

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	EMAP-R0-100, EMAP-R0-200, EMAP-R0-300, EMAP-R0-400, EMAP-R0-700, EMAP-R0-K00, EMAP-R0-Q00, EMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	12 maja 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	27 czerwca 2025 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5R) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.8R) rozwiązuje proste nierówności wymierne [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. 2012 poz. 977).

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.2R) [...] wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta [...] (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 11.1R) oblicza granice funkcji [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.5R) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zasady oceniania

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1	4	7
---	---	---

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2.1R) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania (tj. spełnienie kryterium za 2 punkty **oraz** zapisanie, że $a + 2b > 0$ **oraz** uzasadnienie, że dla liczb spełniających warunek $b \neq \frac{1}{2}a$ zachodzi $(a - 2b)^2 > 0$).

2 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a - 2b)^2 > 0$,

ALBO

– uzasadnienie, że funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $a = 2b$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sześcian sumy i przekształcenie nierówności do postaci

$$a^2(a - 2b) - 4b^2(a - 2b) > 0$$

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a + 2b)[(a + 2b)^2 - 8ab] > 0$,

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a + 2b)^2 > 8ab$,

ALBO

– rozważenie funkcji $f(a) = a^3 - 2ba^2 - 4b^2a + 8b^3$ określonej dla $a > 0$ oraz obliczenie pochodnej tej funkcji i miejsca zerowego tej pochodnej:

$$f'(a) = 3a^2 - 4ba - 4b^2 \text{ oraz } a = 2b.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzoru na sześcian sumy:

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 - 8a^2b - 16ab^2 > 0$$

$$a^3 - 2a^2b - 4ab^2 + 8b^3 > 0$$

$$a^2(a - 2b) - 4b^2(a - 2b) > 0$$

$$(a - 2b)(a^2 - 4b^2) > 0$$

$$(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$$

Z założenia $a > 0$ i $b > 0$, więc $a + 2b > 0$.

Ponieważ $b \neq \frac{1}{2}a$, więc $a - 2b \neq 0$ i wtedy $(a - 2b)^2 > 0$ jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.

Zatem $(a - 2b)^2(a + 2b)$ jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To oznacza, że również nierówność $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$ jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzorów na kwadrat sumy i różnicy:

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$(a + 2b)^3 > 8ab(a + 2b)$$

$$(a + 2b)^3 - 8ab(a + 2b) > 0$$

$$(a + 2b)[(a + 2b)^2 - 8ab] > 0$$

$$(a + 2b)(a^2 - 4ab + 4b^2) > 0$$

$$(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$$

Z założenia $a > 0$ i $b > 0$, więc $a + 2b > 0$.

Ponieważ $b \neq \frac{1}{2}a$, więc $a - 2b \neq 0$ i wtedy $(a - 2b)^2 > 0$ jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.

Zatem $(a - 2b)^2(a + 2b)$ jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To oznacza, że również nierówność $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$ jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To należało wykazać.

Sposób III

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(a) = (a + 2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2$ dla każdego $a \in (0, +\infty)$.

Obliczamy pochodną funkcji f oraz jej miejsca zerowe:

$$f'(a) = 3(a + 2b)^2 - 16ba - 16b^2$$

$$3a^2 + 12ab + 12b^2 - 16ba - 16b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$3a^2 - 4ba - 4b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$\left(a = -\frac{2}{3}b \vee a = 2b\right) \wedge a > 0$$

Gdy $b > 0$, to $f'(a) > 0$ dla $a \in (2b, +\infty)$ oraz $f'(a) < 0$ dla $a \in (0, 2b)$. Zatem przy b dodatnim funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 2b]$ oraz rosnąca w przedziale $[2b, +\infty)$, czyli funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla argumentu dodatniego $a = 2b$. Ta najmniejsza wartość jest równa $f(2b) = (2b + 2b)^3 - 8 \cdot (2b)^2 \cdot b - 16 \cdot 2b \cdot b^2 = 0$. Zatem dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $a \neq 2b$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2 > 0$$

To należało wykazać.

Zadanie 7. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi..

Zasady oceniania (dla *sposobów I oraz VI*)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów: CAD , BAD , CDA , ADB , w którym wszystkie funkcje trygonometryczne są tego samego argumentu, np.

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ gdzie } \alpha = |\angle CAD|,$$

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AD : $2 - \sqrt{3}$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów: CAD , BAD , CDA , ADB ,

np. $\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, gdzie $\alpha = |\angle CAD|$,

ALBO

– zapisanie związku $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobu II*)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie długości czterech spośród pięciu odcinków: BD , CD , CE , DE , AE ,

w zależności od jednej zmiennej, np. $|CD| = x$ i $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$ i $|CE| = \frac{1}{2}x$

i $|AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

ALBO

– wyznaczenie długości odcinków: BD , CD , CE , w zależności od długości odcinka AE

i tangensa kąta DAC , np. $|CE| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$ i $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$

i $|BD| = |AE| - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem DAC .

1 pkt – zapisanie związku $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

ALBO

– wyznaczenie długości dwóch odcinków spośród BD , BC i CD w zależności od

jednej zmiennej, np. $|CD| = x$ i $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$,

ALBO

- wyznaczenie długości boków trójkąta CED w zależności od jednej zmiennej, np.

$$|CD| = x, |CE| = \frac{1}{2}x, |DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

ALBO

- wyznaczenie długości odcinka CE (albo CD) w zależności od długości odcinka AE i tangensa kąta DAC : $|CE| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (albo $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$), gdzie α jest kątem DAC .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobów III – V)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – obliczenie $\frac{|BD|}{|DF|}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} : \frac{|BD|}{|DF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ALBO

- wyznaczenie długości odcinków AD oraz CD w zależności od jednej zmiennej, np.

$$|AD| = \sqrt{6}m \text{ oraz } |CD| = 2m.$$

1 pkt – wyznaczenie długości odcinków BD i CD w zależności od jednej zmiennej, np.

$$|CD| = 2m \text{ i } |BD| = (\sqrt{3} - 1)m.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

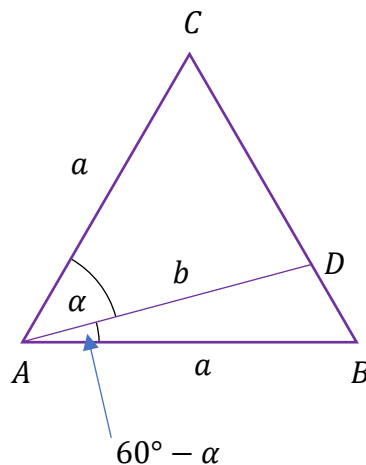
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC ,

b – długość odcinka AD ,

α – miara kąta DAC

(zobacz rysunek).



Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oraz uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy:

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Stąd i ze wzoru na sinus różnicy kątów otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\sin 60^\circ \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Zatem kąt DAC ma miarę 45° . To należało wykazać.

Sposób II

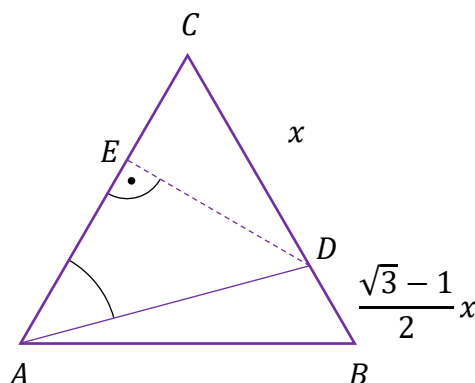
Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A , więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Oznaczmy $x = |CD|$. Wtedy $|BD| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x$. Niech E będzie spodkiem wysokości trójkąta ADC poprowadzonej z wierzchołka D (zobacz rysunek).



