

Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	15 kwietnia 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	16 kwietnia 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: III.R1) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ oraz nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie poprawnej odpowiedzi:

$$x \in (-\infty, -1] \cup \{1\} \text{ oraz } 1$$

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności oraz wynik: $x \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$

ALBO

– wyznaczenie wszystkich liczb naturalnych spełniających nierówność: 1

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność korzystając z metody grupowania wyrazów wielomianu:

$$x^7 - x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \leq 0$$

$$x^6(x - 1) + x^4(x - 1) - x^2(x - 1) - (x - 1) \leq 0$$

$$(x - 1)(x^6 + x^4 - x^2 - 1) \leq 0$$

$$(x - 1)(x^4(x^2 + 1) - (x^2 + 1)) \leq 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 1)(x^4 - 1) \leq 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 1) \leq 0$$

$$(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1)^2 \leq 0$$

Liczba 1 jest pierwiastkiem dwukrotnym, natomiast (-1) jednokrotnym, zatem odczytując z wykresu funkcji otrzymujemy zbiór rozwiązań: $x \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$. Tylko jedna liczba naturalna spełnia podaną nierówność – jest nią $1 \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XI.R2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $b \in \{-4, 4\}$

1 pkt – wyznaczenie piątego wyrazu rozwinięcia: $\binom{10}{4} \cdot x^6 \cdot b^4$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zastosuje poprawną metodę oraz zapisuje, że $b = 4$ (z pominięciem drugiego rozwiązania $b = -4$) to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpisujemy piąty wyraz rozwinięcia $(x - b)^{10}$ przy użyciu dwumianu Newtona: $\binom{10}{4} \cdot x^6 \cdot b^4$, co po rozwinięciu daje $210x^6 \cdot b^4$. Przyrównując równania otrzymujemy:

$$210x^6 \cdot b^4 = 53760x^6$$

$$b^4 = 256$$

$$b = 4 \quad \vee \quad b = -4$$

Zatem $b \in \{-4, 4\}$.

Zadanie 3. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.R2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy oraz poprawny wynik: 2

1 pkt – ograniczenie wyrażenia $\frac{4n^2 + \cos(3n-5)}{2n^2+1}$ dwoma wyrażeniami o wspólnej granicy:

$$\frac{4n^2-1}{2n^2+1} \leq \frac{4n^2 + \cos(3n-5)}{2n^2+1} \leq \frac{4n^2+1}{2n^2+1}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Ograniczamy wyrażenie $\cos(3n - 5)$ wykorzystując zbiór wartości funkcji trygonometrycznej cosinus:

$$-1 \leq \cos(3n - 5) \leq 1$$

Wtedy:

$$\frac{4n^2 - 1}{2n^2 + 1} \leq \frac{4n^2 + \cos(3n - 5)}{2n^2 + 1} \leq \frac{4n^2 + 1}{2n^2 + 1}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{2n^2 + 1} = 2$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{2n^2 + 1} = 2$$

a także granice tych funkcji są sobie równe, to na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + \cos(3n - 5)}{2n^2 + 1} = 2$$

Zadanie 4. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 0,14

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru Bayesa: $P(C|P) = \frac{0,2 \cdot 0,07}{0,37 \cdot 0,12 + 0,43 \cdot 0,09 + 0,2 \cdot 0,07}$

1 pkt – poprawne obliczenie prawdopodobieństw warunkowych $P(P|B)$, $P(P|C)$ oraz $P(C)$:

$$P(P|B) = 0,09 \text{ oraz } P(P|C) = 0,07 \text{ oraz } P(C) = 0,2$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia:

A – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba uczęszczała do ośrodka A

B – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba uczęszczała do ośrodka B

C – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba uczęszczała do ośrodka C

P – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba zdała egzamin praktyczny za pierwszym razem

K – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba zdała egzamin praktyczny za drugim lub kolejnym razem

Z polecenia:

$$P(A) = 0,37$$

$$P(B) = 0,43$$

$$P(C) = 0,2$$

$$P(P|A) = 0,12$$

$$P(P|B) = 0,09$$

$$P(P|C) = 0,07$$

Korzystamy ze wzoru Bayesa:

$$P(C|P) = \frac{0,2 \cdot 0,07}{0,37 \cdot 0,12 + 0,43 \cdot 0,09 + 0,2 \cdot 0,07} \approx 0,14$$

Prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba zapisała się do ośrodka C w przybliżeniu do części setnych wynosi 0,14.

