CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00, MMAU-R0-100
Termin egzaminu:	6 czerwca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: XII.R2) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $0{,}984$.

2 pkt – zapisanie poprawnego prawdopodobieństwa uzyskania co najwyżej jednego sukcesu w dziesięciu próbach Bernoullego, np.

$$P=\binom{10}{0}\cdot(0{,}98)^{10}+\binom{10}{1}\cdot(0{,}02)^{1}\cdot(1-0{,}02)^{9},$$

$$P=(0{,}98)^{10}+10\cdot 0{,}02\cdot(0{,}98)^{9}$$

1 pkt – zapisanie prawdopodobieństwa odniesienia sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej próbie: $p=0{,}02$, $q=0{,}98$

ALBO

– zapisanie prawdopodobieństwa w postaci $q^{10}+10p\cdot q^{9}$, gdzie p jest prawdopodobieństwem odniesienia sukcesu, q – porażki,

ALBO

– przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego wszystkie istotne gałęzie odpowiadające sytuacji wysłania przez sklep dziesięciu pralek, które nie ulegną uszkodzeniu podczas transportu, oraz wszystkie istotne gałęzie odpowiadające sytuacji wysłania przez sklep dziesięciu pralek, z których dokładnie jedna uległa uszkodzeniu podczas transportu,

ALBO

[1]Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

– przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego gałąź odpowiadającą sytuacji uszkodzenia podczas transportu jednej spośród dziesięciu wysłanych pralek **oraz** określenie na każdym odcinku gałęzi prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze poprawne prawdopodobieństwa $P(S_{10}^{0}) = \binom{10}{0} \cdot (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^{10}$ oraz $P(S_{10}^{1}) = \binom{10}{1} \cdot (0{,}02)^1 \cdot (0{,}98)^9$, ale z dalszego rozwiązania nie wynika, że $P = P(S_{10}^{0}) + P(S_{10}^{1})$, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przyjmuje $p = 0{,}2$ oraz $q = 0{,}8$ (albo $p = 0{,}02$ i $q = 0{,}8$) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający przyjmuje $p = 0{,}98$ i $q = 0{,}02$, konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, lecz błędnie interpretuje wynik końcowy, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający nie określi sukcesu w pojedynczej próbie, ale z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje warunki zadania, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sukcesem w pojedynczej próbie Bernoullego jest uszkodzenie pralki podczas transportu.
Określamy prawdopodobieństwo sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej próbie Bernoullego:
$p = 0{,}02$, $q = 1 - p = 0{,}98$.

Niech S_{10}^{k} oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród dziesięciu wysłanych przez sklep pralek dokładnie k pralek uległo uszkodzeniu podczas transportu ($k \in \{0, 1\}$).

Obliczamy prawdopodobieństwo P zdarzenia polegającego na tym, że wśród dziesięciu wysłanych pralek uszkodzeniu podczas transportu ulegnie co najwyżej jedna:

$$P = P(S_{10}^{0}) + P(S_{10}^{1}) = \binom{10}{0} \cdot (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0{,}02)^1 \cdot (0{,}98)^9 =$$

$$= (0{,}98)^9 \cdot (0{,}98 + 10 \cdot 0{,}02) = (0{,}98)^9 \cdot 1{,}18 \approx 0{,}984$$

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania (dla sposobów I-IV)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{\log_{\sqrt{2}} 27 + 2}{2\log_2 14 - 2}$ lub $\log_7 54$, lub obydwu tych wyrażeń do takiej postaci, z której poprzez jednokrotne zastosowanie wzoru na logarytm iloczynu lub logarytm ilorazu, lub wzoru na zamianę podstawy logarytmu, lub wzoru na logarytm potęgi oraz ewentualne kilkukrotne przekształcenie wyrażenia wymiernego można otrzymać tezę

ALBO

– zapisanie jednego równania z a, b oraz niewiadomą x, np. $(a-1)x = \frac{b}{2} + 1$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie liczby 2 w postaci $7^{\frac{1}{a-1}}$ oraz liczby 27 w postaci $2^{\frac{b}{2}}$ (dla sposobu IV).

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu lub na logarytm iloczynu, lub na logarytm ilorazu, np. $\log_7 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 7}$, $\log_7 54 = \frac{\log_{\sqrt{2}} 54}{\log_{\sqrt{2}} 7}$,

$\log_{\sqrt{2}} 27 + 2 = \log_{\sqrt{2}}(27 \cdot 2)$, $2\log_2 14 - 2 = 2\log_2\left(\frac{14}{2}\right)$

ALBO

– zapisanie liczb 7 oraz 27 jako potęg liczby 2: $7 = 2^{a-1}$ i $27 = 2^{\frac{b}{2}}$ **oraz** zapisanie równania $7^x = 54$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie liczby 2 w postaci $7^{\frac{1}{a-1}}$ (dla sposobu IV).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy wyrażenie $\log_7 54$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, a następnie wzory na logarytm iloczynu oraz logarytm ilorazu:

$$\log_7 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 7} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{\frac{\log_{\sqrt{2}} 27}{\log_{\sqrt{2}} 2} + 1}{a-1} = \frac{\frac{b}{2}+1}{a-1} = \frac{b+2}{2a-2}$$

To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy wyrażenie $\frac{b+2}{2a-2}$, korzystając z założenia oraz ze wzoru zamianę podstawy logarytmu:

$$\frac{b+2}{2a-2} = \frac{\log_{\sqrt{2}} 27 + 2}{2\log_2 14 - 2} = \frac{\frac{\log_2 27}{\log_2 \sqrt{2}} + 2}{2\cdot(\log_2 14 - 1)} = \frac{2\cdot(\log_2 27 + 1)}{2\cdot(\log_2 14 - 1)} = \frac{\log_2 27 + 1}{\log_2 14 - 1}$$

Stąd i ze wzorów na sumę logarytmów, różnicę logarytmów oraz wzoru na zamianę podstawy logarytmu otrzymujemy dalej

$$\frac{\log_2 27 + 1}{\log_2 14 - 1} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{\log_2 54}{\log_2 7} = \log_7 54$$

Zatem $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.

To należało wykazać.

Sposób III

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $2^a = 14$ oraz $\left(\sqrt{2}\right)^b = 27$. Stąd $7 = 2^{a-1}$ oraz $27 = 2^{\frac{b}{2}}$.

Oznaczmy przez x liczbę rzeczywistą taką, że $7^x = 54$. Wtedy

$$2^{(a-1)x} = 2\cdot 27$$

$$2^{(a-1)x} = 2\cdot 2^{\frac{b}{2}}$$

$$2^{(a-1)x} = 2^{\frac{b}{2}+1}$$

Stąd

$$(a-1)x = \frac{b}{2} + 1$$

$$x = \frac{b+2}{2(a-1)}$$

Zatem $\log_7 54 = x = \frac{b+2}{2a-2}$.

To należało wykazać.

Sposób IV

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $2^a = 14$ oraz $\left(\sqrt{2}\right)^b = 27$. Stąd $7 = 2^{a-1}$, czyli $2 = 7^{\frac{1}{a-1}}$, oraz $27 = 2^{\frac{b}{2}}$. Zatem

$$54 = 27 \cdot 2 = 2^{\frac{b}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b}{2(a-1)}} \cdot 7^{\frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b}{2(a-1)} + \frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b+2}{2a-2}}$$

czyli $\log_7 54 = \dfrac{b+2}{2a-2}$.

To należało wykazać.

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $368\,586$.

2 pkt – wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 4 (np. $\binom{6}{2}+6$)
oraz zapisanie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 2: 6, **oraz** wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 (np. $9\cdot 10^5-9^6$).

1 pkt – wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 4 (np. $\binom{6}{2}+6$)
oraz zapisanie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 2: 6

ALBO

– wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0, np.:
$9\cdot 10^5-9^6$, $5\cdot 9^5+\binom{5}{2}\cdot 9^4+\binom{5}{3}\cdot 9^3+\binom{5}{4}\cdot 9^2+\binom{5}{5}\cdot 9$, $368\,559$,

ALBO

– wypisanie wszystkich przypadków, dla których iloczyn cyfr będzie liczbą parzystą mniejszą od 5: jedna dwójka i pięć jedynek, dwie dwójki i cztery jedynki, jedna czwórka i pięć jedynek, co najmniej jedno zero.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Iloczyn cyfr liczby naturalnej sześciocyfrowej jest równy 4 tylko wtedy, gdy w zapisie dziesiętnym tej liczby występują:

- dwie dwójki i cztery jedynki,

albo

- jedna czwórka i pięć jedynek.

Liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie dwie dwójki i cztery jedynki jest $\binom{6}{2}=15$.
Liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna czwórka i pięć jedynek jest 6.
Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 4 jest 21.

Iloczyn cyfr liczby naturalnej sześciocyfrowej jest równy 2 tylko wtedy, gdy w zapisie dziesiętnym tej liczby występują jedna dwójka i pięć jedynek.
Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 2 jest 6.

Iloczyn cyfr liczby naturalnej sześciocyfrowej jest równy 0 tylko wtedy, gdy w zapisie dziesiętnym tej liczby występuje na pierwszej pozycji cyfra różna od zera, a na dalszych pozycjach co najmniej jedno zero.
Ponieważ wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych jest $9 \cdot 10^5$, a wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o wszystkich cyfrach różnych od zera jest 9^6, więc wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 jest $9 \cdot 10^5 - 9^6 = 368\,559$.

Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, których iloczyn cyfr jest liczbą parzystą mniejszą od 5 jest $21 + 6 + 368\,559 = 368\,586$.