Z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° otrzymujemy $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ oraz $|EC| = \frac{1}{2}x$.

Ponieważ $|AE| + |EC| = |CD| + |DB|$, więc

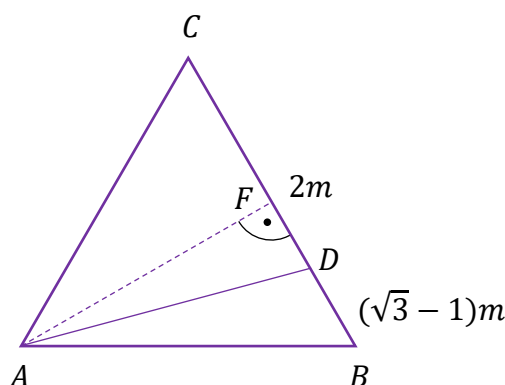
$$|AE| + \frac{1}{2}x = x + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x$$

$$|AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Zatem $|AE| = |DE|$. To oznacza, że trójkąt prostokątny DEA jest równoramienny i kąt DAC ma miarę 45° . To należało wykazać.

Sposób III (z twierdzenia o dwusiecznej)

Niech F będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A . Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość AF , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $|BD| = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $|CD| = 2m$, przy pewnym $m > 0$ (zobacz rysunek).



Wtedy $|AB| = |BC| = (\sqrt{3} + 1)m$, $|AF| = \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3}}{2}m$ oraz

$|BF| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}m$. Stąd

$$|DF| = |BF| - |BD| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}m - (\sqrt{3} - 1)m = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}m$$

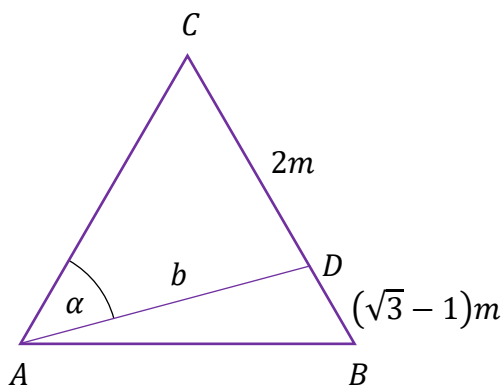
Ponieważ $\frac{|BD|}{|DF|} = \frac{(\sqrt{3} - 1)m}{\frac{(3 - \sqrt{3})m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{(\sqrt{3} + 1)m}{\frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3}m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, więc półprosta AD

jest dwusieczną kąta BAF . To oznacza, że

$|\angle DAF| = \frac{1}{2} \cdot |\angle BAF| = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ$ oraz $|\angle DAC| = 30^\circ + |\angle DAF| = 45^\circ$. To należało wykazać.

Sposób IV (z twierdzenia cosinusów i sinusów / dwukrotnie z twierdzenia cosinusów)

Oznaczmy kąt CAD przez α , natomiast długość odcinka AD oznaczmy przez b . Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A na prostą BC , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $|BD| = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $|CD| = 2m$, przy pewnym $m > 0$ (zobacz rysunek).



Wtedy $|AB| = |BC| = |CA| = (\sqrt{3} + 1)m$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC :

$$\begin{aligned} b^2 &= |AC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \cos 60^\circ \\ b^2 &= [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (2m)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot 2m \cdot \frac{1}{2} \\ b^2 &= (4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 2) \cdot m^2 \\ b &= \sqrt{6}m \end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta ADC i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin 60^\circ} &= \frac{2m}{\sin \alpha} \\ \frac{\sqrt{6}m}{\sin 60^\circ} &= \frac{2m}{\sin \alpha} \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Zatem $|\angle DAC| = 45^\circ$. To należało wykazać.

Uwaga.

Zamiast $\sin \alpha$ możemy też obliczyć $\cos \alpha$, korzystając po raz drugi z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC :

$$\begin{aligned} |CD|^2 &= |AC|^2 + b^2 - 2 \cdot |AC| \cdot b \cdot \cos \alpha \\ (2m)^2 &= [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (\sqrt{6}m)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha = [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (\sqrt{6}m)^2 - (2m)^2$$

$$\cos \alpha = \frac{(3 + 2\sqrt{3} + 1) + 6 - 4}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $|\angle DAC| = 45^\circ$.

Sposób V (z twierdzenia Stewarta)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC ,

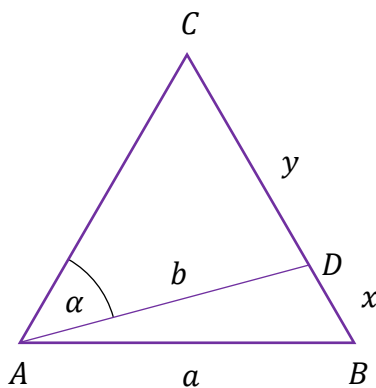
b – długość odcinka AD ,

x – długość odcinka BD ,

y – długość odcinka CD ,

α – miara kąta DAC

(zobacz rysunek).



Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A na prostą BC , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $x = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $y = 2m$, przy pewnym $m > 0$.

Wtedy $a = (\sqrt{3} + 1)m$.

Stosujemy twierdzenie Stewarta

$$a^2 \cdot x + a^2 \cdot y = (x + y)(b^2 + xy)$$

$$a^2 = b^2 + xy$$

$$[(\sqrt{3} + 1)m]^2 = b^2 + (\sqrt{3} - 1)m \cdot 2m$$

$$b = \sqrt{6}m$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC i otrzymujemy:

$$y^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$$

$$(2m)^2 = (\sqrt{6}m)^2 + [(\sqrt{3} + 1)m]^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha$$

$$4m^2 = 6m^2 + (4 + 2\sqrt{3})m^2 - 2(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot m^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{(6 + 2\sqrt{3})}{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}$$

Zatem $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha = 45^\circ$. To należało wykazać.

Sposób VI (analitycznie)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC ,

α – miara kąta DAC ,

β – miara kąta BAD .

Umieszczamy trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, żeby $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ i C

leżał w I ćwiartce układu współrzędnych. Wtedy $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

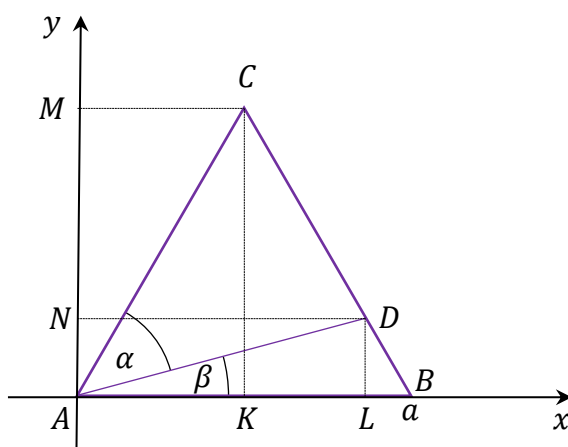
Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A , więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Oznaczmy teraz rzuty prostokątne punktów C i D na oś odciętych przez – odpowiednio – K oraz L , a rzuty prostokątne punktów C i D na oś rzędnych przez – odpowiednio – M oraz N (zobacz rysunek).



Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|KL|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{2}{2 + \sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} - 1 \text{ oraz } \frac{|AN|}{|AM|} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3} - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

zatem

$$|KL| = (\sqrt{3} - 1) \cdot |KB| = (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{a}{2} \quad \text{oraz} \quad |AN| = (2 - \sqrt{3}) \cdot |AM| = (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Stąd

$$D = \left(\frac{a}{2} + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{a}{2}, (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2} \right)$$

Współczynnik kierunkowy prostej AD jest równy

$$a_{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Zatem

$$\operatorname{tg} \beta = a_{AD} = 2 - \sqrt{3}$$

Ze wzoru na tangens różnicy kątów otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(60^\circ - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} - 2} = 1$$

Zatem $\alpha = 45^\circ$. To należało wykazać.

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2R) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{9}{25}$ (lub $\frac{54}{150}$).

2 pkt – wyznaczenie mocy zdarzeń B oraz $A \cap B$, np. $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5$ oraz
 $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2}$.

1 pkt – wyznaczenie mocy zdarzenia B , np. $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5$,
 ALBO

– wyznaczenie mocy zdarzenia $A \cap B$, np. $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający, obliczając $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (lub $\frac{|A \cap B|}{|B|}$), pominie w liczniku i mianowniku czynnik $\binom{4}{2}$ bez stosownego komentarza, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czteroelementowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, natomiast przez B – że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek.

Obliczamy moc zdarzenia B : $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Obliczamy moc zdarzenia $A \cap B$: $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2} = 54$.

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{54}{150} = \frac{9}{25}$$

Zadanie 9. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.9R) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in (-\infty, -10) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

3 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych przedziałów - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności z rozpatrywanymi przedziałami,

ALBO

– zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród trzech następujących przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

– zapisanie, że przypadek $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$ jest sprzeczny **oraz** zapisanie trzech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych trzech przypadków - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności: $x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3|$ i $x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$, a następnie w postaci równoważnej koniunkcji alternatyw nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$(x + 3 > \frac{1}{2}x \text{ lub } x + 3 < -\frac{1}{2}x) \text{ i } (x + 3 > \frac{4-x}{2} \text{ lub } x + 3 < -\frac{4-x}{2}),$$

ALBO

– odczytanie z wykresów funkcji f oraz g pierwszych współrzędnych punktów ich przecięcia: $x = -\frac{2}{3}$ oraz $x = -10$ i sprawdzenie rachunkiem poprawności odczytanych współrzędnych.

2 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) oraz zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów

ALBO

- zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków,
ALBO
 - zapisanie trzech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** zapisanie, że przypadek $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$ jest sprzeczny,
ALBO
 - zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności:
 $x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3|$ i $x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$,
ALBO
 - narysowanie wykresów funkcji $f(x) = |x - 2|$ oraz $g(x) = 2 \cdot |x + 3| - 2$.
- 1 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przedziałów bez użycia symbolu wartości bezwzględnej
ALBO
- zapisanie jednego z przedziałów: $(-\infty, -3)$, $[-3, 2)$, $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przedziale - tj. wyznaczenie części wspólnej zbioru rozwiązań zapisanej nierówności z rozpatrywanym przedziałem,
ALBO
 - zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przypadków bez użycia wartości bezwzględnej,
ALBO
 - zapisanie jednego z trzech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przypadku - tj. wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, zapisując nierówność bez użycia wartości bezwzględnej, popełni błąd, który nie jest rachunkowy, tylko w jednym z rozpatrywanych przypadków/przedziałów i rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
2. Jeżeli zdający nie rozpatruje przedziałów, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci (lub rozpatruje przypadki wyznaczone jedynie przez nierówności ostre, które nie wyczerpują zbioru $\mathbb{R}$), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przy rozwiązaniu graficznym poda zbiór rozwiązań $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$, ale nie sprawdzi rachunkiem pierwszych współrzędnych

punktów przecięcia wykresów funkcji f i g , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wyznaczamy przedziały, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$.

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \in (-\infty, -3)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x + 2 + 2(x + 3) < -2$, czyli $x < -10$.

Stąd otrzymujemy $x \in (-\infty, -10)$.

Przypadek 2. (gdy $x \in [-3, 2)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x + 2 - 2(x + 3) < -2$, czyli $x > -\frac{2}{3}$.

Stąd otrzymujemy $x \in (-\frac{2}{3}, 2)$.

Przypadek 3. (gdy $x \in [2, +\infty)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $x - 2 - 2(x + 3) < -2$, czyli $x > -6$.

Stąd otrzymujemy $x \in [2, +\infty)$.

Ostatecznie rozwiązaniami nierówności $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$ są wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Sposób II (poprzez koniunkcję nierówności)

Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwe są równoważności:

(1) $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < a$ i $x > -a$

oraz

(2) $|x| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > a$ lub $x < -a$.

Przekształcamy nierówność $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$, korzystając z równoważności (1):

$$x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3| \quad \text{i} \quad x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$$

$$|x + 3| > \frac{1}{2}x \quad \text{i} \quad |x + 3| > \frac{4 - x}{2}$$

Rozwiązujemy każdą z otrzymanych nierówności, korzystając z równoważności (2):

$$\left(x + 3 > \frac{1}{2}x \quad \text{lub} \quad x + 3 < -\frac{1}{2}x\right) \quad \text{i} \quad \left(x + 3 > \frac{4 - x}{2} \quad \text{lub} \quad x + 3 < -\frac{4 - x}{2}\right)$$

$$(x > -6 \quad \text{lub} \quad x < -2) \quad \text{i} \quad \left(x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10\right)$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \left(x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10 \right)$$

$$x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10$$

Rozwiązaniami nierówności $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$ są wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3R) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{27}{2}$ lub 27.

3 pkt – obliczenie a_1 oraz q : $(a_1, q) = (18, \frac{1}{3})$, $(a_1, q) = (18, -\frac{1}{3})$, $(a_1, q) = (2, 3)$,

$$(a_1, q) = (2, -3)$$

ALBO

– obliczenie a_3 oraz q : $(a_3, q) = (2, \frac{1}{3})$, $(a_3, q) = (2, -\frac{1}{3})$, $(a_3, q) = (18, 3)$,

$$(a_3, q) = (18, -3),$$

ALBO

– obliczenie a_2 oraz q : $(a_2, q) = (-6, -3)$, $(a_2, q) = (-6, -\frac{1}{3})$, $(a_2, q) = (6, \frac{1}{3})$,

$$(a_2, q) = (6, 3) \text{ (dla sposobu III),}$$

ALBO

– wyznaczenie jednej z par (a_1, q) , dla której szereg geometryczny jest zbieżny

i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_1, q) = (18, \frac{1}{3})$ i $S = 27$, $(a_1, q) = (18, -\frac{1}{3})$

$$\text{ i } S = \frac{27}{2},$$

ALBO

– wyznaczenie jednej z par (a_3, q) , dla której szereg geometryczny jest zbieżny

i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_3, q) = (2, \frac{1}{3})$ i $S = 27$, $(a_3, q) = (2, -\frac{1}{3})$

$$\text{ i } S = \frac{27}{2},$$

ALBO

– wyznaczenie jednej z par (a_2, q) , dla której szereg geometryczny jest zbieżny

i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_2, q) = (6, \frac{1}{3})$ i $S = 27$, $(a_2, q) = (-6, -\frac{1}{3})$

$$\text{ i } S = \frac{27}{2} \text{ (dla sposobu III).}$$

2 pkt – obliczenie a_1 : $a_1 = 2$ oraz $a_1 = 18$

ALBO

– obliczenie a_3 : $a_3 = 18$ oraz $a_3 = 2$,

ALBO

– obliczenie q^2 : $q^2 = 9$ oraz $q^2 = \frac{1}{9}$,

ALBO

– zapisanie alternatywy równań $-\frac{6}{q} - 6q = 20$ lub $\frac{6}{q} + 6q = 20$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie równania $\frac{36}{q^2} + 36q^2 = 328$ (dla *sposobu III*).