Zadanie 5. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: V.3R) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem XIII. 5R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu

2 pkt – obliczenie różnicy $f(x_1) - f(x_2) = \frac{-8(x_1 - x_2)}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)}$ (*sposób I*)

ALBO

– poprawne określenie znaku pochodnej funkcji f w przedziale $(-3, +\infty)$:

$$f'(x) < 0 \quad (\textit{sposób II})$$

1 pkt – poprawne zapisanie założeń $x_1, x_2 \in (-3, +\infty)$ i $x_1 < x_2$

ALBO

– zapisanie założenia $x \in (-3, +\infty)$ oraz wyznaczenie pochodnej funkcji f :

$$f'(x) = \frac{-32}{(2x+6)^2} \quad (\textit{sposób II})$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie*Sposób I*

Korzystamy z definicji oraz zapisujemy założenia:

$$x_1 < x_2 \quad \text{oraz} \quad x_1 \in (-3, +\infty) \quad \text{oraz} \quad x_2 \in (-3, +\infty)$$

Stąd po przekształceniu założeń: $x_1 - x_2 < 0$ oraz $x_1 + 3 > 0$ oraz $x_2 + 3 > 0$

$$\text{Teza: } f(x_1) > f(x_2)$$

$$\text{po przekształceniu } f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Dowód:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1-5x_1}{2x_1+6} - \frac{1-5x_2}{2x_2+6} = \frac{-8(x_1-x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)}$$

Z założenia $x_1 - x_2 < 0$ zatem licznik jest liczbą dodatnią.

Z założenia $x_1 + 3 > 0$ oraz $x_2 + 3 > 0$ zatem mianownik jest liczbą dodatnią.

Zatem całe wyrażenie $f(x_1) - f(x_2)$ jest liczbą dodatnią, co jest równoważne z tezą. ■

Sposób II

Niech $x \in (-3, +\infty)$. Obliczamy pochodną funkcji f korzystając z pochodnej ilorazu:

$$f'(x) = \frac{-32}{(2x+6)^2}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(-3, +\infty)$, a jej pochodna jest w każdym punkcie tego przedziału ujemna. Zatem funkcja f jest w tym przedziale malejąca. ■

Zadanie 6. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej V.R2) posługuje się złożeniami funkcji; XII.R4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie poprawnej odpowiedzi: $y = x + \frac{25}{256}$

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktu styczności: $P = \left(-\frac{3}{32}, \frac{1}{256}\right)$

1 pkt – wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej: $a = 1$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie stycznej to równanie prostej w postaci liniowej $y = ax + b$.

Współczynnik kierunkowy prostej to tangens kąta nachylenia prostej do osi x . Zatem

$$a = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Równanie stycznej wyraża się wzorem: $y = x + b$.

Aby policzyć współrzędne punktu P styczności wykorzystujemy własność $a = f'(x_0)$.

Obliczamy pochodną funkcji f . Korzystamy z pochodnej funkcji złożonej:

$$f'(x) = 8(16x + 2)^7 \cdot 16 = 128(16x + 2)^7. \text{ Zatem:}$$

$$128(16x_0 + 2)^7 = 1$$

$$16x_0 + 2 = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = -\frac{3}{32}$$

Wtedy $y_0 = \frac{1}{256}$. Zatem współrzędne punktu styczności to $P = \left(-\frac{3}{32}, \frac{1}{256}\right)$. Wstawiamy do równania stycznej oraz obliczamy b :

$$\frac{1}{256} = -\frac{3}{32} + b$$
$$b = \frac{25}{256}$$

Równanie stycznej nachylonej do osi x pod kątem 225° to $y = x + \frac{25}{256}$.