Uwaga.
Liczbę wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 można obliczyć też w następujący sposób.
Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie jeden raz jest $\binom{5}{1} \cdot 9^5 = 295\,245$.
Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie dwa razy jest $\binom{5}{2} \cdot 9^4 = 65\,610$.
Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie trzy razy jest $\binom{5}{3} \cdot 9^3 = 7\,290$.
Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie cztery razy jest $\binom{5}{4} \cdot 9^2 = 405$.
Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie pięć razy jest $\binom{5}{5} \cdot 9^1 = 9$.
Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 jest

$$295\,245 + 65\,610 + 7\,290 + 405 + 9 = 368\,559$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania (dla sposobów I – III)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie długości odcinka CL (lub LB) w zależności od długości odcinka DM, np. $|CL| = a - \frac{1}{2} \cdot |DM|$, $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ **oraz** uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne (dla sposobu I)

ALBO

– uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne **oraz** zapisanie długości odcinków DE oraz FL za pomocą jednej zmiennej (lub zapisanie związku między nimi), np. $|DE| = 2x$ i $|FL| = \frac{1}{2}x$ (dla sposobu II).

ALBO

– wyznaczenie współrzędnych wierzchołków trapezu $KLMN$ w zależności od a oraz parametru c: $K = \left(\frac{5a-c}{2}, 0\right)$ oraz $L = (2a, c-a)$ oraz $M = (2c - 2a, a)$ oraz $N = (0, 5a - 4c)$ (dla sposobu III).

1 pkt – uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne (dla sposobów I oraz II)

ALBO

– wyznaczenie długości odcinka CL (lub LB) w zależności od długości odcinka DM, np. $|CL| = a - \frac{1}{2} \cdot |DM|$, $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ (dla sposobu I),

ALBO

– zapisanie długości odcinków DE oraz FL za pomocą jednej zmiennej (lub zapisanie związku między nimi), np. $|DE| = 2x$ i $|FL| = x$ (dla sposobu II),

ALBO

– umieszczenie prostokąta $ABCD$ w układzie współrzędnych i zapisanie współrzędnych jego wierzchołków, np. $A = (0, 0)$ i $B = (2a, 0)$ i $C = (2a, a)$ i $D = (0, a)$ **oraz** zapisanie równania prostej ML: $y = -\frac{1}{2}x + c$ (dla sposobu III).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy przez a długość boku AD. Wtedy $|AB| = 2a$.

Kąty DMN i BKL są naprzemianległe oraz $MN \parallel KL$, więc te kąty mają równe miary.
Zatem trójkąty prostokątne MDN i KBL są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów).

Ponieważ $ML \parallel DB$, więc korzystając z twierdzenia Talesa, otrzymujemy

$$\frac{|DM|}{|LB|} = \frac{|MC|}{|LC|}$$

$$\frac{|DM|}{|LB|} = \frac{2a - |DM|}{a - |LB|}$$

$$|DM| \cdot a - |DM| \cdot |LB| = 2 \cdot |LB| \cdot a - |LB| \cdot |DM|$$

$$|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$$

Z warunków zadania wynika, że $MN \perp DB$, więc z rachunku kątów dostajemy $|\sphericalangle DNM| = |\sphericalangle CDB|$, więc trójkąty prostokątne MDN oraz BCD są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Zatem $\frac{|DM|}{|DN|} = \frac{|BC|}{|CD|}$, czyli $\frac{|DM|}{|DN|} = \frac{1}{2}$.

Stąd i ze związku $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ otrzymujemy $|LB| = \frac{1}{4} \cdot |DN|$, co oznacza, że trójkąt MDN jest podobny do trójkąta KBL w skali 4. Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16. To należało wykazać.

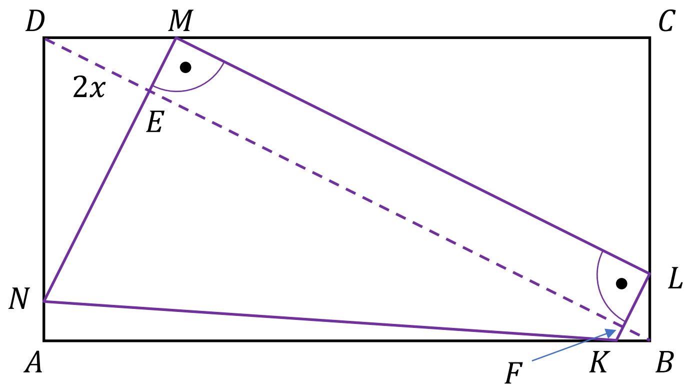
Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

E – punkt przecięcia przekątnej DB z bokiem MN trapezu $KLMN$,

F – punkt przecięcia przekątnej DB z bokiem KL trapezu $KLMN$,

$2x$ – długość odcinka DE (zobacz rysunek).



Ponieważ $ML \parallel DB$, więc trójkąty DEM oraz FBL są prostokątne. Trójkąty prostokątne MDE i BDC mają wspólny kąt ostry, więc są podobne (cecha kkk podobieństwa trójkątów). Zatem $\frac{|ME|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{1}{2}$, więc $|ME| = \frac{1}{2} \cdot |DE| = x$.

Czworokąt $MEFL$ jest prostokątem, więc $|FL| = |ME| = x$.

Z rachunku kątów mamy $|\sphericalangle FLB| = |\sphericalangle MDE|$, więc trójkąty prostokątne MDE i KLB są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Zatem $\frac{|FB|}{|FL|} = \frac{|ME|}{|DE|} = \frac{1}{2}$, czyli $|FB| = \frac{1}{2} \cdot |FL| = \frac{1}{2}x$.

Kąty DMN i BKL są naprzemianległe oraz $MN \parallel KL$, więc te kąty mają równe miary. Zatem trójkąty prostokątne MDN i KBL są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Ponieważ stosunek odpowiednich wysokości tych trójkątów jest równy $\frac{|DE|}{|FB|} = \frac{2x}{\frac{1}{2}x} = 4$, więc trójkąt MDN jest podobny do trójkąta KBL w skali 4.

Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16. To należało wykazać.

Sposób III

Oznaczmy przez a długość boku AD. Wtedy $|AB| = 2a$.

Umieszczamy prostokąt $ABCD$ w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) tak, że $A = (0, 0)$, $B = (2a, 0)$, $C = (2a, a)$, $D = (0, a)$.

Ponieważ stosunek $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ oraz $ML \parallel BD$, więc prosta ML ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + c$, przy pewnym $c \in (a, 2a)$.

Wtedy $M = (2c - 2a, a)$ oraz $L = (2a, c - a)$.

Wyznaczamy równania prostych MN oraz KL, które są prostopadłe do ML:

$$MN\colon\ y = 2(x - 2c + 2a) + a$$

$$KL\colon\ y = 2(x - 2a) + c - a$$

Stąd $N = (0, 5a - 4c)$ oraz $K = \left(\frac{5a-c}{2}, 0\right)$.

Wyznaczamy długości boków trójkątów MDN i KBL:

$$|ND| = |a - (5a - 4c)| = 4 \cdot |c - a|$$

$$|DM| = |2c - 2a - 0| = 2 \cdot |c - a|$$

$$|KB| = \left|2a - \frac{5a - c}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot |c - a|$$

$$|BL| = |c - a - 0| = |c - a|$$

Wyznaczamy stosunek pól trójkątów MDN i KBL:

$$\frac{P_{\Delta MDN}}{P_{\Delta KBL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |ND| \cdot |DM|}{\frac{1}{2} \cdot |KB| \cdot |BL|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |c - a| \cdot 2 \cdot |c - a|}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |c - a| \cdot |c - a|} = 16$$

To należało wykazać.

Zadanie 5. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami […].

Zasady oceniania

4 pkt – spełnienie następujących trzech warunków:

1) poprawne rozwiązanie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$: $m = 2$,
2) poprawne rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   LUB
   wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, dla których $x_1 \neq x_2$: $m \neq 1$,
   LUB
   sprawdzenie, że dla $m = 2$ są spełnione warunki zadania,
3) zapisanie poprawnej odpowiedzi: $m = 2$.

3 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **oraz** zapisanie równania z jedną niewiadomą m, np. $m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$
ALBO
– rozwiązanie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$: $m = 2$,
ALBO
– zapisanie, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$ **oraz** zapisanie równania z jedną niewiadomą m, np. $m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$.

2 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **oraz** przekształcenie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$
ALBO
– zapisanie równania z jedną niewiadomą m, np.

$$m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$$

ALBO
– wyznaczenie pierwiastków trójmianu $x^2 + 2mx + (2m - 1)$: (-1) oraz $1 - 2m$, **oraz** zapisanie, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$.

1 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
ALBO
– przekształcenie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.

$$m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

ALBO
– wyznaczenie pierwiastków trójmianu $x^2 + 2mx + (2m - 1)$: (-1) oraz $1 - 2m$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.
Jeżeli zdający przyjmie, że $x_1^2 + x_2^2$ jest równe $(x_1 + x_2)^2$ oraz doprowadzi rozwiązanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Równanie $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wówczas, gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $x^2 + 2mx + (2m - 1)$ jest dodatni.
Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(2m)^2 - 4 \cdot (2m - 1) > 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 > 0$$

$$4(m - 1)^2 > 0$$

$$m \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Przekształcamy warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskane równanie z niewiadomą m:

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$$

$$4m^3 - 10m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$4m^3 - 8m^2 - 2m^2 + 4m + m - 2 = 0$$

$$4m^2(m - 2) - 2m(m - 2) + (m - 2) = 0$$

$$(m - 2)(4m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m - 2 = 0 \quad \vee \quad 4m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m = 2$$

Ponieważ $4m^2 - 2m + 1 = 3m^2 + (m - 1)^2 > 0$, więc równanie $4m^2 - 2m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.
Zatem warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ jest spełniony tylko dla $m = 2$.
Ponieważ $2 \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, więc warunki zadania są spełnione tylko dla $m = 2$.

