x$.
Stosujemy do trójkąta BDG twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy

$$|BG|^2 + |DG|^2 = |BD|^2$$

$$|DG| = \sqrt{|BD|^2 - |BG|^2}$$

$$|DG| = \sqrt{100 - x^2}$$

Zatem pole P trapezu jest równe $P = \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot |DG| = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$.

b)
Ponieważ $|EF| = x > 0$ oraz $|DG| > 0$ i $|DG|^2 = |BD|^2 - |BG|^2 = 100 - x^2$, więc $x > 0$ i $100 - x^2 > 0$. Stąd $x \in (0, 10)$. Dziedziną funkcji P jest zbiór $(0, 10)$.

c)
Sposób I
Przekształcamy wzór funkcji P do postaci $P(x) = \sqrt{100x^2 - x^4}$, gdzie $x \in (0, 10)$.
Obliczamy największą wartość funkcji P.
Ponieważ funkcja $f(t) = \sqrt{t}$ określona dla $t \geq 0$ jest rosnąca, więc funkcja P osiąga wartość największą dla takiego argumentu x, dla którego funkcja $g(x) = 100x^2 - x^4$ określona dla $x \in (0, 10)$ osiąga wartość największą.
Wyznaczamy pochodną funkcji g: $g'(x) = 200x - 4x^3$ dla $x \in (0, 10)$.
Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji g:

$$g'(x) = 0$$

$$200x - 4x^3 = 0$$

$$-4x(x^2 - 50) = 0$$

$$x = 0 \notin (0, 10) \ \lor \ x = -5\sqrt{2} \notin (0,10) \ \lor \ x = 5\sqrt{2} \in (0,10)$$

Badamy znak pochodnej:
$g'(x) < 0$ dla $x \in \left(5\sqrt{2}, 10\right)$
$g'(x) > 0$ dla $x \in \left(0, 5\sqrt{2}\right)$.
Zatem funkcja g jest rosnąca w przedziale $\left(0, 5\sqrt{2}\right\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\left\langle 5\sqrt{2}, 10\right)$.
Stąd dla $x = 5\sqrt{2}$ funkcja g osiąga wartość największą.
Zatem funkcja P osiąga wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$. Wtedy

$$P\left(5\sqrt{2}\right) = \sqrt{100 \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^4} = \sqrt{5000 - 2500} = \sqrt{2500} = 50$$

Spośród rozważanych trapezów największe pole równe 50 ma trapez, w którym odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość $5\sqrt{2}$.

<u>Sposób II</u>
Gdy $x \in (0, 10)$, to liczby x oraz $\sqrt{100 - x^2}$ są dodatnie. Z nierówności między średnią kwadratową a geometryczną liczb dodatnich x i $\sqrt{100 - x^2}$ otrzymujemy:

$$\sqrt{\frac{x^2 + \left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2}{2}} \geq \sqrt{x \cdot \sqrt{100 - x^2}} \qquad /(\quad)^2$$

$$\frac{x^2 + 100 - x^2}{2} \geq x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

$$50 \geq P(x)$$

przy czym równość zachodzi tylko dla tych x, dla których $x = \sqrt{100 - x^2}$ i jednocześnie $x \in (0, 10)$, tj. dla $x = 5\sqrt{2}$.
Zatem funkcja P osiąga wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$ i wtedy

$$P\left(5\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 50$$

Spośród rozważanych trapezów największe pole równe 50 ma trapez, w którym odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość $5\sqrt{2}$.

<u>Sposób III</u>
Przekształcamy wzór funkcji P do postaci $P(x) = \sqrt{100x^2 - x^4}$, gdzie $x \in (0, 10)$.
Obliczamy największą wartość funkcji P.
Ponieważ funkcja $f(t) = \sqrt{t}$ określona dla $t \geq 0$ jest rosnąca, więc funkcja P osiąga wartość największą dla takiego argumentu x, dla którego funkcja $g(x) = 100x^2 - x^4$ określona dla $x \in (0, 10)$ osiąga wartość największą.
Przekształcamy wzór funkcji g:

$$g(x) = 100x^2 - x^4 = -(x^4 - 100x^2 + 2500) + 2500 = -(x^2 - 50)^2 + 2500$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc $g(x) \leq 2500$, przy czym równość zachodzi tylko gdy $x^2 - 50 = 0$ oraz $x \in (0, 10)$, tj. dla $x = 5\sqrt{2}$.
Stąd dla $x = 5\sqrt{2}$ funkcja g osiąga wartość największą.
Zatem funkcja P osiąga wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$. Wtedy

$$P(5\sqrt{2}) = \sqrt{100 \cdot (5\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{2})^4} = \sqrt{5000 - 2500} = \sqrt{2500} = 50$$

Spośród rozważanych trapezów największe pole równe 50 ma trapez, w którym odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość $5\sqrt{2}$.