Zadanie 7. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania

2 pkt – zapisanie związku $d^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ (sposób I)

ALBO

– uzasadnienie, że $\cos |\sphericalangle BAD| = 0$ (sposób II)

ALBO

– uzasadnienie, że $|\sphericalangle BAD| = 90^\circ$ (sposób III)

1 pkt – zapisanie, że $d^2 = 2ab$ (sposób I i II)

ALBO

– skorzystanie z własności okręgu opisanego na czworokącie oraz zapisanie w formie równoważnej zależności: $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ$ albo $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ$ (sposób I i II i III)

ALBO

– zapisanie, że trójkąty ABC i CDA są równoramienne

ALBO

– zapisanie, że trójkąty BAD oraz DCB są przystające (lub podobne w skali $k = 1$)

ALBO

– zapisanie, że trójkąty BAD oraz DCB mają jednakowe pola

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

Jeżeli zdający zakłada, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, z czego wynika równość $a = b$ i na tym zaprzestaje dowodzenie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Jeżeli zdający zakłada, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, oraz równość $a = b$ wynika z równoległości boków prostokąta, i na tym zaprzestaje dowodzenie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie*Sposób I*

Przekątne $|AC|$ i $|BD|$ oznaczmy jako d oraz kąt $|\sphericalangle ABC| = \alpha$. Korzystamy z twierdzenia Ptolemeusza – własności między przekątnymi czworokąta a jego bokami dzięki okręgowi opisanemu na danym czworokącie otrzymując:

$$d \cdot d = a \cdot b + a \cdot b$$

$$d^2 = 2ab$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABC i CDA :

$$d^2 = b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$d^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

Stąd

$$d^2 = 2b^2(1 - \cos \alpha)$$

$$d^2 = 2a^2(1 + \cos \alpha)$$

Wyznaczając cosinus z pierwszego równania otrzymujemy:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{d^2}{2b^2}$$

Wstawiając do drugiego równania otrzymujemy:

$$d^2 = 2a^2 \left(2 - \frac{d^2}{2b^2} \right)$$

Przekształcając:

$$\frac{d^2}{2a^2} = \frac{4b^2 - d^2}{2b^2}$$

$$2a^2d^2 + 2b^2d^2 = 8a^2b^2$$

$$a^2d^2 + b^2d^2 = 4a^2b^2$$

$$d^2(a^2 + b^2) = 4a^2b^2$$

$$d^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

Po przyrównaniu z $d^2 = 2ab$

$$2ab = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$1 = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$a^2 + b^2 = 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a - b)^2 = 0$$

$$a - b = 0$$

$$a = b \quad \blacksquare$$

Sposób II

Przekątne $|AC|$ i $|BD|$ oznaczmy jako d oraz kąt $|\sphericalangle BAD| = \beta$. Korzystamy z twierdzenia Ptolemeusza otrzymując:

$$d^2 = 2ab$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów BAD i DCB :

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \beta$$

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180^\circ - \beta)$$

Po uproszczeniu

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \beta$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \beta$$

Po obu stronnym odjęciu równań otrzymujemy

$$-4ab \cdot \cos \beta = 0$$

Z tego wynika, że:

$$a = 0 \quad \text{lub} \quad b = 0 \quad \text{lub} \quad \cos \beta = 0$$

Jako, iż a i b to długości boków, to muszą być one dodatnie ($a, b > 0$). Z tego wniosek, że

$$\cos \beta = 0$$

Zatem z twierdzenia cosinusów:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0$$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Po przyrównaniu z $d^2 = 2ab$

$$a^2 + b^2 = 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a - b)^2 = 0$$

$$a - b = 0$$

$$a = b \quad \blacksquare$$

Sposób III

Z własności okręgu opisanego na czworokącie wynika: $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ$ oraz $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ$.