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (a_1 lub a_3 , lub q), np.

$$a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328, (20 - a_3)^2 + a_3^2 = 328, \frac{400}{(q^2 + 1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą a_2 , np. $a_2^2 = 36$, $20^2 - 2a_2^2 = 328$ (dla *sposobu III*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający odrzuci otrzymane wartości $q = 3$ oraz $q = -3$ (lub parę $(a_1, a_3) = (2, 18)$) bez komentarza, to może otrzymać **4 punkty** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający nie odrzuci wartości $q = 3$ oraz $q = -3$ i zastosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego dla $q = 3$ (albo dla $q = -3$), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
- a)** Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| < 1$ oraz co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| \geq 1$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (2 punkty za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q spełniających warunek $|q| < 1$, o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$).
- b)** Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej dwa ilorazy i wszystkie z nich spełniają warunek $|q| < 1$ oraz rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
- Jeżeli zdający popełni błąd, który nie jest rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| < 1$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q spełniających warunek $|q| < 1$, o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
- Jeżeli zdający odgadnie rozwiązanie układu równań $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$:
 $(a_1, a_3) = (18, 2)$ oraz obliczy poprawnie obie sumy szeregu: $S = 27$ i $S = \frac{27}{2}$ i nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający odgadnie rozwiązanie układu równań $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$:
 $(a_1, a_3) = (18, 2)$ oraz $(a_1, a_3) = (2, 18)$, ale nie obliczy poprawnie obu sum szeregu: $S = 27$ i $S = \frac{27}{2}$ lub obliczy sumę szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Z warunków $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328$$

$$2a_1^2 - 40a_1 + 72 = 0$$

$$a_1 = 2 \quad \vee \quad a_1 = 18$$

Gdy $a_1 = 2$, to $a_3 = 20 - a_1 = 18$ i wtedy $q^2 = 9$, więc $q = -3$ lub $q = 3$. Dla każdej z tych wartości ilorazu ciąg (a_n) jest rozbieżny i tym samym nie są spełnione warunki zadania.

Gdy $a_1 = 18$, to $a_3 = 20 - a_1 = 2$ i wtedy $q^2 = \frac{1}{9}$, więc $q = -\frac{1}{3}$ lub $q = \frac{1}{3}$. Dla każdej z tych wartości q ciąg (a_n) jest zbieżny, a ponieważ $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ oraz $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc dla obu tych wartości ilorazu istnieje suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) .

Dla $a_1 = 18$ i $q = -\frac{1}{3}$ suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Dla $a_1 = 18$ i $q = \frac{1}{3}$ suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

Sposób II

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Z warunku $a_1 + a_3 = 20$ otrzymujemy

$$a_1 + a_1 q^2 = 20, \text{ więc } a_1 = \frac{20}{q^2 + 1} \text{ i } a_1 \neq 0.$$

Stąd i z warunku $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + (a_1 q^2)^2 = 328$$

$$a_1^2 \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$\frac{400}{(q^2 + 1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$72q^4 - 656q^2 + 72 = 0$$

$$9q^4 - 82q^2 + 9 = 0$$

$$\Delta = (-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6400$$

$$q^2 = \frac{82 - 80}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9} \quad \vee \quad q^2 = \frac{82 + 80}{2 \cdot 9} = 9$$

$$q = -\frac{1}{3} \vee q = \frac{1}{3} \vee q = -3 \vee q = 3$$

Ponieważ $a_1 \neq 0$, więc dla $q = -3$ oraz $q = 3$ ciąg (a_n) nie jest zbieżny.

Gdy $q = -\frac{1}{3}$, to $a_1 = \frac{20}{q^2+1} = 18$ i ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy $q = \frac{1}{3}$, to $a_1 = \frac{20}{q^2+1} = 18$ i ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$$

Sposób III (poprzez a_2)

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Z warunków $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + a_3^2 = 328$$

$$(a_1 + a_3)^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

$$20^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

Stąd, po zastosowaniu własności ciągu geometrycznego, dostajemy

$$20^2 - 2a_2^2 = 328$$

$$a_2 = -6 \vee a_2 = 6$$

Przypadek 1. (gdy $a_2 = -6$).

Warunek $a_1 + a_3 = 20$ zapisujemy w postaci $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$ i obliczamy iloraz ciągu:

$$-\frac{6}{q} - 6q = 20$$

$$-6q^2 - 20q - 6 = 0$$

$$q = \frac{20-16}{-12} = -\frac{1}{3} \vee q = \frac{20+16}{-12} = -3$$

Gdy $q = -\frac{1}{3}$ i $a_2 = -6$, to ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1 - q} = \frac{18}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy $q = -3$ i $a_2 = -6$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

Przypadek 2. (gdy $a_2 = 6$).

Warunek $a_1 + a_3 = 20$ zapisujemy w postaci $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$ i obliczamy iloraz ciągu:

$$\frac{6}{q} + 6q = 20$$

$$6q^2 - 20q + 6 = 0$$

$$q = \frac{20 - 16}{12} = \frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{20 + 16}{12} = 3$$

Gdy $q = \frac{1}{3}$ i $a_2 = 6$, to ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

Gdy $q = 3$ i $a_2 = 6$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

Zadanie 11. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.5R) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ [...]; 8.7R) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$, $B = (-1, -2)$
oraz $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

4 pkt – zapisanie równania $\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M - \left(-\frac{13}{5}\right)\right] = -2 \cdot [x_M - (-1), y_M - (-2)]$
ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, który pozwala obliczyć

współrzędne punktu M , np. $\sqrt{(-1 - x_M)^2 + (-2 - y_M)^2} = \sqrt{2}$ oraz

$\sqrt{(x_M - 3,2)^2 + (y_M + 2,6)^2} = 2\sqrt{2}$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktów A oraz B : $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ i $B = (-1, -2)$

oraz zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A oraz B : $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ oraz

$B = (-1, -2)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np.

$(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$ **oraz** zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz

$y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np.

$(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$,

ALBO

– wyznaczenie równania prostej AB , np. $2x + 14y = -30$ **oraz** zapisanie równości

$x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$,

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów **oraz** wyznaczenie równania prostej AB ,

ALBO

- zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów **oraz** obliczenie współrzędnych środka odcinka AB : $\left(\frac{11}{10}, -\frac{23}{10}\right)$.

