Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**

Zasady oceniania są zgodne z podstawą programową kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej z 2024 r., https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20240001019/O/D20241019.pdf (dostęp: 20.09.2024).

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi oraz zamiany podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne rozwiązanie: $\log_2 8 = 3,\ 3 \in \mathbb{N}$

2 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci: $\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, przekształcamy wyrażenie:

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

do postaci: $\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$

Po wykonaniu skracania ułamków: $\cancel{\log_2 3} \cdot \frac{\cancel{\log_2 4}}{\cancel{\log_2 3}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 5}}{\cancel{\log_2 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 6}}{\cancel{\log_2 5}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 7}}{\cancel{\log_2 6}} \cdot \frac{\log_2 8}{\cancel{\log_2 7}}$

otrzymujemy: $\log_2 8 = 3,\ 3 \in \mathbb{N}$

Co należało wykazać.

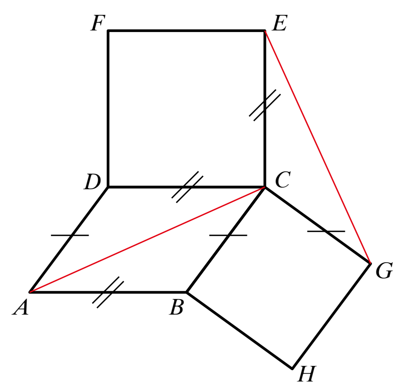
Zadanie 2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

3 pkt – na podstawie cechy przystawania trójkątów stwierdzenie, że $|AC| = |EG|$
2 pkt – wykazanie, że $|\angle ABC| = |\angle ECG|$
1 pkt – stwierdzenie, że $|AB| = |CD| = |CE|$ oraz $|AD| = |BC| = |CG|$
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie



Odcinki $|AB| = |CD| = |CE|$;
$|AD| = |BC| = |CG|$
Ponieważ równoległobok jest trapezem, to suma kątów przy jednym z ramion jest równa 180°:
$|\angle ABC| + |\angle BCD| = 180°$
$|\angle DCE| = |\angle BCG| = 90°$
$|\angle BCG| + |\angle BCD| + |\angle DCE| + |\angle ECG| = 360°$
zatem $|\angle BCD| + |\angle ECG| = 180°$
$|\angle ABC| + |\angle BCD| = |\angle BCD| + |\angle ECG|$
$|\angle ABC| = |\angle ECG|$
Na podstawie cechy przystawania trójkątów *bkb* stwierdzamy, że $\Delta ABC \equiv \Delta CEG$, zatem na podstawie cechy *bbb* także $|AC| = |EG|$.
Co należało wykazać.

Zadanie 3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji; XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i podanie rozwiązania $n = 21$

3 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:
$|\Omega| = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$,
wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A: $|A| = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$, zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n-3}{n-1}$
oraz utworzenie równania wynikającego z treści zadania: $0{,}9 = \frac{n-3}{n-1}$

2 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:
$|\Omega| = C_2^n = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$,
wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A (wzór na liczbę przekątnych wielokąta): $|A| = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$, oraz zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{\cancel{n}\cdot(n-3)}{\cancel{2}}}{\frac{(n-1)\cdot\cancel{n}}{\cancel{2}}} = \frac{n-3}{n-1}$$

1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:
$|\Omega| = C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{\cancel{(n-2)!}\cdot(n-1)\cdot n}{2\cdot\cancel{(n-2)!}} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$ oraz wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A (wzór na liczbę przekątnych wielokąta): $|A| = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:
$$|\Omega| = C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{\cancel{(n-2)!}\cdot(n-1)\cdot n}{2\cdot\cancel{(n-2)!}} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$
Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A (wzór na liczbę przekątnych wielokąta):
$|A| = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$
Wyznaczenie, ze wzoru klasycznej definicji prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwa zdarzenia A:
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{\cancel{n}\cdot(n-3)}{\cancel{2}}}{\frac{(n-1)\cdot\cancel{n}}{\cancel{2}}} = \frac{n-3}{n-1}$$
Utworzenie równania wynikającego z treści zadania:
$0{,}9 = \frac{n-3}{n-1}$
Rozwiązanie równania:
$\frac{9}{10} = \frac{n-3}{n-1}$
$9(n-1) = 10(n-3)$
$9n - 9 = 10n - 30$
$n = 21$
Odpowiedź: Poszukiwany wielokąt ma 21 wierzchołków.