Trójkąty ABC oraz CDA są równoramienne ($|AB| = |BC| = a$ oraz $|CD| = |DA| = b$), zatem miary kątów przy ich podstawach (przekątnych czworokąta) są sobie równe:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCA| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCA|.$$

$$\text{Ponadto, } |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DAC| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle DCA|.$$

$$\text{Zatem } |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle DCA| = 180^\circ$$

$$\text{Z tego wynika, że } |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle DAC| = 180^\circ$$

$$\text{Wtedy } 2(|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DAC|) = 180^\circ$$

oraz $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle BAD|$

więc $2|\sphericalangle BAD| = 180^\circ$

z czego $|\sphericalangle BAD| = 90^\circ$.

Ponieważ $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$ oraz przekątne $|AC|$ i $|BD|$ są sobie równe, to czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, a w prostokącie przeciwległe boki są równe, więc $a = b$. ■

Komentarz do zadania

Pomimo tego, że zadana teza jest klarowna oraz warunki zadania sugerują jej prawdziwość, tak trudnością zadania jest jej udowodnienie. Może odbyć się to poprzez użycie wzrów i twierdzeń z planimetrii czy trygonometrii, bądź poprzez przedstawienie słownego toku rozumowania, natomiast zakładanie długości pewnych boków czy też miar kątów jest uznawane za niepoprawne.

Zadanie 8. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: (3,12,48) **oraz** $q = 4$

3 pkt – wyznaczenie liczb tworzących ciąg geometryczny: (3,12,48)

2 pkt – wyznaczenie różnicy ciągu arytmetycznego w zależności od pierwszego wyrazu oraz uzależnienie wszystkich wyrazów ciągu od pierwszego wyrazu ciągu

$$\text{arytmetycznego: } r = 3b_1 \text{ i } a_1 = b_1, a_2 = 4b_1, a_3 = 16b_1$$

1 pkt – uzależnienie wszystkich wyrazów ciągu od pierwszego wyrazu ciągu arytmetycznego oraz różnicy: $a_1 = b_1, a_2 = b_1 + r, a_3 = b_1 + 5r$

ALBO

– zapisanie związków na trzy kolejne wyrazy ciągu (geometrycznego):

$$a_2^2 = a_1 a_3 \text{ oraz } a_2^2 = (a_1 + 1)(a_3 - 12)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Wyrażamy wyrazy ciągu (a_n) w zależności od wyrazów ciągu (b_n) :

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_2 = b_1 + r$$

$$a_3 = b_6 = b_1 + 5r$$

Korzystamy z zależności $a_2^2 = a_1 a_3$:

$$(b_1 + r)^2 = b_1 \cdot (b_1 + 5r)$$

Z tego otrzymujemy $r = 0$ lub $r = 3b_1$. Odrzucamy $r = 0$ gdyż ciąg arytmetyczny (b_n) nie jest stały. Wtedy:

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_1 + 3b_1 = 4b_1$$

$$a_3 = b_1 + 15b_1 = 16b_1$$

Korzystamy z zależności $a_2^2 = (a_1 + 1)(a_3 - 12)$:

$$(4b_1)^2 = (b_1 + 1)(16b_1 - 12)$$

otrzymując $b_1 = 3$. Zatem:

$$a_1 = b_1 = 3$$

$$a_2 = 4b_1 = 12$$

$$a_3 = 16b_1 = 48$$

Wyznaczamy iloraz ciągu (a_n) :

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{3} = 4$$

Ciąg geometryczny (a_n) to $(3,12,48)$ a jego iloraz równa się $q = 4$.

Zadanie 9. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $a^2 - b^2$. III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2 x+3 + 3 x-1 = 13$, $ x+2 + 2 x-3 < 11$

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

3 pkt – poprawne rozwiązanie trzech z czterech rozważanych przypadków

2 pkt – poprawne rozwiązanie dwóch z czterech rozważanych przypadków

1 pkt – poprawne rozwiązanie jednego z czterech rozważanych przypadków

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważamy wzory skróconego mnożenia pod pierwiastkami oraz przekształcamy

nierówność przy użyciu własności $\sqrt{a^2} = |a|$:

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1} + 9x^2 < 4 - \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$$

$$\sqrt{(2x+1)^2} + 9x^2 < 4 - \sqrt{(x^2-2)^2}$$

$$|2x+1| + 9x^2 < 4 - |x^2-2|$$

Rozpisujemy nierówność na cztery przypadki oraz rozwiązujemy cztery nierówności kwadratowe:

$$1^\circ \quad -(2x+1) + 9x^2 + x^2 - 2 < 4 \quad \text{oraz} \quad x \in (-\infty; -\sqrt{2}]$$

$$2^\circ \quad -(2x+1) + 9x^2 - (x^2-2) < 4 \quad \text{oraz} \quad x \in \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$3^\circ \quad 2x+1 + 9x^2 - (x^2-2) < 4 \quad \text{oraz} \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$4^\circ \quad 2x+1 + 9x^2 + x^2 - 2 < 4 \quad \text{oraz} \quad x \in [\sqrt{2}, +\infty)$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy

$$1^\circ \quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{71}}{10}, \frac{1+\sqrt{71}}{10}\right) \quad \text{oraz} \quad x \in (-\infty; -\sqrt{2}]$$

$$2^\circ \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \quad \text{oraz} \quad x \in \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$3^\circ \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{oraz} \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$4^{\circ} \quad x \in \left(\frac{-1-\sqrt{51}}{10}, \frac{-1+\sqrt{51}}{10} \right) \quad \text{oraz} \quad x \in [\sqrt{2}, +\infty)$$

Łączymy wszystkie warunki ze sobą otrzymując

$$1^{\circ} \quad x \in \emptyset$$

$$2^{\circ} \quad x \in \emptyset$$

$$3^{\circ} \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

$$4^{\circ} \quad x \in \emptyset$$

Rozwiązaniem nierówności jest suma wszystkich warunków:

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

Zadanie 10. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych; III.R5) 5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności: wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają określone znaki bądź należą do określonego przedziału, wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów; III.R6) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $m \in (-3, -2) \cup (2, 3)$

3 pkt – zastosowanie wzorów Viète’a i przekształcenie nierówności do postaci iloczynowej czynników możliwie najniższego stopnia: $m^2(m^2 + 8)(m - 3)(m + 3) < 0$ **ORAZ** rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

2 pkt – przedstawienie nierówności w postaci, w której możemy zastosować wzory Viète’a, np. $(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2) - 64(x_1 + x_2)$ **ORAZ** rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

1 pkt – zapisanie sumy i iloczynu miejsc zerowych przy użyciu wzorów Viète’a:

$$x_1 + x_2 = -m^2 \quad \text{ i } \quad x_1 \cdot x_2 = 4 \quad \text{ ORAZ } \quad \text{rozwiązanie warunku } \Delta > 0:$$

$$m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający nie rozwiązuje warunku $\Delta > 0$ albo rozwiązuje go błędnie, natomiast poprawnie rozwiązuje pozostałą część zadania i otrzymuje prawidłowy wynik tej części zadania, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

Nie przyznaje się punktów za rozwiązanie jedynie warunku $\Delta > 0$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Aby równanie miało dwa różne rozwiązania rzeczywiste, to wyróżnik kwadratowy musi być dodatni $\Delta > 0$:

$$m^4 - 16 > 0$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy

$$m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Przekształcamy nierówność

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 > 65x_1 - x_1^2 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2 + 65x_2$$

do postaci, w której możemy zastosować wzory Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2) - 64(x_1 + x_2) > 0$$

Zapisujemy wzory przy użyciu parametru m :

$$x_1 + x_2 = -m^2$$

$$x_1 \cdot x_2 = 4$$

Wstawiamy do nierówności. Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy

$$-m^6 + m^4 + 72m^2 > 0$$

$$-m^2(m^4 - m^2 - 72) > 0$$

Rozwiązujemy nierówność przy użyciu zmiennej dwukwadratowej. W końcowym etapie nierówność przyjmuje postać iloczynową:

$$m^2(m^2 + 8)(m - 3)(m + 3) < 0$$

Rozwiązaniem nierówności jest przedział $m \in (-3, 3) \setminus \{0\}$.