1 pkt – wyznaczenie równania prostej AB , np. $2x + 14y = -30$

ALBO

- zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$,

ALBO

- zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów **oraz** zapisanie/obliczenie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez środki okręgów: 7.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie identyfikuje punkt A jako $(-1, -2)$, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty A oraz B , których pierwsze współrzędne są liczbami dodatnimi, i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiązuje zadanie do końca, rozważając dwa przypadki, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty A oraz B , których pierwsze współrzędne są liczbami ujemnymi, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (trzeci punkt otrzymuje za zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy współrzędne punktów A oraz B , w których przecinają się okręgi O_1 oraz O_2 :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 - (x-2)^2 - (y-4)^2 = 5 - 45 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - x^2 + 4x - 4 - y^2 + 8y - 16 = -40 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 14y = -30 \quad / : 2 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7y = -15 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ (-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ 50y^2 + 230y + 260 = 0 \end{cases}$$

Stąd

$$y = -\frac{13}{5} \text{ lub } y = -2$$

Gdy $y = -\frac{13}{5}$ to wtedy $x = -7 \cdot \left(-\frac{13}{5}\right) - 15 = \frac{16}{5}$.

Gdy $y = -2$ to wtedy $x = -7 \cdot (-2) - 15 = -1$.

Ponieważ pierwsza współrzędna punktu A jest dodatnia, więc $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$

oraz $B = (-1, -2)$.

Oznaczmy przez x_M i y_M odpowiednie współrzędne punktu M , tj. $M = (x_M, y_M)$. Wtedy

$$\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$$

$$\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M - \left(-\frac{13}{5}\right)\right] = -2 \cdot [x_M - (-1), y_M - (-2)]$$

$$\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M + \frac{13}{5}\right] = [-2x_M - 2, -2y_M - 4]$$

$$x_M - \frac{16}{5} = -2x_M - 2 \quad \wedge \quad y_M + \frac{13}{5} = -2y_M - 4$$

$$x_M = \frac{2}{5} \quad \wedge \quad y_M = -\frac{11}{5}$$

Zatem $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

Zadanie 12. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.5R) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6.6R) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne [...].

Zasady oceniania (dla sposobów I–III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

4 pkt – zapisanie założenia $\cos x \neq 0$ oraz rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub

$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ (dla sposobów I oraz III)
ALBO

– rozwiązanie jednego z równań alternatywy $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ i $k \in \mathbb{Z}$, w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla sposobów I oraz III),
ALBO

– rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ oraz $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, **oraz** uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla sposobów I oraz III),
ALBO

– zapisanie założenia $\cos(2x) \neq 0$ oraz rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$

w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ (dla sposobu II),

ALBO

– rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla sposobu II).

3 pkt – zapisanie założenia $\cos x \neq 0$ oraz rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub

$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ oraz $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

oraz rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$(-\frac{2\pi}{3})$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

$(-\frac{\pi}{6})$ i $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

(dla *sposobów I* oraz *III*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– zapisanie założenia $\cos(2x) \neq 0$ oraz rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$

w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ **oraz** uzasadnienie, że liczby

postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$

(dla *sposobu II*).

2 pkt – przekształcenie równania do alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (dla

sposobów I oraz *III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$ **oraz**

uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobu I*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ (dla *sposobu II*).

1 pkt – przekształcenie równania do postaci $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$ (dla *sposobu I*)

ALBO

– zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania

$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci

$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$ (dla *sposobu III*),

ALBO

– uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0 \quad (\text{dla sposobów I oraz III}).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobów IV–V)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

4 pkt – rozwiązanie równania $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

(dla sposobu IV),

ALBO

– rozwiązanie równania $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

(dla sposobu IV),

ALBO

– rozwiązanie obydwu równań alternatywy $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$

w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \text{oraz} \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z} \quad (\text{dla sposobu V}),$$

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub

$$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \quad \text{oraz} \quad \text{rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy}$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ i } \frac{\pi}{3} \quad (\text{rozwiązania równania } \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6} \quad (\text{rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

(dla sposobu V),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ lub

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \quad \text{oraz} \quad \text{rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale}$$

$[-\pi, \pi]$, np.

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ i } \frac{\pi}{3} \quad (\text{rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6} \quad (\text{rozwiązania równania } \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

(dla sposobu V).

3 pkt – przekształcenie równania do postaci $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$ (dla sposobu IV)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$ (dla sposobu IV),

ALBO

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub $\sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = 0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$, np.

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k \text{ (rozwiązania równania } \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w zbiorze } \mathbb{R}),$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \text{ (rozwiązania równania } \sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = 0 \text{ w zbiorze } \mathbb{R}),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla **sposobu V**),

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$, np.

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k \text{ (rozwiązania równania } \sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \text{ w zbiorze } \mathbb{R}),$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \text{ (rozwiązania równania } \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w zbiorze } \mathbb{R}), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \text{ (dla } \textbf{sposobu V}).$$

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) = 0$ (dla **sposobu IV**)

ALBO

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ lub } \sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = 0 \text{ (dla } \textbf{sposobu V}),$$

ALBO

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \text{ lub } \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ (dla } \textbf{sposobu V}).$$

1 pkt – zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania

$$3 \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = 0 \text{ (dla } \textbf{sposobu IV})$$

ALBO

- zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci

$$(\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2 \sin x)(\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2 \sin x) = 0 \text{ (dla } \textbf{sposobu V}),$$

ALBO

- zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta i obliczenie wyróżnika Δ trójkianu kwadratowego $3\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x$ zmiennej np. $\cos x$:

$$\Delta = (4\sqrt{3} \sin x)^2.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- niepoprawne zastosowanie wzoru na sumę/różnicę cosinusów/sinusów,
- niepoprawne zastosowanie wzoru na iloczyn cosinusów/sinusów,
- błędne zastosowanie nieparzystości/parzystości funkcji trygonometrycznej,

ale zdający otrzyma elementarne równania trygonometryczne postaci $\sin(ax + b) = c$, $\cos(ax + b) = c$, gdzie $a \neq 0$, $a^2 \neq 1$, $b \neq 0$, $c \in [-1, 1]$, i rozwiązanie doprowadzi konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

2. Jeżeli zdający błędnie stosuje metodę analizy starożytnych, np. podnosi obie strony równania $3 \cos(2x) = -\sqrt{3} \sin(2x)$ do kwadratu i nie sprawdza rachunkiem, czy wszystkie otrzymane liczby są rozwiązaniami, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**; natomiast jeżeli odrzuci co najmniej jedno rozwiązanie „obce” (ale nie odrzuci wszystkich rozwiązań „obcych”), to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez wyrażenie $a(x)$ zawierające niewiadomą x i nie zapisze założenia $a(x) \neq 0$, ani też nie rozważy przypadku $a(x) = 0$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez sinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na sinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0 \text{ do postaci}$$

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy obie strony równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ przez $\cos^2 x$ i otrzymujemy

$$3 + \frac{2\sqrt{3} \sin x}{\cos x} - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$3 + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$-3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = 0$$

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3 = 48$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $\frac{\pi}{3} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $(-\frac{2\pi}{3})$ i $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $(-\frac{\pi}{6})$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, więc równanie $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ przyjmuje postać

$$3 \cdot 0^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 0$$

czyli $-3 = 0$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób II (poprzez cosinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie

$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ do postaci

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy obie strony równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ przez $\cos(2x)$ i otrzymujemy

$$3 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 0$$

$$\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd otrzymujemy cztery rozwiązania w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, więc równanie

$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ przyjmuje postać

$$3 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$$

i stąd $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$$

$$0^2 + 0^2 = 1$$

czyli $0 = 1$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań równania $3 \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = 0$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób III

Przekształcamy równanie $3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$$

$$3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3} \cos x + \sin x)^2 - 4 \sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2 \sin x)(\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2 \sin x) = 0$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = 0$$

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x \quad \vee \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$$

Przypadek 1. (gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy strony równań alternatywy przez $\cos x$ i otrzymujemy

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $\frac{\pi}{3} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, więc równania alternatywy $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ lub

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$ przyjmują postać

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \sqrt{3} \cdot 0 \quad \text{oraz} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0$$

i stąd $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$$

$$0^2 + 0^2 = 1$$

czyli $0 = 1$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań

równania $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ i nie ma rozwiązań równania $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób IV (poprzez cosinus podwojonego kąta i sinus sumy)

Przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na cosinus podwojonego kąta i sinus sumy kątów:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0 \quad /: 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób V

Przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x)^2 - 4\sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad /: 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd rozwiązaniami równania $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby:

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ oraz } \frac{\pi}{3}.$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \quad /: 2\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd rozwiązaniami równania $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby:

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6}.$$

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 13. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 918.

4 pkt – obliczenie długości krawędzi SC i BE : $|SC| = 34$ i $|BE| = 15$

ALBO

– obliczenie długości krawędzi SC i BS : $|SC| = 34$ i $|BS| = 5\sqrt{34}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi BS : $|BS| = 5\sqrt{34}$ i zapisanie, że trójkąt SBC jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt SBC jako prostokątny),

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i SB : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|BS| = 5\sqrt{34}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i SC : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|SC| = 34$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i BE : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|BE| = 15$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i zapisanie, że trójkąt SBC jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt SBC jako prostokątny).

3 pkt – obliczenie długości odcinka CE : $|CE| = 9$ **oraz** zapisanie równania pozwalającego obliczyć długość jednego z odcinków: SC , SB , SA , SE , np.:

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|SC|} \quad (|SC| \text{ z podobieństwa trójkątów } BCS \text{ i } ECB),$$

$$\frac{|CE|}{|OC|} = \frac{|AC|}{|SC|} \quad (|SC| \text{ z podobieństwa trójkątów } ECO \text{ i } ACS),$$

$$\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|SB|} \quad (|SB| \text{ z podobieństwa trójkątów } BCS \text{ i } ECB),$$

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|SB|} \quad (|SB| \text{ z podobieństwa trójkątów } ESB \text{ i } EBC),$$

$$\frac{|CE|}{|OE|} = \frac{|AC|}{|SA|} \quad (|SA| \text{ z podobieństwa trójkątów } ECO \text{ i } ACS),$$

$$|SE| \cdot |CE| = |BE|^2 \quad (|SE| \text{ z podobieństwa trójkątów } ESB \text{ i } EBC),$$

ALBO

– zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, w którym jedną z niewiadomych jest długość krawędzi BS , a drugą długość krawędzi SC , np.

$$|BS|^2 + (3\sqrt{34})^2 = |SC|^2 \text{ i } \frac{15}{3\sqrt{34}} = \frac{|BS|}{|SC|},$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością krawędzi BS albo długością krawędzi SC , albo długością krawędzi AS), np. $\left(\frac{15}{|BS|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1$,

$$\left(\frac{3\sqrt{34}}{|SC|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1, \left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{|AS|}\right)^2 = 1.$$

2 pkt – obliczenie długości x odcinka BE (lub DE): $x = 15$

ALBO

– obliczenie długości y odcinka EO : $y = 6\sqrt{2}$,

ALBO

– spełnienie warunku 2) i jednego z warunków 3), 4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

1 pkt – spełnienie jednego z poniższych warunków 1)-4):

1) obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\beta}{2} = |\angle BEO|$ (gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$), np.: $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5}$,

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{34}}{4}, \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5};$$

2) zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BED i zapisanie równania $(3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)$;

3) zdający zapisze, że trójkąt SBC (lub SDC) jest prostokątny i wskaże właściwy wierzchołek kąta prostego lub wynika to z rozwiązania, np.:

– zapisze równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa: $|SC|^2 = |BS|^2 + |BC|^2$,

– zapisze, że trójkąty CBS oraz CEB są podobne,

– zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów CBS oraz CEB , np.:

$$\frac{|BS|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|EC|},$$

– zapisze, że trójkąty BES oraz CEB są podobne,

– zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów BES oraz CEB , np.:

$$\frac{|ES|}{|BE|} = \frac{|BE|}{|EC|},$$

4) zapisze, że trójkąt OEC jest prostokątny lub wynika to z rozwiązania, np.:

– zdający zapisze równość $|OC|^2 = |OE|^2 + |EC|^2$,

– zapisze, że trójkąty OEC oraz SAC są podobne,

– zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów OEC oraz SAC , np.:

$$\frac{|OE|}{|OC|} = \frac{|AS|}{|CS|}.$$

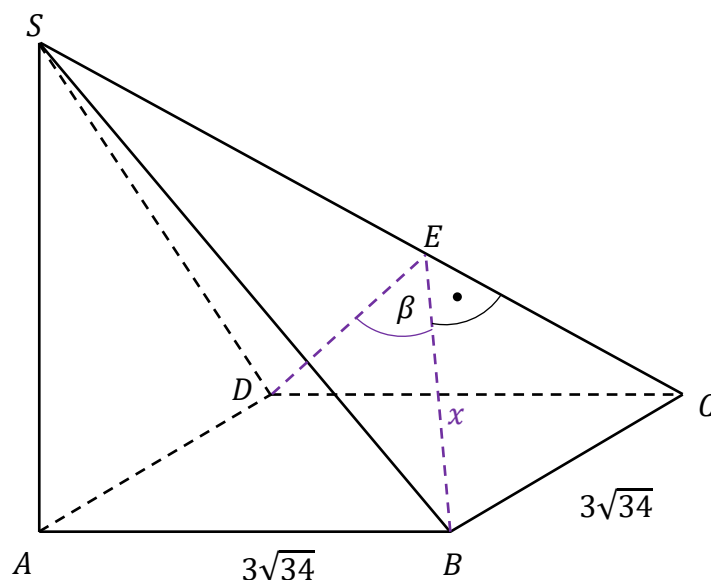
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** (za poprawną interpretację kąta między ścianami bocznymi oraz za zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BDE).
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu błędnie interpretuje kąt między ścianami bocznymi BCS i CDS , np. zakłada, że jest to kąt BSD , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** (za spełnienie warunku 3) z kryterium za 1 punkt).
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje inną bryłę i nie jest nią ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I (poprzez BE , CS , AS)*

Niech E będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B . Oznaczmy $x = |BE|$ (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE| = x$. Stosujemy do trójkąta BED twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |BD|^2 &= x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta \\
 (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \\
 x &= 15
 \end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BEC i obliczamy długość odcinka CE :

$$\begin{aligned}
 |CE|^2 &= |BC|^2 - |BE|^2 \\
 |CE|^2 &= (3\sqrt{34})^2 - 15^2 \\
 |CE| &= 9
 \end{aligned}$$

Trójkąt BCS jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż $AB \perp BC$ i odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka SB na płaszczyznę $ABCD$.