Sposób II

Zauważamy, że liczba (-1) jest rozwiązaniem równania $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$.
Korzystając ze wzorów Viète'a, mamy $x_1 + x_2 = -2m$, czyli $-1 + x_2 = -2m$, więc $x_2 = 1 - 2m$. Zatem $x_1 \neq x_2$ gdy $m \neq 1$.
Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których spełniony jest warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$:

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(-1)^2 + (1 - 2m)^2] = 3m \cdot (-1) \cdot (1 - 2m) + 2$$

$$m \cdot (1 + 1 - 4m + 4m^2) = 6m^2 - 3m + 2$$

$$4m^3 - 10m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$4m^3 - 8m^2 - 2m^2 + 4m + m - 2 = 0$$

$$4m^2(m - 2) - 2m(m - 2) + (m - 2) = 0$$

$$(m - 2)(4m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m - 2 = 0 \quad \vee \quad 4m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m = 2$$

Wyróżnik trójmianu $4m^2 - 2m + 1$ jest ujemny, więc równanie $4m^2 - 2m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.
Zatem warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ jest spełniony tylko dla $m = 2$.
Warunki zadania są spełnione tylko dla $m = 2$.

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$, np.:

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz** rozwiązanie równania $\cos(3x) = 0$ w przedziale $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$,

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz** rozwiązanie równania $\cos x + \cos(3x) = 0$ w przedziale $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$,

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz** rozwiązanie równania $\cos(2x) = 0$ w przedziale $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$,

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz** rozwiązanie równania $4\cos^2 x - 2 = 0$ w przedziale $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$,

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz** rozwiązanie równania $2 - 4\sin^2 x = 0$ w przedziale $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

2 pkt – przekształcenie równoważne równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ do postaci alternatywy dwóch równań trygonometrycznych, z których jednym jest $\cos(3x) = 0$, np.:

$\cos(3x) = 0$ lub $2\cos(2x)\cos x = 0$,

$\cos(3x) = 0$ lub $\cos x + \cos(3x) = 0$,

$\cos(3x) = 0$ lub $(4\cos^2 x - 2)\cos x = 0$,

ALBO

– przekształcenie równoważne równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ do postaci alternatywy $\cos(3x) = 0$ lub $\cos(2x) = 0$ lub $\cos x = 0$.

1 pkt – przekształcenie równoważne równania do postaci $2\cos(3x)\cos x + 2\cos^2(3x) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ równoważnie, stosując wzory na cosinus sumy oraz cosinus różnicy argumentów:

$$\cos(3x - x) + 2\cos^2(3x) + \cos(3x + x) = 0$$

$$\cos(3x)\cos x + \sin(3x)\sin x + 2\cos^2(3x) + \cos(3x)\cos x - \sin(3x)\sin x = 0$$

$$2\cos(3x)\,(\cos x + \cos(3x)) = 0$$

$$\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos x + \cos(3x) = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos x + \cos(3x) = 0$$

$$\cos(3x) = -\cos x$$

$$\cos(3x) = \cos(\pi + x)$$

$$3x = \pi + x + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = -\pi - x + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Sposób II

Przekształcamy równanie $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ równoważnie, stosując wzór na sumę cosinusów:

$$2\cos\left(\frac{2x + 4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x - 4x}{2}\right) + 2\cos^2(3x) = 0$$

$$2\cos(3x)\cos(-x) + 2\cos^2(3x) = 0$$

$$2\cos(3x)\,(\cos x + \cos(3x)) = 0$$

$$\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos x + \cos(3x) = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos x + \cos(3x) = 0$$

$$2\cos\left(\frac{x + 3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x - 3x}{2}\right) = 0$$

$$\cos(2x) \cdot \cos(-x) = 0$$

$$\cos(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości jednej z przekątnych czworokąta $ABCD$, np. $d = 7$, $|AC| = \frac{39}{7}$,

ALBO

– obliczenie cosinusa jednego z kątów czworokąta $ABCD$, np. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$, $\cos|\measuredangle ABC| = -\frac{71}{98}$, $\cos|\measuredangle CDA| = \frac{71}{98}$.

2 pkt – zapisanie równań $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2\cdot 3\cdot 8\cdot\cos\alpha$ oraz $d^2 = 3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\alpha$

ALBO

– zapisanie równań $d^2 = 3^2 + 8^2 + 2\cdot 3\cdot 8\cdot\cos\gamma$ oraz $d^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\gamma$,

ALBO

– zapisanie równań $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot\cos|\measuredangle ABC|$ oraz $|AC|^2 = 8^2 + 5^2 + 2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos|\measuredangle ABC|$,

ALBO

– zapisanie równań $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 + 2\cdot 3\cdot 3\cdot\cos|\measuredangle CDA|$ oraz $|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos|\measuredangle CDA|$.

1 pkt – zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2\cdot 3\cdot 8\cdot\cos\alpha$ oraz $\alpha + \gamma = 180^\circ$

ALBO

– zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\gamma$ oraz $\alpha + \gamma = 180^\circ$,

ALBO

– zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2\cdot 3\cdot 8\cdot\cos\alpha$ oraz $d^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\gamma$,

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot\cos|\measuredangle ABC|$ oraz $|\measuredangle ABC| + |\measuredangle CDA| = 180^\circ$,

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos|\measuredangle CDA|$ oraz $|\measuredangle ABC| + |\measuredangle CDA| = 180^\circ$,

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot\cos|\measuredangle ABC|$ oraz $|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos|\measuredangle CDA|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości przekątnej AC: $|AC| = \frac{39}{7}$

ALBO

– obliczenie $\cos\delta$: $\cos\delta = \frac{13}{14}$.

2 pkt – zapisanie równań $e^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot (2\cos^2\delta - 1)$ oraz $\frac{\frac{1}{2}e}{3} = \cos\delta$.

1 pkt – zapisanie związków $e^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos|\sphericalangle ADC|$ oraz $|\sphericalangle ADC| = 2\delta$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości przekątnej AC: $|AC| = \frac{39}{7}$.

2 pkt – zapisanie, że trójkąt ABC' jest równoboczny.

1 pkt – uzasadnienie, że BD jest dwusieczną kąta ADC oraz zapisanie, że C' leży na odcinku AD.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

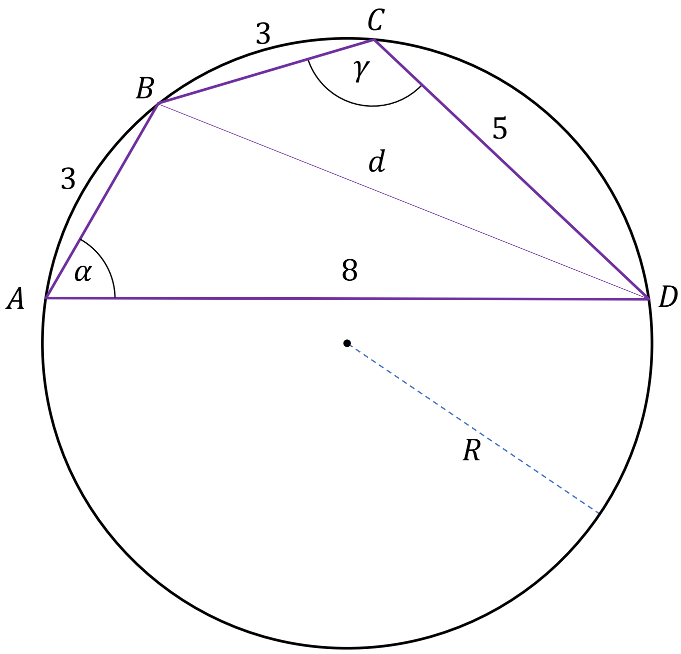
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

d – długość przekątnej BD,

α – miara kąta BAD,

γ – miara kąta BCD.



Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkątów ABD oraz BCD i otrzymujemy

$$d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos\alpha \quad \land \quad d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos\gamma$$

Stąd i z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg mamy

$$73 - 48\cos\alpha = 34 - 30\cos(180° - \alpha)$$

Po zastosowaniu wzorów redukcyjnych otrzymujemy

$$73 - 48\cos\alpha = 34 + 30\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Zatem $\alpha = 60°$ i $d^2 = 73 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 49$, czyli $d = 7$.

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD. Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{d}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

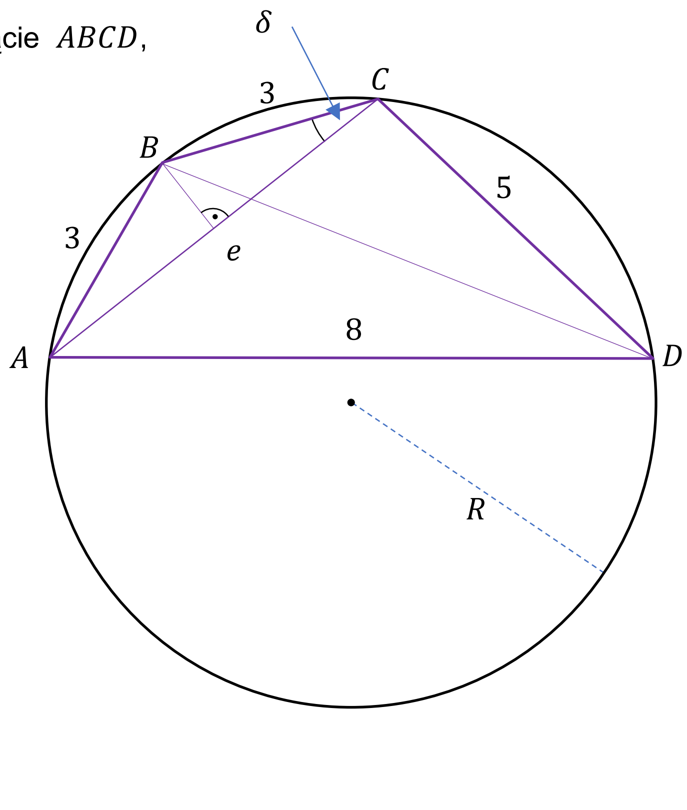
Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

e – długość przekątnej AC,

δ – miara kąta ostrego ACB.