Zadanie 4. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi; XIII.R3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

Zasady oceniania

6 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, podanie wartości współczynników a i b oraz wyznaczenie współrzędnych punktów ekstremalnych

5 pkt – wykonanie czynności za 4 punkty oraz sprawdzenie, czy zachodzi warunek konieczny istnienia ekstremum $f'(x)=0$

4 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P: $y=-10$ i wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=\frac{x^2-6}{x^2}$, obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P: $a=f'(-2)=-\frac{1}{2}$ oraz napisanie równania stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P: $y=-\frac{1}{2}x-11$ i wskazanie wartości współczynnika $b=-11$

3 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P: $y=-10$ i wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f(x)'=\frac{x^2-6}{x^2}$ oraz obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P: $a=f'(-2)=-\frac{1}{2}$

2 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P: $y=-10$ oraz wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f(x)'=\frac{x^2-6}{x^2}$

1 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P: $y=-10$ lub wyznaczenie pochodnej $f(x)'=\frac{x^2-6}{x^2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy drugą współrzędną punktu P: $f(-2)=\frac{(-2)^2-5\cdot(-2)+6}{-2}=\frac{4+10+6}{-2}=\frac{20}{-2}=-10$

$P=(-2;-10)$

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{(2x-5)\cdot x-(x^2-5x+6)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2\cancel{-5x}-x^2\cancel{+5x}-6}{x^2}=\frac{x^2-6}{x^2},\ x\neq 0$$

Równanie stycznej do funkcji w punkcie $P(x_0;f(x_0))$ ma postać: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Obliczamy: $f'(-2)=\frac{(-2)^2-6}{(-2)^2}=\frac{4-6}{4}=-\frac{1}{2}$, $f(x_0)=-10$

Zapisujemy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P: $y-(-10)=-\frac{1}{2}\cdot(x-(-2))$

$y+10=-\frac{1}{2}\cdot(x+2)$

$y=-\frac{1}{2}x-1-10$

$y=-\frac{1}{2}x-11$

Odczytujemy wartości współczynników: $a=-\frac{1}{2}$, $b=-11$

Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $f'(x)=0$:

$\frac{x^2-6}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2-6=0 \Leftrightarrow x_1=-\sqrt{6}$ i $x_2=\sqrt{6}$

Badamy znak pochodnej w otoczeniu punktów podejrzanych o ekstremum (sprawdzamy warunek dostateczny istnienia ekstremum):

dla $x<-\sqrt{6}$ $f'(x)>0$, a dla $0>x>-\sqrt{6}$ $f'(x)<0$, czyli w punkcie $x=-\sqrt{6}$ funkcja ma maksimum lokalne wynoszące: $f\left(-\sqrt{6}\right)=\frac{\left(-\sqrt{6}\right)^2-5\cdot\left(-\sqrt{6}\right)+6}{-\sqrt{6}}=\frac{6+5\sqrt{6}+6}{-\sqrt{6}}=\frac{-30-12\sqrt{6}}{6}=-5-2\sqrt{6}$

dla $0<x<\sqrt{6}$ $f'(x)<0$, a dla $x>\sqrt{6}$ $f'(x)>0$, czyli w punkcie $x=\sqrt{6}$ funkcja ma minimum lokalne wynoszące: $f\left(\sqrt{6}\right)=\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2-5\cdot\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}}=\frac{6-5\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}}=\frac{-30+12\sqrt{6}}{6}=-5+2\sqrt{6}$

Współczynniki stycznej: $a=-\frac{1}{2}$, $b=-11$. Funkcja ma dwa ekstrema:

– maksimum w punkcie $x_1=-\sqrt{6}$ wynoszące: $f\left(-\sqrt{6}\right)=-5-2\sqrt{6}$

– minimum w punkcie $x_2=\sqrt{6}$ wynoszące: $f\left(\sqrt{6}\right)=-5+2\sqrt{6}$

Zadanie 5. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.R) rozwiązuje układy równań liniowych i kwadratowych z dwiema niewiadomymi, które można sprowadzić do równania kwadratowego [...]; VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; VI.5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; VI.6) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i udzielenie poprawnej odpowiedzi uwzględniającej dwa przypadki, pierwszy: $(55, 21, -13)$, drugi: $(25, 21, 17)$

3 pkt – doprowadzenie do równania kwadratowego: $r^2+38r+136=0$ i obliczenie: $r_1=-34$, $r_2=-4$ oraz $x_1=55$, $x_2=25$

2 pkt – utworzenie układu równań: $\begin{cases} x+x+r+x+2r=63 \\ (x+r+15)^2=(x-1)\cdot(x+2r+37) \end{cases}$

1 pkt – wyznaczenie zależności wynikających z treści zadania
$x, x+r, x+2r$ – ciąg arytmetyczny
$x-1, x+r+15, x+2r+37$ – ciąg geometryczny

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczamy x pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, r różnica tego ciągu i zapisujemy zależności wynikające z treści zadania:

$x, x+r, x+2r$ – ciąg arytmetyczny

$x-1, x+r+15, x+2r+37$ – ciąg geometryczny

Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} x+x+r+x+2r=63 \\ (x+r+15)^2=(x-1)\cdot(x+2r+37) \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 3x+3r=63 \quad |:3 \\ x^2+2rx+30x+30r+r^2+225=x^2+2rx+36x-2r-37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+r=21 \\ r^2-6x+32r=-262 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=21-r \\ r^2-6(21-r)+32r=-262 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=21-r \\ r^2+38r+136=0 \end{cases}$$

rozwiązujemy równanie kwadratowe $r^2+38r+136=0$

$\Delta=900 \qquad \sqrt{\Delta}=30$

$r_1=\frac{-38-30}{2}=-34 \quad r_2=\frac{-38+30}{2}=-4$

zatem: $x_1=21+34=55 \quad x_2=21+4=25$

Otrzymaliśmy dwie trójki liczb spełniających warunki zadania: $(55, 21, -13)$ i $(25, 21, 17)$

Zadanie 6. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.R2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych; VII.R3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i podanie rozwiązania: $x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}\right)$

3 pkt – rozwiązanie nierówności $2\cos x-\sqrt{3}<0$

2 pkt – poprawne zapisanie dziedziny wyrażenia: $D=\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right\rangle$ oraz zauważenie, że $\cos^2 x>0$, zatem $2\cos x-\sqrt{3}<0$

1 pkt – poprawne zapisanie dziedziny wyrażenia: $D=\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right\rangle$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę wyrażenia wymiernego $\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{\cos^2 x}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$:

$\cos x=0$ dla $x=\frac{\pi}{2}$ i $x=\frac{3\pi}{2}$, zatem $D=\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right\rangle$

Zauważamy, że $\cos^2 x > 0$, zatem $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$, gdy $2\cos x - \sqrt{3} < 0$.

Rozwiązujemy nierówność $2\cos x - \sqrt{3} < 0$:

$2\cos x < \sqrt{3}$

$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

Otrzymujemy rozwiązanie danej nierówności:

$x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$

Zadanie 7. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych; XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

5 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania; wyznaczenie maksymalnego pola trapezu:

$P\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{4}$

Uwaga: *przy braku dziedziny maksymalnie 4 pkt.*

4 pkt – wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej z ich interpretacją: $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -5 \notin D$;

dla $x_1 = \frac{5}{2}$ funkcja osiąga maksimum

3 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji: $P'(x) = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}$, $x \in \langle 0; 5)$