Trójkąty BCS i ECB są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów), więc

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|SC|}$$

$$\frac{9}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{|SC|}$$

$$|SC| = 34$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACS i obliczamy długość odcinka AS :

$$|AS|^2 = |SC|^2 - |AC|^2$$

$$|AS|^2 = 34^2 - (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2$$

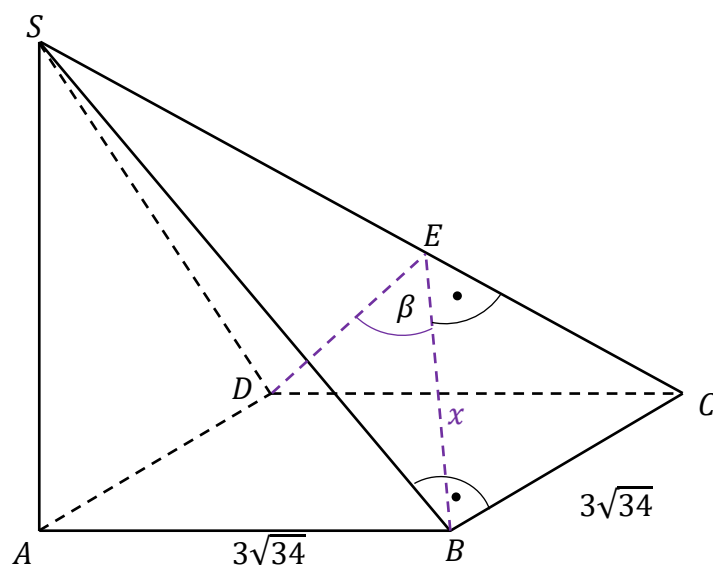
$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot |SC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 15 \cdot 34 = 918$$

Sposób 1a (poprzez BE , CE , BS , AS)

Niech E będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B . Oznaczmy $x = |BE|$ (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE| = x$. Stosujemy do trójkąta BED twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$\begin{aligned}|BD|^2 &= x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta \\ (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \\ x &= 15\end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BEC i obliczamy długość odcinka CE :

$$\begin{aligned}|CE|^2 &= |BC|^2 - |BE|^2 \\ |CE|^2 &= (3\sqrt{34})^2 - 15^2 \\ |CE| &= 9\end{aligned}$$

Trójkąt BCS jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż $AB \perp BC$ i odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka SB na płaszczyznę $ABCD$. Ponieważ kąt ostry przy wierzchołku C jest wspólnym kątem trójkątów prostokątnych BCE i BCS , więc są to trójkąty podobne. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{|BS|}{|BC|} &= \frac{|BE|}{|EC|} \\ \frac{|BS|}{3\sqrt{34}} &= \frac{15}{9} \\ |BS| &= 5\sqrt{34}\end{aligned}$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta ABS obliczamy długość odcinka AS :

$$\begin{aligned}|AS|^2 &= |BS|^2 - |AB|^2 \\ |AS|^2 &= (5\sqrt{34})^2 - (3\sqrt{34})^2 = (4\sqrt{34})^2 \\ |AS| &= 4\sqrt{34}\end{aligned}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |BC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} = 918$$

Sposób II (poprzez EO , SC , AS , BS)

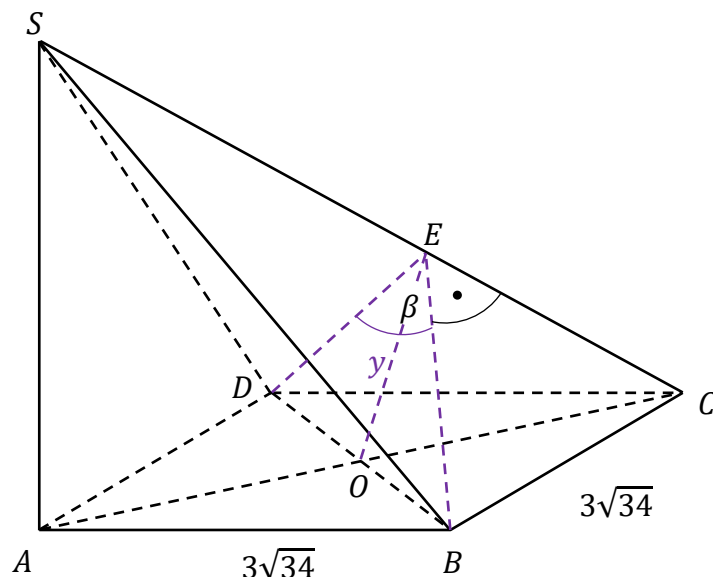
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

E – spodek wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B ,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

y – długość odcinka EO

(zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE|$.

Obliczamy sinus i cosinus kąta ostrego BEO :

$$\cos \beta = -\frac{9}{25}$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = -\frac{9}{25} \text{ oraz } 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 = -\frac{9}{25}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5} \text{ oraz } \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Obliczamy tangens kąta ostrego BEO :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{5}}{\frac{2\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

Obliczamy długość y odcinka EO :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{|BO|}{|EO|}$$

$$\frac{\sqrt{34}}{4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}{y}$$

$$y = 6\sqrt{2}$$

Ponieważ kąty SCA i OCE mają równe miary, więc korzystając z jedynki trygonometrycznej oraz definicji sinusa i cosinusa, otrzymujemy

$$\sin^2|\angle OCE| + \cos^2|\angle SCA| = 1$$

$$\left(\frac{y}{|OC|}\right)^2 + \left(\frac{|AC|}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{17}}{|SC|}\right)^2 = \frac{9}{17}$$

$$|SC| = 34$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACS i obliczamy długość krawędzi AS :

$$|AS|^2 + |AC|^2 = |SC|^2$$

$$|AS|^2 = 34^2 - (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2$$

$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABS i obliczamy długość krawędzi BS :

$$|BS|^2 = |AS|^2 + |AB|^2$$

$$|BS|^2 = (4\sqrt{34})^2 + (3\sqrt{34})^2$$

$$|BS| = 5\sqrt{34}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |BC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} = 918$$

Zadanie 14. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 3.1R) stosuje wzory Viète'a; 3.2R) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których miejsca zerowe funkcji f są tego samego znaku. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie i poprawne rozwiązanie nierówności $\frac{m+8}{2-m} > 0$: $m \in (-8, 2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za trzeci etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180: m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right).$$

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180, \text{ np.}$$

$$\left[\frac{2(2m+1)}{2-m}\right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180$$