Ponieważ $|AB| = |BC|$, więc $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = \delta$. Kąty wpisane ADB i ACB są oparte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle ADB| = \delta$. Kąty wpisane BAC i BDC są oparte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle BDC| = \delta$.
Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC oraz wzór na cosinus podwojonego argumentu i otrzymujemy:

$$e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(2\delta)$$

$$e^2 = 89 - 80 \cdot (2\cos^2\delta - 1)$$

$$e^2 = 169 - 160\cos^2\delta$$

Z trójkąta równoramiennego ACB otrzymujemy $\frac{\frac{1}{2}e}{3} = \cos\delta$, więc $e = 6\cos\delta$. Zatem

$$(6\cos\delta)^2 = 169 - 160\cos^2\delta$$

$$196\cos^2\delta = 169$$

$$\cos\delta = \frac{13}{14} \quad \vee \quad \cos\delta = -\frac{13}{14}$$

Kąt ACB w trójkącie równoramiennym ABC jest ostry, więc $\cos\delta = \frac{13}{14}$,
czyli $\sin\delta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.
Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

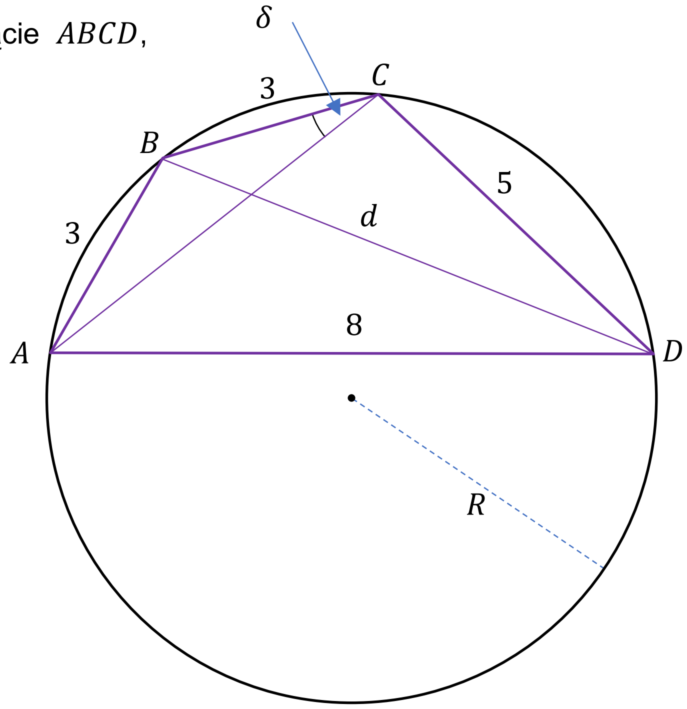
$$\frac{3}{\sin\delta} = 2R$$

$$\frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

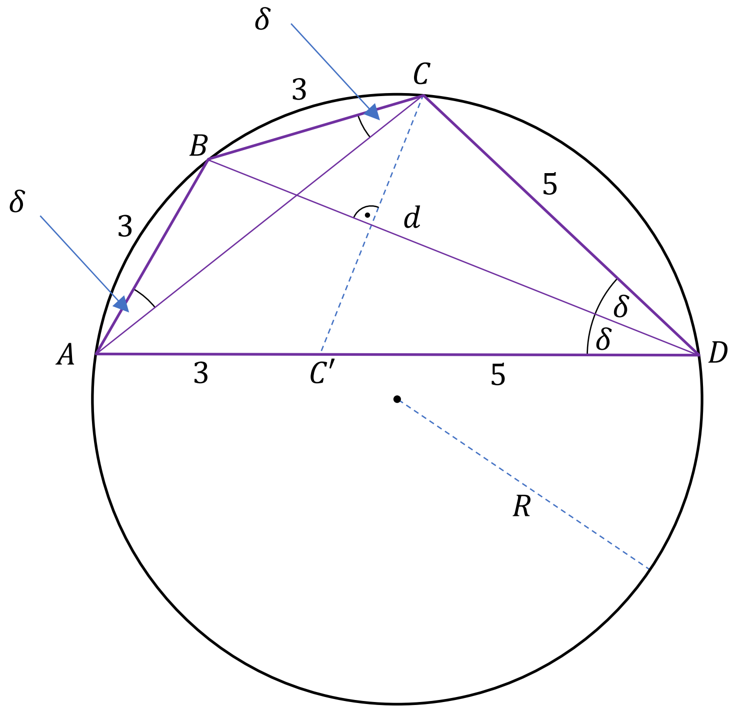
Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,
d – długość przekątnej BD,
δ – miara kąta ostrego ACB.



Ponieważ $|AB| = |BC|$, więc $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = \delta$. Kąty wpisane ADB i ACB są parte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle ADB| = \delta$. Kąty wpisane BAC i BDC są oparte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle BDC| = \delta$. Zatem BD jest dwusieczną kąta ADC.

Niech C' będzie obrazem punktu C w symetrii osiowej względem prostej BD. Wtedy BD będzie zawierać wysokość trójkąta równoramiennego $CC'D$ i $|C'D| = |CD| = 5$, więc C' będzie leżał na odcinku AD.



Zatem czworokąt $BCDC'$ jest deltoidem i $|BC'| = |BC| = 3$.
Ponieważ $|AC'| = |AD| - |DC'| = 8 - 5 = 3$, więc trójkąt ABC' jest równoboczny, czyli $|\sphericalangle BAD| = 60°$.
Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BAD i otrzymujemy:

$$d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60°$$

$$d = 7$$

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD. Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{d}{\sin|\sphericalangle BAD|} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście […] matematycznym […].	Zdający: XIII.R3) […] podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej.

Zasady oceniania (dla sposobów I oraz II)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik niezależny od a, b, c:
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ (lub $f(x) = (x+2)(x^2+x+1)$).

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a, które wynika z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz $f'(-2) = 3$, np. $9 = 1 + a + (4a - 9) + (4a - 10)$ (dla sposobu I)
ALBO
– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema niewiadomymi d oraz e, np. $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$ i $9 = (1+2)(1^2 + d + e)$ (dla sposobu II),
– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema (spośród a, b oraz c) niewiadomymi, które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz z warunku $f'(-2) = 3$, np.
$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 9 - 1^3 - a \cdot 1^2 - b \cdot 1$ oraz
$3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b$.

2 pkt – wyznaczenie (z warunków $f'(-2) = 3$ i $f(-2) = 0$) b oraz c w zależności od a: $b = 4a - 9$ i $c = 4a - 10$ (dla sposobu I)
ALBO
– wyznaczenie (z warunków $f'(-2) = 3$ i $f(1) = 9$) b oraz c w zależności od a: $b = 4a - 9$ i $c = 17 - 5a$ (dla sposobu I),
ALBO
– zapisanie warunku $f(1) = 9$ w postaci równania z dwiema niewiadomymi d oraz e, np. $9 = (1+2)(1^2 + d + e)$ (dla sposobu II),
ALBO
– zapisanie warunku $f'(-2) = 3$ w postaci równania z dwiema niewiadomymi d oraz e, np. $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$ (dla sposobu II),
ALBO
– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi a, b oraz c, które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz $f'(-2) = 3$, np.
$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$ oraz $9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$ oraz
$3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b$,
ALBO
– obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 **oraz** wyznaczenie (z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$) b w zależności od a: $b = a$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 (dla sposobów I oraz II),
ALBO
– zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = (x+2)(x^2 + dx + e)$ (dla sposobu II),
ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z trzema niewiadomymi a, b oraz c, które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$, np.
$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$ oraz $9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik niezależny od a, b, c:
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ (lub $f(x) = (x+2)(x^2 + x + 1)$).

3 pkt – wyznaczenie równania stycznej, np. $g(x) = 3(x+2)$, **oraz** zapisanie związków $h(-2) = 0$ i $h'(-2) = 0$, **oraz** przedstawienie wielomianu h w postaci $h(x) = (x+k)(x+2)^2$
ALBO
– wyznaczenie wzoru wielomianu h, np. $h(x) = (x-1)(x+2)^2$.