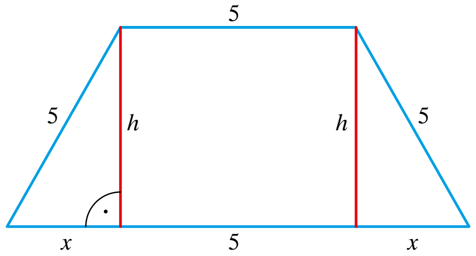
2 pkt – wyznaczenie pola trapezu jako funkcji zmiennej x: $P(x) = (x+5)\cdot\sqrt{25 - x^2}$, $x \in \langle 0; 5)$

1 pkt – wykonanie rysunku pomocniczego z pełnymi oznaczeniami i wyznaczenie długości wysokości trapezu $h = \sqrt{25 - x^2}$, $x \in \langle 0; 5)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Wyznaczamy zakres zmiennej x: $x \in \langle 0; 5)$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy wysokość trapezu:

$h^2 + x^2 = 5^2$

$h^2 = 25 - x^2$

$h = \sqrt{25 - x^2}$

Wyznaczamy wzór na pole trapezu jako funkcję zmiennej x:

$$P(x) = \frac{(5 + 2x + 5)\cdot\sqrt{25 - x^2}}{2} = \frac{2(x + 5)\cdot\sqrt{25 - x^2}}{2} = (x + 5)\cdot\sqrt{25 - x^2},\ x \in \langle 0; 5)$$

Wyznaczamy pochodną funkcji $P(x)$: $P'(x) = (x + 5)'\cdot\sqrt{25 - x^2} + (x + 5)\cdot\left(\sqrt{25 - x^2}\right)'$

$$P'(x) = \sqrt{25 - x^2} + (x + 5)\cdot\frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}}\cdot(-2x) = \sqrt{25 - x^2} - \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Dziedzina pochodnej: $x \in \langle 0; 5)$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej: $P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 5x + 25 = 0$

$2x^2 + 5x - 25 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4\cdot 2\cdot(-25) = 225$

$\sqrt{\Delta} = 15$

$x_1 = \frac{-5 + 15}{2\cdot 2} = \frac{5}{2}$

$x_2 = \frac{-5 - 15}{2\cdot 2} = -5 \notin D$

Dla $x_1 = \frac{5}{2}$ funkcja osiąga maksimum.

Obliczamy pole trapezu dla $x_1 = \frac{5}{2}$: $P\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} + 5\right)\cdot\sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{15}{2}\cdot\sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{15}{2}\cdot\sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$

Zadanie 8. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu.

Zasady oceniania

5 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania; wyznaczenie współrzędnych wierzchołków $B(-2; -7)$ oraz $D(2; 1)$

4 pkt – wyznaczenie równania okręgu opisanego na kwadracie: $x^2 + (y + 3)^2 = 20$

3 pkt – wyznaczenie równania prostej AC: $y=-\frac{1}{2}x-3$ oraz równania prostej BD: $y=2x-3$

2 pkt – wyznaczenie współrzędnych środka okręgu $S(0;-3)$ oraz współrzędnych wierzchołka $C(4;-5)$

1 pkt – zapisanie równania okręgu w postaci kanonicznej: $x^2+(y+3)^2=10$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie okręgu do postaci kanonicznej i odczytujemy współrzędne środka okręgu:

$x^2+y^2+6y+9-9-1=0$

$x^2+(y+3)^2=10$

$S(0;-3)$

Po przeciwnej stronie środka okręgu, który jest równocześnie środkiem kwadratu, od punktu $A(-4;-1)$ leży punkt $C(x;y)$, zatem: $\frac{-4+x}{2}=0$ oraz $\frac{-1+y}{2}=-3$

$x=4$, $y=-5$, czyli $C(4;-5)$

Wyznaczamy równanie prostej AC: $y=ax+b$

$a=\frac{-5+1}{4+4}=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x+b$

$-5=-\frac{1}{2}\cdot 4+b$

$b=-3$

$y=-\frac{1}{2}x-3$

Wyznaczamy równanie prostej BD prostopadłej do prostej AC:

$-\frac{1}{2}\cdot a_2=-1$

$a_2=2$

$y=2x+b$

$-3=2\cdot 0+b$

$b=-3$

$y=2x-3$

Wyznaczamy równanie okręgu opisanego na kwadracie:

$r^2=|SA|^2=(-4)^2+2^2=16+4=20$

$x^2+(y+3)^2=20$

Wyznaczamy współrzędne punktów przecięcia prostej BD z okręgiem opisanym na kwadracie:

$\begin{cases} y=2x-3 \\ x^2+(y+3)^2=20 \end{cases}$

$x^2+(2x\cancel{-3}+\cancel{3})^2=20$

$5x^2=20$

$x^2=4$

$\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1=-7 \\ y_2=1 \end{cases}$

$B(-2;-7)$

$D(2;1)$

Wyznaczone współrzędne wierzchołków kwadratu wynoszą: $B(-2;\ -7)$ oraz $D(2;\ 1)$.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą; III.4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; III.R3) stosuje wzory Viete'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności: wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają określone znaki bądź należą do określonego przedziału, wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania; podanie odpowiedzi: $m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right)$

3 pkt – poprawne wyznaczenie przedziałów spełniających trzy warunki

2 pkt – poprawne wyznaczenie przedziałów spełniających dwa warunki

1 pkt – poprawne wyznaczenie przedziału spełniającego jeden z warunków: $\Delta > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$, $x_1 - x_2 < 3$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Aby równanie kwadratowe miało dwa różne rozwiązania tego samego znaku, muszą być spełnione warunki:

1. $\Delta > 0$

2. $x_1 \cdot x_2 > 0$

3. $x_1 - x_2 < 3$

Ad. 1 $\Delta > 0$

$[2(m+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6m+1) > 0$

$4(m^2 + 2m + 1) - 24m - 4 > 0$

$4m^2 + 8m \cancel{+4} - 24m \cancel{-4} > 0$

$4m^2 - 16m > 0$

$m^2 - 4m > 0$

$m(m-4) > 0$

$m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

Ad. 2 $x_1 \cdot x_2 > 0$

$\frac{6m+1}{1} > 0$

$6m + 1 > 0$

$6m > -1$

$m > -\frac{1}{6}$

$m \in \left(-\frac{1}{6}; \infty\right)$

Ad. 3 $x_1 - x_2 < 3$

$x_1 - x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}+b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a} = -\sqrt{\Delta} = -\sqrt{4m^2-16m}$

$-\sqrt{4m^2-16m} < 3$

$4m^2 - 16m < 9$

$4m^2 - 16m - 9 < 0$

$\Delta = (-16)^2 - 4\cdot 4\cdot(-9) = 400$

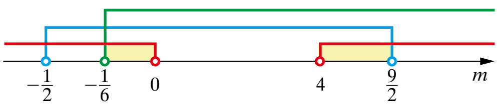
$\sqrt{\Delta} = 20$

$m_1 = \frac{16-20}{8} = -\frac{1}{2}$

$m_2 = \frac{16+20}{8} = \frac{9}{2}$

$m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$

Zatem:



$m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right)$

Zadanie 10. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych; X.R2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{500}{3}$

5 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy a: $a = 10$

4 pkt – wykazanie podobieństwa trójkątów SOC i OCE

3 pkt – wyznaczenie długości odcinka $|EC|$ z trójkąta OCE: $|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

2 pkt – wyznaczenie długości odcinka $|OE|$ z trójkąta EOB: $|OE| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

1 pkt – wyznaczenie długości odcinków $|OB| = |OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

W kwadracie będącym podstawą ostrosłupa oznaczamy $|OB| = |OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ jako połowę długości przekątnej.