1 pkt – przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 180$
ALBO

– przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci $\frac{\Delta}{a^2} \leq 180$ (lub

$$\frac{b^2 - 4ac}{a^2} \leq 180).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Czwarty etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki: $m \neq 2$ oraz $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ oraz $m \in (-8, 2)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$:
 $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki $m \neq 2$ oraz $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ oraz $m \in (-8, 2)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$: $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający w którymś z etapów I–III popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający w etapach I–III nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I–III i warunku $m \neq 2$, to za IV etap otrzymuje **1 punkt**; natomiast jeżeli otrzyma zbiory rozwiązań, które są rozłączne lub co najmniej jeden z nich jest zbiorem liczb rzeczywistych, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający w III etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm \frac{m+8}{2-m}$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm \frac{2(2m+1)}{2-m}$, lub $x_1 + x_2 = \pm \frac{b}{2a}$, to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów** (co najwyżej 1 punkt za I etap, co najwyżej 1 punkt za II etap i co najwyżej 3 punkty za III etap).
- Jeżeli zdający podczas przekształcania nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète'a popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, ale otrzyma nierówność postaci $(x_1 + x_2)^2 + k \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$, gdzie $k \neq -4$, to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za poprawne zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe tylko wówczas, gdy $2 - m \neq 0$ i wyróżnik Δ trójmianu $(2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$[-2(2m + 1)]^2 - 4 \cdot (2 - m)(m + 8) > 0$$

$$16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 > 0$$

$$20m^2 + 40m - 60 > 0$$

$$20(m - 1)(m + 3) > 0$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

Miejsca zerowe funkcji f mają ten sam znak tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$. Rozwiązujemy tę nierówność, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{m + 8}{2 - m} > 0$$

$$(m + 8)(2 - m) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in (-8, 2)$$

Przekształcamy warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskaną nierówność z niewiadomą m :

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$$

$$\left[\frac{-2(2m + 1)}{2 - m} \right]^2 - 4 \cdot \frac{m + 8}{2 - m} \leq 180$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4}{(m - 2)^2} + 4 \cdot \frac{(m + 8)(m - 2)}{(m - 2)^2} - \frac{180(m - 2)^2}{(m - 2)^2} \leq 0$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 - 180m^2 + 720m - 720}{(m - 2)^2} \leq 0$$

$$\frac{-160m^2 + 760m - 780}{(m - 2)^2} \leq 0$$

$$-160m^2 + 760m - 780 \leq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$8m^2 - 38m + 39 \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$\Delta_m = (-38)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 39 = 196$$

$$m = \frac{38 - 14}{16} = \frac{3}{2} \quad \vee \quad m = \frac{38 + 14}{16} = \frac{13}{4}$$

$$8\left(m - \frac{3}{2}\right)\left(m - \frac{13}{4}\right) \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , które jednocześnie spełniają warunki:

- $m \neq 2$
- $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
- $m \in (-8, 2)$
- $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$:

$$m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$$

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$, tylko wtedy, gdy $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

Zadanie 15. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 11.6R) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania**Część a)**

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie związku między promieniem podstawy stożka a wysokością stożka, np.

$$\frac{1}{2}rh = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{h^2 + r^2}, \left(\frac{5}{r}\right)^2 + \left(\frac{5}{h}\right)^2 = 1, \frac{r}{5} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 25}}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Część b)

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$ oraz

$$\text{obliczenie objętości stożka o takiej wysokości: } V(5\sqrt{3}) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}.$$

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V (lub funkcji $\frac{3}{\pi} \cdot V$): $h = 5\sqrt{3}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V (lub funkcji $\frac{3}{\pi} \cdot V$), np.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot (h^2 - 25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje

0 punktów za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu

funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji $25h^3$ oraz $h^2 - 25$ i dalej

popołnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $a \cdot \frac{75h^2(h^2 - 25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2}$ (gdzie $a \neq 0$)

lub $\frac{B(h)}{(h^2 - 25)^2}$, gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(5, +\infty)$

ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji, za obliczenie najmniejszej wartości funkcji V).

Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji $25h^3$ lub $h^2 - 25$ i dalej

popelnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{75h^2(h^2-25)-25h^3 \cdot 2h}{(h^2-25)^2}$ lub $\frac{B(h)}{(h^2-25)^2}$,

gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(5, +\infty)$ ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji i za obliczenie najmniejszej wartości funkcji V).

3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości h , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej

ORAZ:

– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości h funkcja V ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości h funkcja V ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.

4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktu za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości).
5. Jeżeli zdający, uzasadniając najmniejszą wartość funkcji, rozpatruje funkcję w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}_+$, to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pochodną i 1 punkt za miejsce zerowe pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązanie

a)

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych stożków. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A, B, C – wierzchołki trójkąta, który jest przekrojem osiowym stożka,

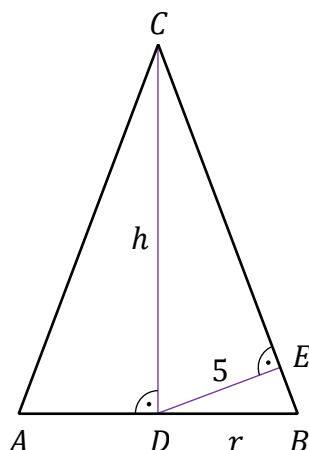
D – środek podstawy stożka,

E – spodek wysokości trójkąta DBC opuszczonej z wierzchołka D na bok BC ,

r – promień podstawy stożka,

h – wysokość stożka

(zobacz rysunek).



Zapisujemy pole trójkąta DBC na dwa sposoby i stosujemy twierdzenie Pitagorasa, otrzymując:

$$\frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |DC| = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DE|$$

$$\frac{1}{2} rh = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \cdot 5$$

$$r^2 h^2 = 25h^2 + 25r^2$$

$$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - 25}$$

Zatem objętość V stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{25h^2}{h^2 - 25} \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

To należało wykazać.

b)

Obliczamy argument, dla którego funkcja V określona wzorem $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$ dla $h \in (5, +\infty)$ osiąga wartość najmniejszą.

$$\text{Wyznaczamy pochodną funkcji } V: V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot (h^2 - 25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2 - 75)}{(h^2 - 25)^2}$$

dla $h \in (5, +\infty)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V :

$$V'(h) = 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2 - 75)}{(h^2 - 25)^2} = 0$$

$$25h^2(h^2 - 75) = 0$$

$$h = 0 \notin (5, +\infty) \vee h = -5\sqrt{3} \notin (5, +\infty) \vee h = 5\sqrt{3} \in (5, +\infty)$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(h) < 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2 - 75)}{(h^2 - 25)^2} < 0 \quad \wedge \quad h \in (5, +\infty)$$

$$h^2(h^2 - 75) < 0 \quad \wedge \quad h \in (5, +\infty)$$

$$h^2 < 75 \quad \wedge \quad h \in (5, +\infty)$$

$$h \in (5, 5\sqrt{3})$$

więc $V'(h) < 0$ dla $h \in (5, 5\sqrt{3})$ oraz $V'(h) > 0$ dla $h \in (5\sqrt{3}, +\infty)$.

Zatem funkcja V jest malejąca w przedziale $(5, 5\sqrt{3}]$ i rosnąca w przedziale $[5\sqrt{3}, +\infty)$.

Stąd funkcja V osiąga wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$. Wtedy

$$V(5\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25(5\sqrt{3})^3}{(5\sqrt{3})^2 - 25} = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$$

Uwaga.

Funkcja V jest różniczkowalna, więc jest ciągła. Ponadto $\lim_{h \rightarrow 5^+} V(h) = +\infty$ oraz

$\lim_{h \rightarrow +\infty} V(h) = +\infty$, więc uwzględniając wartość funkcji V w punkcie stacjonarnym $h = 5\sqrt{3}$

równą $V(5\sqrt{3}) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$, można wyciągnąć wniosek, że funkcja V osiąga wartość

najmniejszą równą $\frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$ dla argumentu $h = 5\sqrt{3}$.