2 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 **oraz** zapisanie związków $h(-2) = 0$ i $h'(-2) = 0$
ALBO
– zapisanie związków $h(-2) = 0$ i $h'(-2) = 0$ **oraz** przedstawienie wielomianu h w postaci $h(x) = (x+k)(x+2)^2$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3
ALBO
– zapisanie związków $h(-2) = 0$ oraz $h'(-2) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wzór wielomianu f ma postać $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ przy pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.
Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9-0}{1-(-2)} = 3$.
Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = 3$.
Obliczając pochodną wielomianu f, otrzymujemy $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
Zatem $3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b$. Stąd $b = 4a - 9$.
Ponieważ $f(-2) = 0$, więc $(-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$, czyli

$$-8 + 4a + (4a - 9) \cdot (-2) + c = 0$$

$$c = 4a - 10$$

Ponieważ $f(1) = 9$, więc $9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$, czyli

$$9 = 1 + a + (4a - 9) + (4a - 10)$$

$$a = 3$$

Zatem $b = 4 \cdot 3 - 9 = 3$ oraz $c = 4 \cdot 3 - 10 = 2$.
Wielomian f jest określony wzorem $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

Sposób II

Zapisujemy wzór wielomianu f w postaci $f(x) = (x+2)(x^2+dx+e)$, gdzie $d, e \in \mathbb{R}$.
Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.
Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9-0}{1-(-2)} = 3$.
Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = 3$.
Obliczając pochodną wielomianu f, otrzymujemy

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2+dx+e) + (x+2) \cdot (2x+d)$$

Zatem $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$. Stąd $e = 2d - 1$.
Ponieważ $f(1) = 9$, więc $9 = (1+2)(1^2+d+e)$, czyli

$$9 = 3 \cdot (1 + d + 2d - 1)$$

$$d = 1$$

Zatem $e = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.
Wielomian f jest określony wzorem $f(x) = (x+2)(x^2+x+1)$.

Sposób III

Niech $y = g(x)$ będzie równaniem stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A. Niech h będzie wielomianem trzeciego stopnia określonym następująco: $h(x) = f(x) - g(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
Punkt A leży na wykresach funkcji f oraz g, więc $f(-2) = g(-2)$, czyli $h(-2) = 0$.
Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = g'(-2)$, więc $h'(-2) = f'(-2) - g'(-2) = 0$. Zatem liczba (-2) jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu h, czyli $h(x) = (x+k)(x+2)^2$ przy pewnym $k \in \mathbb{R}$.
Punkt P leży na wykresach funkcji f oraz g, więc $f(1) = 9$ i $g(1) = 9$. Stąd $h(1) = f(1) - g(1) = 0$. Zatem

$$h(1) = (1+k)(1+2)^2$$

$$0 = (1+k) \cdot 9$$

$$k = -1$$

czyli $h(x) = (x-1)(x+2)^2$.
Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.
Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9-0}{1-(-2)} = 3$. Zatem $g(x) = 3(x+2)$.
Wyznaczamy wzór funkcji f:

$$f(x) = h(x) + g(x) = (x-1)(x+2)^2 + 3(x+2) = (x+2)(x^2+2x-x-2+3) =$$

$$= (x+2)(x^2+x+1)$$

Zadanie 9. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{245}{4}$.

4 pkt – obliczenie b_1 oraz q: $b_1 = 35$ oraz $q = \frac{3}{7}$.

3 pkt – obliczenie różnicy ciągu (a_n): $r = 4$ **oraz** odrzucenie przypadku $r = -5$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r (albo a_1), np.

$$15 + 9r = (15 - 3r)(15 + 2r - 6),$$

$$a_1 + 14 \cdot \frac{15 - a_1}{5} = \left(a_1 + 2 \cdot \frac{15 - a_1}{5}\right) \cdot \left(a_1 + 7 \cdot \frac{15 - a_1}{5} - 6\right).$$

1 pkt – zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi a_1 oraz r, np.

$$a_1 + 14r = (a_1 + 2r) \cdot (a_1 + 7r - 6) \text{ i } a_1 + 5r = 15.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Zdający może odrzucić otrzymaną wartość $r = -5$ bez komentarza.

2. Jeżeli zdający nie odrzuci wartości $q = -\frac{3}{2}$ i zastosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego dla $q = -\frac{3}{2}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za zapisanie układu równań, 1 punkt za zapisanie równania z jedną niewiadomą, 1 punkt za obliczenie $q = \frac{3}{7}$ oraz sumy dla $q = \frac{3}{7}$).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), natomiast przez q – iloraz ciągu geometrycznego (b_n).

Ponieważ $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$, więc stąd i z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_6 + 9r = (a_6 - 3r) \cdot (a_6 + 2r - 6)$$

$$15 + 9r = (15 - 3r)(15 + 2r - 6)$$

$$15 + 9r = (15 - 3r)(2r + 9)$$

$$6r^2 + 6r - 120 = 0$$

$$r^2 + r - 20 = 0$$

$$r = -5 \quad \vee \quad r = 4$$

Ciąg (a_n) jest rosnący, więc $r = 4$.

Zatem $b_1 = a_6 + 5r = 15 + 5 \cdot 4 = 35$, $b_2 = 15$ oraz $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{7}$.

Ponieważ $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$, więc suma S wszystkich wyrazów ciągu (b_n) istnieje i jest równa

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{35}{1-\frac{3}{7}} = \frac{245}{4}$$

Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola graniastosłupów, ostrosłupów […]. X.R2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych […].

Zasady oceniania (dla sposobów I – III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 6.

4 pkt – wyznaczenie w zależności od x czterech spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– wyznaczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa w zależności od x: $126\sqrt{3}x^2$.

3 pkt – wyznaczenie w zależności od x trzech spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

2 pkt – wyznaczenie w zależności od x dwóch spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

1 pkt – wyznaczenie w zależności od x jednej z poniższych wielkości 1)-4):

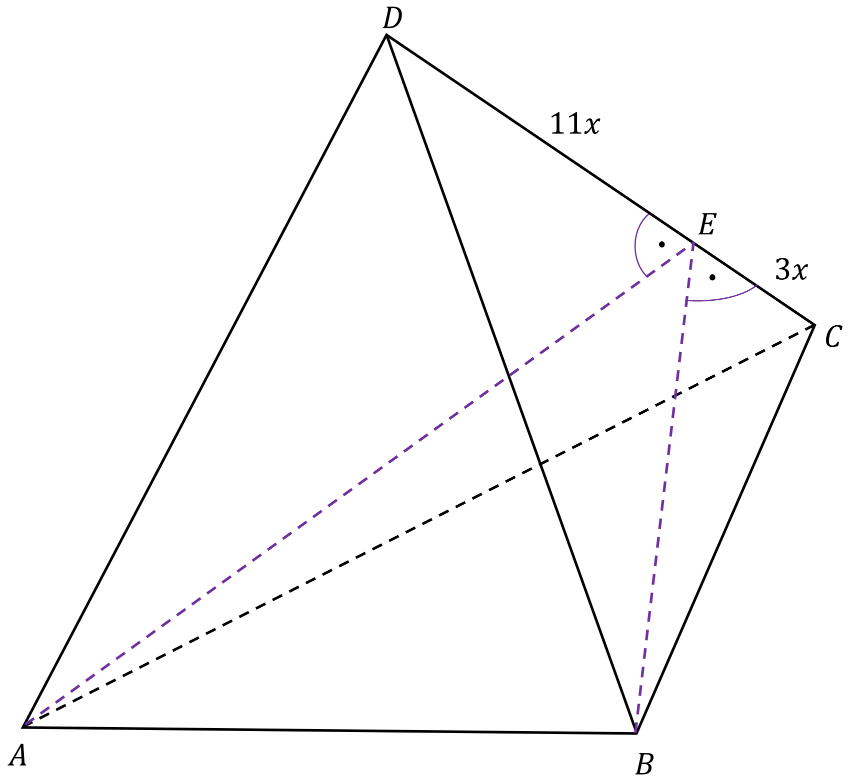
1) długości wysokości ściany bocznej, np. $|BE| = 5\sqrt{3}x$, $|DF| = 5\sqrt{7}x$,
2) długości krawędzi podstawy ABC: $|BC| = 2\sqrt{21}x$,
3) pola podstawy ABC: $21\sqrt{3}x^2$,
4) pola ściany bocznej (lub pola powierzchni bocznej): $35\sqrt{3}x^2$ (lub $105\sqrt{3}x^2$).

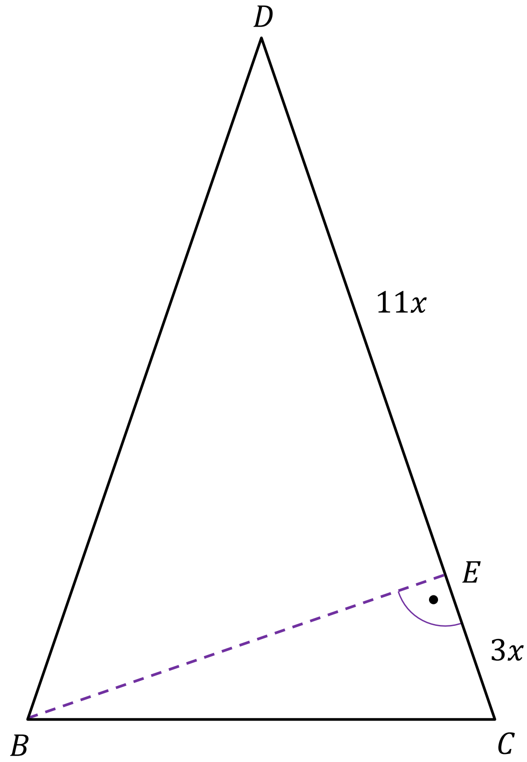
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$ (zobacz rysunki).





Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BED i otrzymujemy:

$$|BE|^2 + |ED|^2 = |BD|^2$$

$$|BE|^2 + (11x)^2 = (14x)^2$$

$$|BE| = 5\sqrt{3}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BCE i otrzymujemy:

$$|BC|^2 = |CE|^2 + |BE|^2$$

$$|BC|^2 = (3x)^2 + \left(5\sqrt{3}x\right)^2$$

$$|BC| = 2\sqrt{21}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |BE| = \frac{3}{2} \cdot 14x \cdot 5\sqrt{3}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC:

$$P_p = \frac{|BC|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(2\sqrt{21}x\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

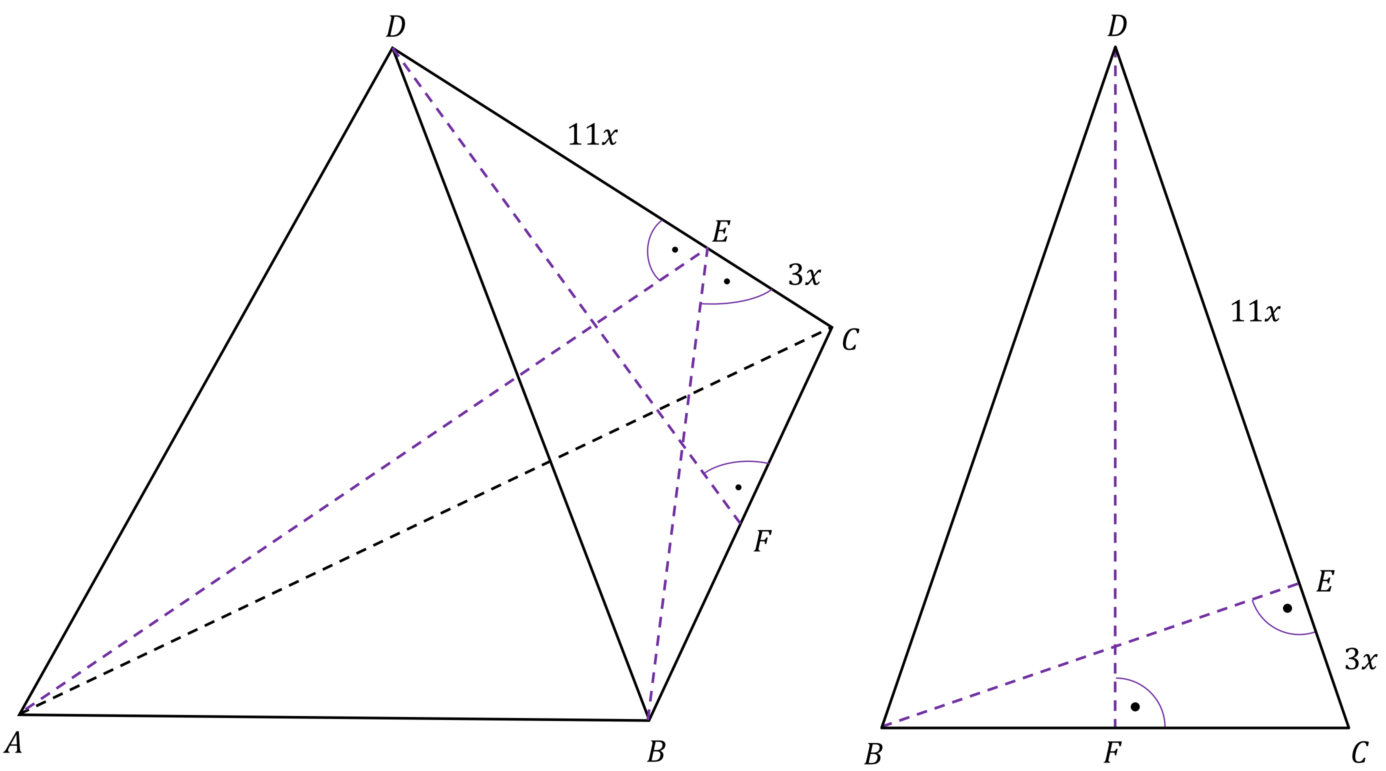
Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Sposób II

Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$.

Niech F będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCD poprowadzonej z wierzchołka D na krawędź BC (zobacz rysunki).



Z podobieństwa trójkątów prostokątnych CEB oraz CFD otrzymujemy:

$$\frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|FC|}{|CD|}$$

$$\frac{3x}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BC|}{14x}$$

$$|BC| = 2\sqrt{21}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CDF i otrzymujemy:

$$|CD|^2 = |DF|^2 + |FC|^2$$

$$(14x)^2 = |DF|^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21}x\right)^2$$

$$|DF| = 5\sqrt{7}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DF| = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{21}x \cdot 5\sqrt{7}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC:

$$P_p = \frac{|BC|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(2\sqrt{21}x\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

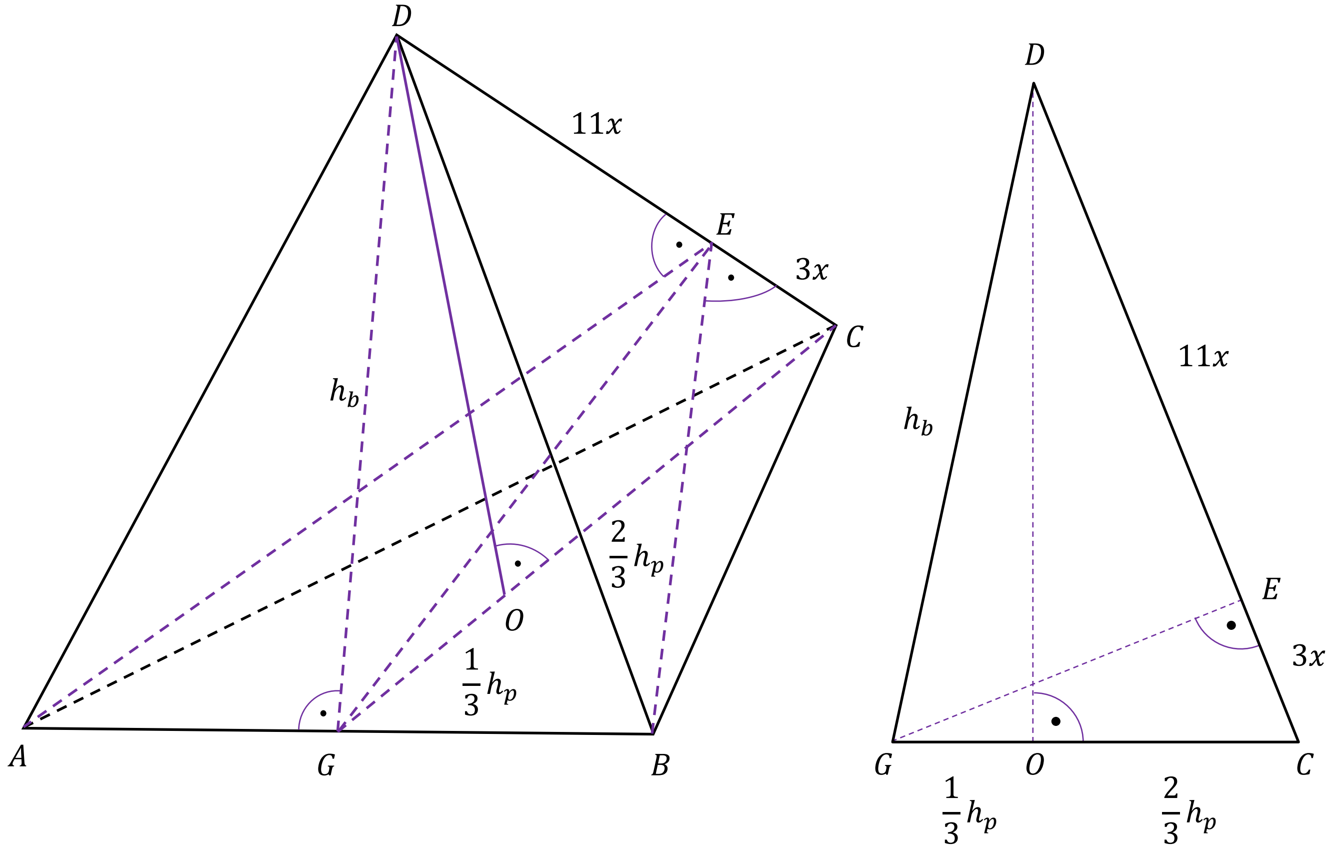
Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

O – spodek wysokości ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka D na podstawę ABC,
G – środek krawędzi AB,
a – długość krawędzi podstawy ABC,
h_b – wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka D,
h_p – wysokość podstawy ABC (zobacz rysunki).



Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$.

Ostrosłup jest prawidłowy, więc punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC i jest jednocześnie środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Zatem $|OC| = \frac{2}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz $|OG| = \frac{1}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Z podobieństwa trójkątów DOC i GEC mamy

$$\frac{|EC|}{|GC|} = \frac{|OC|}{|DC|}$$

$$\frac{3x}{h_p} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{14x}$$

$$\frac{3x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{14x}$$

$$a = 2\sqrt{21}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta GBD i otrzymujemy:

$$|BD|^2 = |DG|^2 + |GB|^2$$

$$(14x)^2 = h_b^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{21}x\right)^2$$

$$h_b = 5\sqrt{7}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{21}x \cdot 5\sqrt{7}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC:

$$P_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(2\sqrt{21}x\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Zadanie 11. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu; IX.R4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej i prostej stycznej do zadanego okręgu. VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach.

Zasady oceniania (dla *sposobów I–III*)

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(x+1)^2+(y+2)^2=5$.