Ostateczną odpowiedzią jest część wspólna zbiorów

$$m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \text{ i } m \in (-3, 3) \setminus \{0\}:$$

$$m \in (-3, -2) \cup (2, 3)$$

Zadanie 11. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej i prostej stycznej do zadanego okręgu.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $P_1 = \frac{8}{3}$ oraz $P_2 = \frac{147}{2}$

3 pkt – poprawne rozpatrzenie i rozwiązanie jednego przypadku: $P = \frac{8}{3}$ albo $P = \frac{147}{2}$

2 pkt – wyznaczenie równań stycznej do okręgu: $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ oraz $y = \frac{4}{3}x - 14$

1 pkt – wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej do okręgu: $a = \frac{4}{3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie stycznej to równanie prostej liniowej w postaci $y = ax + b$. Styczna k jest prostopadła do prostej $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$, zatem $a = \frac{4}{3}$. Styczna k wyraża się równaniem:

$y = \frac{4}{3}x + b$. Po przekształceniu do postaci ogólnej prostej: $4x - 3y + 3b = 0$. Obliczamy współczynnik b . Styczna ma jeden punkt wspólny z okręgiem, oraz jest nim odległość promienia okręgu od jego środka do stycznej, więc zapisujemy:

$$5 = \frac{|8 + 9 + 3b|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$5 = \frac{|3b + 17|}{5}$$

$$|3b + 17| = 25$$

$$3b + 17 = 25 \quad \text{lub} \quad 3b + 17 = -25$$

Stąd

$$b = \frac{8}{3} \quad \text{lub} \quad b = -14$$

Równania stycznych wyrażają się wzorami: $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ oraz $y = \frac{4}{3}x - 14$. Obliczamy długości boków a, b trójkątów ograniczanych przez styczne oraz osie układu współrzędnych. Są nimi odległości miejsc zerowych stycznych od początku układu współrzędnych oraz odległości od punktów przecięcia stycznych z osią OY . Trójkąty są trójkątami prostokątnymi:

Gdy $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$:

$$\frac{4}{3}x_0 + \frac{8}{3} = 0$$

$$x_0 = -2$$

$$f(0) = \frac{8}{3}$$

$$a = |-2| = 2$$

$$b = \left| \frac{8}{3} \right|$$

$$P_1 = \frac{2 \cdot \frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

Gdy $y = \frac{4}{3}x - 14$:

$$\frac{4}{3}x_0 - 14 = 0$$

$$x_0 = \frac{21}{2}$$

$$f(0) = -14$$

$$a = \left| \frac{21}{2} \right| = \frac{21}{2}$$

$$b = |-14| = 14$$

$$P_2 = \frac{\frac{21}{2} \cdot 14}{2} = \frac{147}{2}$$

Zatem pola P trójkątów ograniczonych stycznymi oraz osiami układu współrzędnych wynoszą odpowiednio: $P = \frac{8}{3}$ lub $P = \frac{147}{2}$.

Zadanie 12. (0–5)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: 5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii;