Z trójkąta EOB wyznaczamy długość odcinka $|OE|$:

$\text{tg}30° = \frac{|OE|}{|OB|}$

$|OE| = |OB| \cdot \text{tg}30°$

$|OE| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$|OE| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Z trójkąta OCE wyznaczamy długość odcinka $|EC|$:

$|EC|^2 = |OC|^2 - |OE|^2$

$|EC|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2$

$|EC|^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}$

$|EC|^2 = \frac{3a^2}{6} - \frac{a^2}{6}$

$|EC|^2 = \frac{a^2}{3}$

$|EC| = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$

$|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Na podstawie cechy podobieństwa *kkk* stwierdzamy, że $\Delta SOC \sim \Delta OEC$, zatem $\frac{|OS|}{|OE|} = \frac{|OC|}{|EC|}$.
Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$\frac{5}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$

$\frac{30}{a\sqrt{6}} = \frac{3\cancel{a}\sqrt{2}}{2\cancel{a}\sqrt{3}}$

$3a\sqrt{12} = 60\sqrt{3}$

$a = \frac{60\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$

$a = 10$

Obliczamy objętość ostrosłupa:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 5$

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 5$

$V = \frac{500}{3}$

Zadanie 11. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji; XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie liczby dołożonych kul białych: $n=1$ lub $n=8$

5 pkt – określenie prawdopodobieństwa zdarzenia „wylosowano kule o różnych kolorach”, $P(A)=\frac{12n+24}{n^2+15n+56}$

4 pkt – narysowanie drzewka po dodaniu n kul białych

3 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia „wylosowano kule o tych samych kolorach”, $P(B)=\frac{4}{7}$ i stwierdzenie, że $P(B)>P(A)$

2 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia „wylosowano kule o różnych kolorach”, $P(A)=\frac{3}{7}$

1 pkt – narysowanie drzewka doświadczenia losowego

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

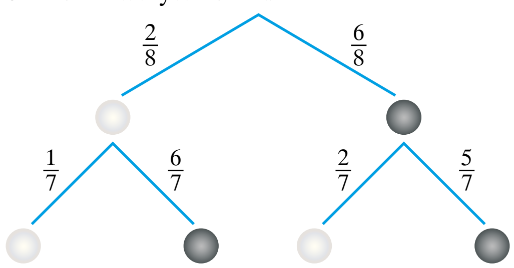
Przykładowe pełne rozwiązanie

Rysujemy drzewko doświadczenia losowego:

2 – liczba kul białych b

6 – liczba kul czarnych c

8 – liczba wszystkich kul



Oznaczamy jako A – wylosowanie kul o różnych kolorach.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A)=\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}+\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{12}{56}+\frac{12}{56}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

Oznaczamy jako B – wylosowanie kul o tych samych kolorach.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B:

$$P(B)=\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2}{56}+\frac{30}{56}=\frac{32}{56}=\frac{4}{7}$$

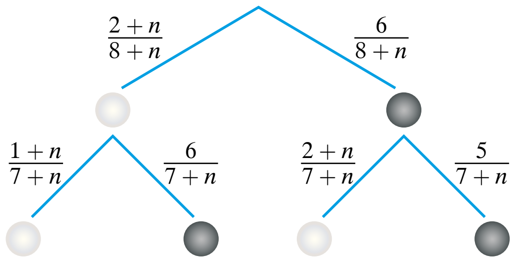
$P(B)>P(A)$

Oznaczamy jako n – liczbę dodanych kul białych.

Rysujemy drzewko doświadczenia losowego po dołożeniu kul białych:

$2+n$ – liczba kul białych b

6 – liczba kul czarnych c
$8+n$ – liczba wszystkich kul



Ponieważ zdarzenia A i B mają być jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi $\frac{1}{2}$.

$P(A)=\frac{2+n}{8+n}\cdot\frac{6}{7+n}+\frac{6}{8+n}\cdot\frac{2+n}{7+n}=\frac{12+6n}{n^2+15n+56}+\frac{12+6n}{n^2+15n+56}=\frac{24+12n}{n^2+15n+56}$

$\frac{24+12n}{n^2+15n+56}=\frac{1}{2}$

$n^2+15n+56=24n+48$

$n^2-9n+8=0$

$\Delta=81-32=49$

$\sqrt{\Delta}=7$

$n_1=\frac{9-7}{2}=1$

$n_2=\frac{9+7}{2}=8$

Należy dołożyć 1 kulę białą lub 8 kul białych.