5 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – pierwszą lub drugą współrzędną punktu S, np.:

$$\left[x_S-\left(\frac{3}{5}x_S+\frac{8}{5}\right)\right]^2+\left[-x_S-3-\left(-\frac{6}{5}x_S-\frac{11}{5}\right)\right]^2=x_S^2+(-x_S-3)^2$$

(ze związków $r=|ST|$ oraz $r=|SO|$),

$$(x_S-4)^2+\left(-x_S-3-(-7)\right)^2=$$
$$=\left(\frac{3}{5}x_S+\frac{8}{5}-4\right)^2+\left(-\frac{6}{5}x_S-\frac{11}{5}-(-7)\right)^2+x_S^2+(-x_S-3)^2$$

(ze związków $|BS|^2=|BT|^2+r^2$ oraz $r=|SO|$).

4 pkt – wyznaczenie równania dwusiecznej kąta ABC równoległoboku: $y=-x-3$

ALBO

– zapisanie współrzędnych środka S za pomocą jednej niewiadomej, np. $S=(x_S\,,-x_S-3)$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu E: $E=(-2,5)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych takich punktów P_1 oraz P_2, że P_1 leży na półprostej $\overrightarrow{BA}$ oraz P_2 leży na półprostej $\overrightarrow{BC}$ oraz $|BP_1|=|BP_2|$,

ALBO

– obliczenie tangensa kąta α: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie związku $\frac{\left|\frac{1}{2}x_S+y_S+5\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{|2x_S+y_S-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ (dla sposobu III).

2 pkt – wyznaczenie równania prostej BC oraz obliczenie długości odcinka AB:

$y=-2x+1$ oraz $|AB|=\sqrt{180}$

ALBO

– wyznaczenie równania prostej AB oraz obliczenie długości odcinka BC:
$y = -\frac{1}{2}x - 5$ oraz $|BC| = \sqrt{75}$,
ALBO
– obliczenie współczynników kierunkowych prostych AB oraz BC: $a_{AB} = -\frac{1}{2}$ oraz $a_{BC} = -2$ (dla sposobu II),
ALBO
– wyznaczenie równań prostych AB oraz BC, np. $y = -\frac{1}{2}x - 5$ oraz $y = -2x + 1$ (dla sposobu III).

1 pkt – obliczenie współrzędnych wierzchołka B: $B = (4, -7)$
ALBO
– obliczenie współrzędnych wierzchołka C: $C = (-1, 3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez trójkąt równoramienny)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku. Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD. Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B:

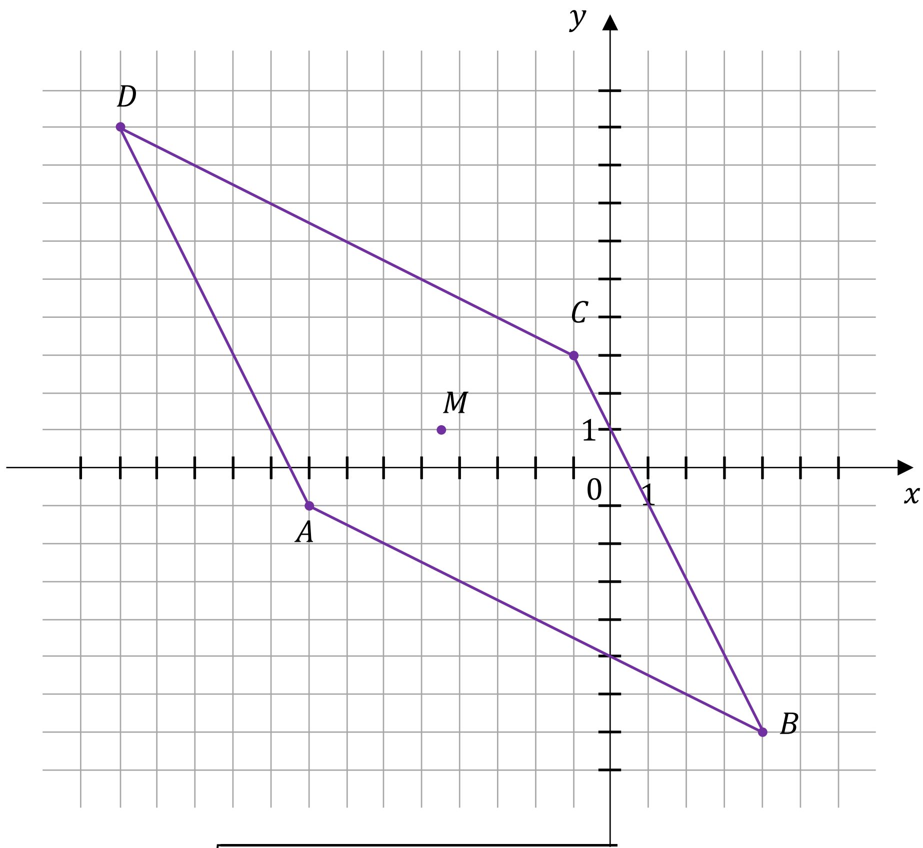
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \quad \land \quad \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C:

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \quad \land \quad \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Obliczamy $|AB|$: $|AB| = \sqrt{\left(4-(-8)\right)^2 + \left(-7-(-1)\right)^2} = \sqrt{180}$.

Wyznaczamy równanie prostej BC: $y = \frac{3-(-7)}{-1-4} \cdot (x-4) + (-7)$, czyli $y = -2x + 1$.

Niech E będzie punktem na boku BC równoległoboku (lub na przedłużeniu tego boku w stronę C) takim, że $|BE| = |BA|$. Obliczamy współrzędne punktu E:

$$(x-4)^2 + (y+7)^2 = 180 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$(x-4)^2 + (-2x+7+1)^2 = 180 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$5x^2 - 40x - 100 = 0 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$(x,y) = (-2,5) \quad \vee \quad (x,y) = (10,-19)$$

Punkt $(10,-19)$ nie spełnia warunku narzuconego na E (bowiem $10 > x_B$), więc $E = (-2,5)$.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostych AB oraz BC, więc jego środek S leży na dwusiecznej kąta ABC równoległoboku $ABCD$. Ponieważ trójkąt ABE jest równoramienny, więc środek F odcinka AE leży na prostej BS i odcinek AE jest prostopadły do prostej BS.

Obliczamy współrzędne punktu F:

$$x_F = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{-8 - 2}{2} = -5 \quad \wedge \quad y_F = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

Wyznaczamy równanie prostej BS: $y = \frac{-7-2}{4-(-5)} \cdot (x-4) + (-7)$, czyli $y = -x - 3$.
Zatem $S = (x_S, -x_S - 3)$.
Niech T będzie punktem styczności okręgu $\mathcal{O}$ z prostą BC.
Wyznaczamy równanie prostej ST: $y = \frac{1}{2} \cdot (x - x_S) + (-x_S - 3)$.
Wyznaczamy współrzędne punktu T:

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x - x_S) + (-x_S - 3) \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$-2x + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x_S - 3 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$x = \frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} \quad \wedge \quad y = -\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}$$

czyli $T = \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5}, -\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}\right)$.
Oznaczmy przez r promień okręgu $\mathcal{O}$. Ponieważ okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$. Jednocześnie

$$r = |ST| = \sqrt{\left[x_S - \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5}\right)\right]^2 + \left[-x_S - 3 - \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}\right)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}x_S - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}x_S - \frac{4}{5}\right)^2}$$

więc

$$x_S^2 + (-x_S - 3)^2 = \left(\frac{2}{5}x_S - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}x_S - \frac{4}{5}\right)^2$$

Stąd otrzymujemy

$$x_S^2 + (x_S + 3)^2 = \frac{4}{25}(x_S - 4)^2 + \frac{1}{25}(x_S - 4)^2$$

$$2x_S^2 + 6x_S + 9 = \frac{1}{5}(x_S - 4)^2$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \quad \vee \quad x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punku S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli $S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.
Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Sposób II (poprzez współczynniki kierunkowe)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku. Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD. Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B:

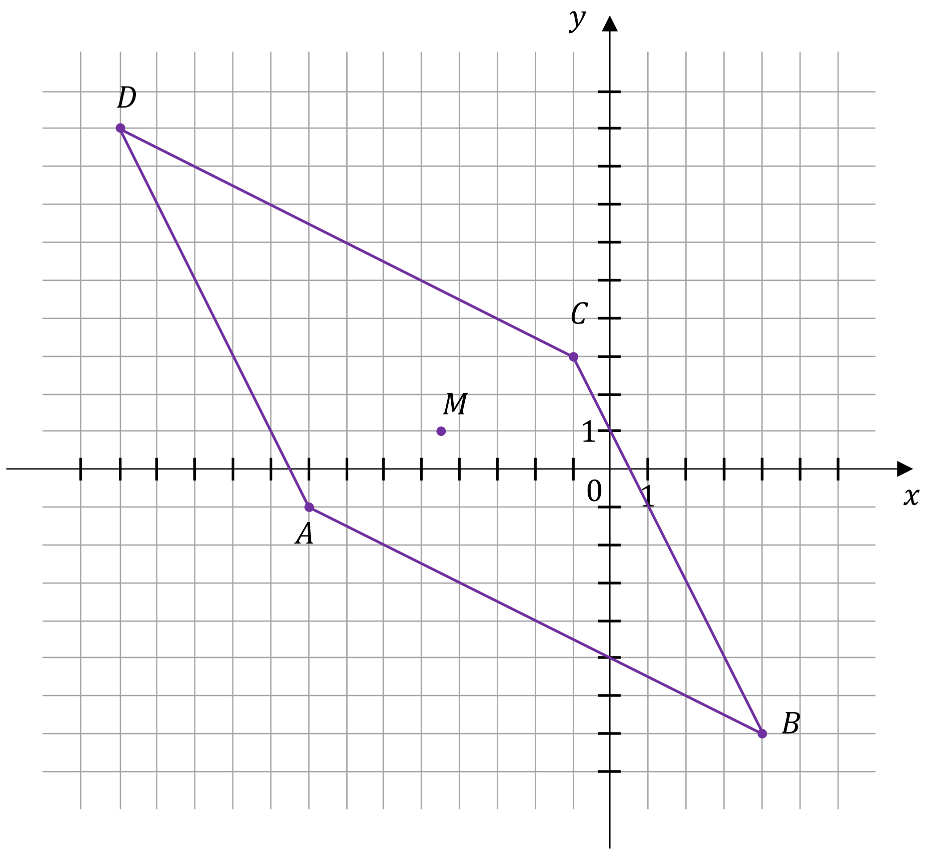
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \quad \wedge \quad \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C:

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \quad \wedge \quad \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{AB} prostej AB: $a_{AB} = \frac{-7-(-1)}{4-(-8)} = -\frac{1}{2}$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{BC} prostej BC: $a_{BC} = \frac{3-(-7)}{-1-4} = -2$.