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $V = 111\pi$

4 pkt – obliczenie długości wysokości stożka: $h = 12$

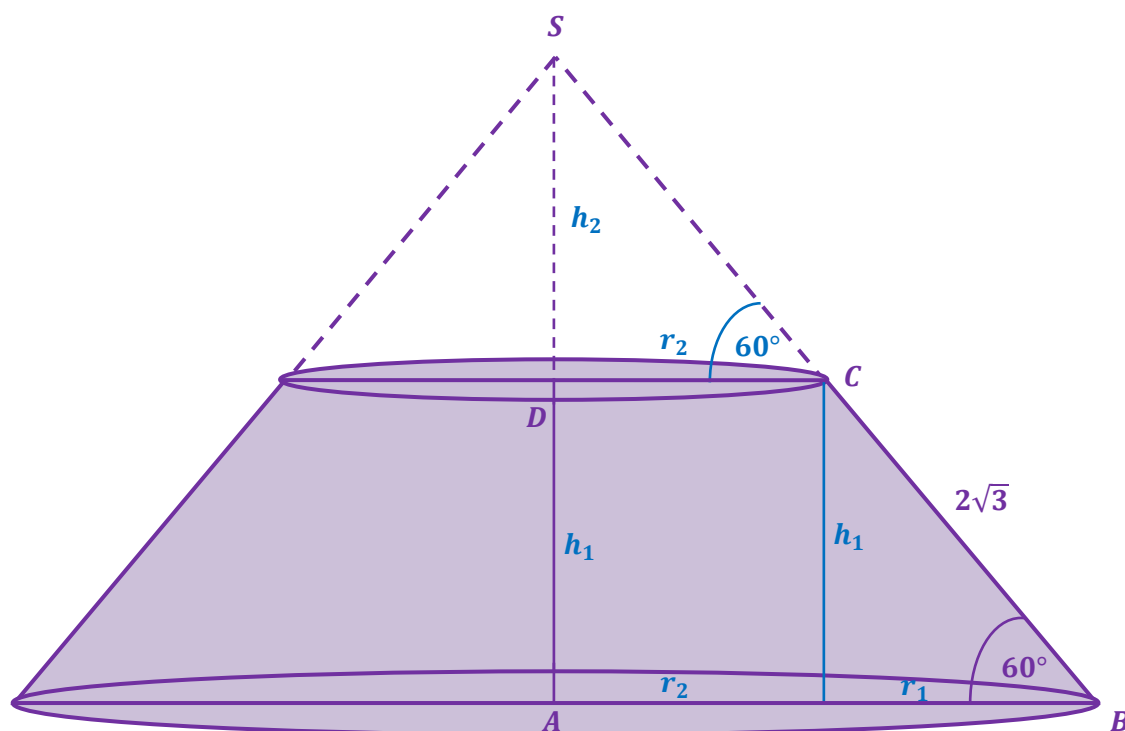
3 pkt – obliczenie długości promienia okręgu u podstawy stożka: $r = 4\sqrt{3}$

2 pkt – obliczenie długości promienia górnego okręgu w stożku ściętym: $r_2 = 3\sqrt{3}$

1 pkt – obliczenie długości wysokości stożka ściętego: $h_1 = 3$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie



Obliczamy objętość bryły zacieniowanej na fioletowo. Jest nią stożek ścięty.

Przyjmujemy oznaczenia takie jak na rysunku. Obliczamy h_1 przy użyciu trygonometrii, np.

$$\sin 60^\circ = \frac{h_1}{2\sqrt{3}}$$

$$h_1 = 3$$

Obliczamy r_1 korzystając z trygonometrii, albo twierdzenia Pitagorasa, np.

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{3}{r_1}$$

$$r_1 = \sqrt{3}$$

Wykorzystując pole trapezu $ABCD$ obliczamy długość r_2 :

$$\frac{21\sqrt{3}}{2} = \frac{(r_2 + r_1 + \sqrt{3}) \cdot 3}{2}$$

Stąd

$$r_2 = 3\sqrt{3}$$

Zauważamy, że kąt $|\angle DCS| = 60^\circ$, gdyż jest to kąt odpowiadający $|\angle ABC|$. Obliczamy h_2 :

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h_2}{3\sqrt{2}}$$

$$h_2 = 9$$

Wysokość stożka ma zatem długość 12, natomiast promień jego podstawy $4\sqrt{3}$.

Aby obliczyć objętość powstałej bryły – stożka ściętego, musimy od objętości całego stożka odjąć objętość mniejszego stożka (zaznaczonego przerywaną linią).

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 12 = 192\pi$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot 9 = 81\pi$$

Więc

$$V = V_1 - V_2 = 192\pi - 81\pi = 111\pi$$

Objętość powstałej bryły wynosi 111π .