Oznaczmy miarę kąta ABC równoległoboku przez 2α. Obliczamy tangens tego kąta, korzystając z interpretacji geometrycznej współczynnika kierunkowego prostej oraz wzoru na tangens różnicy kątów:

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{a_{AB} - a_{BC}}{1 + a_{AB} \cdot a_{BC}}$$

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{-\frac{1}{2} - (-2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)} = \frac{3}{4}$$

Korzystamy ze wzoru na tangens podwojonego kąta i otrzymujemy

$$\frac{3}{4} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

$$3\mathrm{tg}^2\,\alpha + 8\,\mathrm{tg}\,\alpha - 3 = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-8 - 10}{6} = -3 \quad \vee \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-8 + 10}{6} = \frac{1}{3}$$

Ponieważ kąt ABC równoległobku jest ostry, więc $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$.
Oznaczmy środek okręgu $\mathcal{O}$ przez S. Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{BS} prostej BS, korzystając z interpretacji geometrycznej współczynnika kierunkowego prostej oraz wzoru na tangens sumy kątów:

$$a_{BS} = \frac{a_{BC} + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - a_{BC} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}$$

$$a_{BS} = \frac{-2 + \frac{1}{3}}{1 - (-2) \cdot \frac{1}{3}} = -1$$

Wyznaczamy równanie prostej BS: $y = -1 \cdot (x - 4) + (-7)$, czyli $y = -x - 3$. Zatem $S = (x_S\,, -x_S - 3)$.
Niech r będzie długością promienia okręgu $\mathcal{O}$. Ponieważ okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$. Ponadto

$$\frac{r}{|BS|} = \sin\alpha$$

więc

$$\frac{r}{|BS|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$|BS|^2 = r^2 \cdot 10$$

$$(x_S - 4)^2 + \left(-x_S - 3 - (-7)\right)^2 = r^2 \cdot 10$$

$$(x_S - 4)^2 + (-x_S + 4)^2 = [x_S^2 + (-x_S - 3)^2] \cdot 10$$

$$18x_S^2 + 76x_S + 58 = 0$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \quad \vee \quad x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punku S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli $S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.
Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Sposób III (z własności dwusiecznej)
Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku. Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD. Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B:

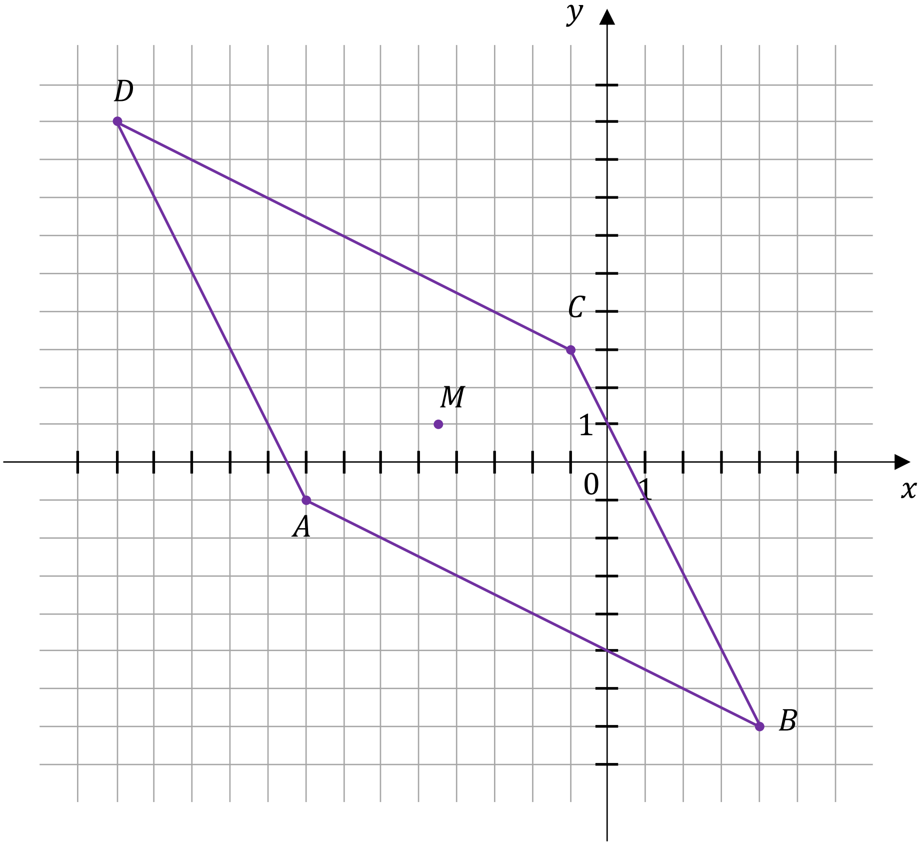
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \quad \wedge \quad \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C:

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \quad \wedge \quad \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Wyznaczamy równanie prostej AB: $y = \frac{-7-(-1)}{4-(-8)} \cdot (x+8) + (-1)$, czyli $y = -\frac{1}{2}x - 5$.

Wyznaczamy równanie prostej BC: $y = \frac{3-(-7)}{-1-4} \cdot (x-4) + (-7)$, czyli $y = -2x + 1$.

Niech $S = (x_S, y_S)$ będzie środkiem okręgu $\mathcal{O}$, a r – długością promienia okręgu $\mathcal{O}$. Punkt S leży na dwusiecznej kąta ABC równoległoboku $ABCD$, więc odległość punktu S od prostej AB jest równa odległości punktu S od prostej BC. Zatem

$$\frac{\left|\frac{1}{2}x_S + y_S + 5\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$|x_S + 2y_S + 10| = |2x_S + y_S - 1|$$

$$x_S + 2y_S + 10 = 2x_S + y_S - 1 \quad \vee \quad x_S + 2y_S + 10 = -2x_S - y_S + 1$$

$$y_S = x_S - 11 \quad \vee \quad y_S = -x_S - 3$$

Ponieważ punkt $(0,0)$ leży w równoległoboku $ABCD$, a prosta $y = x - 11$ ma tylko jeden punkt wspólny z równoległobokiem, więc dwusieczna kąta ABC ma równanie $y = -x - 3$. Stąd $y_S = -x_S - 3$ oraz

$$r = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S - x_S - 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_S - 4|}{\sqrt{5}}$$

Okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$.
Wobec powyższego otrzymujemy

$$\sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2} = \frac{|x_S - 4|}{\sqrt{5}}$$

$$x_S^2 + (x_s + 3)^2 = \frac{(x_S - 4)^2}{5}$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \quad \vee \quad x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punku S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli $S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.
Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie wysokości graniastosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy graniastosłupa, np. $H = \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych graniastosłupów. Oznaczmy przez H jego wysokość. Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe $24\sqrt{3}$, więc

$$24\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3aH$$

Stąd

$$H = \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a}$$

Zatem objętość V graniastosłupa jest równa

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a} = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

To należało wykazać.

Zadanie 12.2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu […]; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $a = 4$ oraz obliczenie $V(4) = 16$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $a = 4$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V: $a = 4$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V, np. $V'(a) = 6 - \frac{3}{8}a^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość największą dla wyznaczonej wartości a, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej
ORAZ:
– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.

2. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej, 1 punkt za obliczenie długości krawędzi podstawy oraz objętości graniastosłupa o największej objętości).

3. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia największej wartości funkcji, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy argument, dla którego funkcja V określona wzorem $V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$ dla $a \in \left(0, 4\sqrt{3}\right)$ osiąga wartość największą.

Wyznaczamy pochodną funkcji V: $V'(a) = 6 - \frac{3}{8}a^2$ dla $a \in \left(0, 4\sqrt{3}\right)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V:

$$V'(a) = 0$$

$$6 - \frac{3}{8}a^2 = 0$$

$$a = -4 \notin \left(0, 4\sqrt{3}\right) \quad \vee \quad a = 4 \in \left(0, 4\sqrt{3}\right)$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(a) < 0$$

$$6 - \frac{3}{8}a^2 < 0 \quad \wedge \quad a \in \left(0, 4\sqrt{3}\right)$$

$$a \in \left(4, 4\sqrt{3}\right)$$

więc $V'(a) < 0$ dla $a \in \left(4, 4\sqrt{3}\right)$ oraz $V'(h) > 0$ dla $a \in (0, 4)$.

Zatem funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0, 4]$ i malejąca w przedziale $[4, 4\sqrt{3})$.

Stąd funkcja V osiąga wartość największą dla $a = 4$. Wtedy

$$V(4) = 6 \cdot 4 - \frac{1}{8} \cdot 4^3 = 16$$