Zadanie 13. (0–6)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych..	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:

$$x \in \left\{ -3\pi, -\frac{11\pi}{4}, -2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi \right\}$$

5 pkt – rozwiązanie równania w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ oraz $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

z uwzględnieniem dziedziny $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

4 pkt – zapisanie, że $t = 0$ lub $t = 1$

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg} x = 0$ lub $\operatorname{tg} x = 1$

3 pkt – zastosowanie zmiennej pomocniczej $t = \operatorname{tg} x$ **oraz** zapisanie równania w postaci

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-t}{1+t}$$

ALBO

– zapisanie równania w postaci $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$

2 pkt – zapisanie, że $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

1 pkt – zapisanie koniecznych założeń i wyznaczenie dziedziny: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający nie zapisuje założeń, to za całe rozwiązanie otrzymuje maksymalnie **3 punkty**.

Jeżeli zdający zapisze poprawne założenia natomiast niepoprawnie rozwiązuje je, to za całe rozwiązanie otrzymuje maksymalnie **5 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy konieczne założenia spełniające sens liczbowy: $\operatorname{tg} x \neq 0$ oraz $\operatorname{tg} x + 1 \neq 0$.

Po rozwiązaniu ich otrzymujemy dziedzinę równania: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do przekształcenia równania zastosujemy wzór na podwojony cosinus:

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Równanie ma postać:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

Niech $t = \operatorname{tg} x$.

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - t}{1 + t}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned} (1 - t^2)(1 + t) &= (1 + t^2)(1 - t) \\ (1 - t)(1 + t)^2 - (1 + t^2)(1 - t) &= 0 \\ (1 - t)((1 + t)^2 - (1 + t^2)) &= 0 \\ (1 - t)(1 + 2t + t^2 - 1 - t^2) &= 0 \\ 2t(1 - t) &= 0 \\ t = 0 \quad \text{lub} \quad t = 1 \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= 0 \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} x = 1 \\ x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{oraz} \quad x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zapisujemy rozwiązania należące do przedziału $[-3\pi, \pi]$:

$$x \in \left\{ -3\pi, -\frac{11\pi}{4}, -2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi \right\}$$

Komentarz do zadania

Równanie to posiada wiele różnych sposobów rozwiązania wykorzystujących podstawowe wzory i przekształcenia wyrażeń trygonometrycznych, natomiast w kluczu odpowiedzi uwzględniono najprostszy oraz najszybszy sposób rozwiązania. Ze względu na długą drogę prowadzącą do rozwiązania oraz skomplikowane obliczenia, zadanie punktowane jest najwyższą możliwą liczbą punktów oraz posiada dużo miejsca do rozwiązania w arkuszu, co sprawia, że zdający może zapisywać wszystkie rozważania oraz podejmować wiele prób rozwiązania problemu.

Zadanie 14.1. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: 5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii;

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania

1 pkt – uzależnienie wysokości walca od promienia jego podstawy: $h = \frac{48-r^2}{r}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy wysokość walca od jego promienia podstawy:

$$96\pi = 2\pi r(r + h)$$

$$48 = r(r + h)$$

$$\frac{48}{r} = r + h$$

$$h = \frac{48 - r^2}{r}$$

Ze wzoru na objętość walca:

$$V = \pi r^2 h$$

otrzymujemy:

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{48-r^2}{r} = \pi \cdot (48r - r^3) \quad \blacksquare$$

Zadanie 14.2. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

- 3 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $r = 4$ i obliczenie tej największej objętości: 128π
- 2 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $r = 4$
- 1 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji: $r = 4$
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości r , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:
 - opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości r funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość
LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości r funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji V :

$$V'(r) = \pi(48 - 3r^2)$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$\pi(48 - 3r^2) = 0$$

$$48 - 3r^2 = 0$$

$$r^2 = 16$$

$$r = 4 \quad \vee \quad r = -4 \notin (0,6)$$

Badamy znak pochodnej:

r	$(0,4)$	4	$(4,6)$
$V'(r)$	$+$	0	$-$
$V(r)$	$\nearrow$	$y_{\max} = 128\pi$	$\searrow$

Zatem dla $r = 4$ objętość tego stożka jest największa i wynosi 128π .