

Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	5 marca 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	6 marca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 2. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 3. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $3^{94} + 9^{46} + 27^{30}$ do postaci $39 \cdot 3^{89} \cdot 7$

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $3^{94} + 9^{46} + 27^{30}$ do postaci $91 \cdot 3^{90}$.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie $3^{94} + 9^{46} + 27^{30}$ do postaci podstaw liczby 3:

$3^{94} + (3^2)^{46} + (3^3)^{30}$, co daje $3^{94} + 3^{92} + 3^{90}$. Wyciągamy najwyższy czynnik przed nawias:

$3^{90} \cdot (3^4 + 3^2 + 1)$. Upraszczamy $91 \cdot 3^{90}$. Rozpisujemy liczbę 91 na iloczyn liczb pierwszych:

$3^{90} \cdot 7 \cdot 13$, co daje końcowo $39 \cdot 3^{89} \cdot 7$. Liczba $3^{89} \cdot 7$ jest całkowita, zatem cała liczba

$3^{94} + 9^{46} + 27^{30}$ jest podzielna przez 39. ■

Zadanie 4. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 5. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 6. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 7. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 8. (0–3)

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $x = -\frac{5}{2}$

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $4x + 1 = \frac{6x-3}{2}$ (dla *sposobu I*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $4x^2 + 12x + 5 = 0$ (dla *sposobu II i III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\frac{8x+2-6x+3}{4x+2} = 0$ (dla *sposobu IV*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $(2x + 1)(2(4x + 1) - (6x - 3)) = 0$
(dla *sposobu V*)

1 pkt – zapisanie niezbędnych założeń oraz rozwiązanie ich: $x \neq -\frac{1}{2}$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązania

Zapisujemy konieczne założenia, aby spełniony był sens liczbowy:

$$2x + 1 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad 4x + 2 \neq 0$$

Stąd dziedzina: $x \neq -\frac{1}{2}$.

Sposób I

$$\frac{4x + 1}{2x + 1} = \frac{6x - 3}{4x + 2}$$

Mnożymy obustronnie przez $(2x + 1)$:

$$4x + 1 = \frac{6x - 3}{2}$$

Mnożymy obustronnie przez 2:

$$8x + 2 = 6x - 3$$

$$2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2} \in D$$

Sposób II

$$\frac{4x + 1}{2x + 1} = \frac{6x - 3}{4x + 2}$$

Z proporcji

$$(4x + 1)(4x + 2) = (6x - 3)(2x + 1)$$

$$\begin{aligned}
 16x^2 + 12x + 2 &= 12x^2 - 3 \\
 4x^2 + 12x + 5 &= 0 \\
 (2x + 5)(2x + 1) &= 0 \\
 x = -\frac{5}{2} \in D &\quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2} \notin D
 \end{aligned}$$

Sposób III

Skorzystamy z proporcji i wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned}
 \frac{4x + 1}{2x + 1} &= \frac{6x - 3}{4x + 2} \\
 (4x + 1)(4x + 2) &= (6x - 3)(2x + 1) \\
 (4x + 1)(4x + 2) &= 3(2x - 1)(2x + 1)
 \end{aligned}$$

Zwijamy w różnicę kwadratów

$$\begin{aligned}
 (4x + 1)(4x + 2) &= 3(4x^2 - 1) \\
 16x^2 + 12x + 2 &= 12x^2 - 3 \\
 4x^2 + 12x + 5 &= 0 \\
 (2x + 5)(2x + 1) &= 0 \\
 x = -\frac{5}{2} \in D &\quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2} \notin D
 \end{aligned}$$

Sposób IV

Przenosimy wszystkie wyrażenia na jedną stronę i sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\begin{aligned}
 \frac{4x + 1}{2x + 1} &= \frac{6x - 3}{4x + 2} \\
 \frac{4x + 1}{2x + 1} - \frac{6x - 3}{4x + 2} &= 0 \\
 \frac{2(4x + 1)}{2(2x + 1)} - \frac{6x - 3}{4x + 2} &= 0 \\
 \frac{8x + 2}{4x + 2} - \frac{6x - 3}{4x + 2} &= 0 \\
 \frac{8x + 2 - 6x + 3}{4x + 2} &= 0 \\
 \frac{2x + 5}{4x + 2} &= 0 \\
 2x + 5 &= 0 \\
 x = -\frac{5}{2} &\in D
 \end{aligned}$$

Sposób V

Wykorzystamy **grupowanie wyrazów**. Z proporcji wynika

$$\frac{4x+1}{2x+1} = \frac{6x-3}{4x+2}$$

$$(4x+1)(4x+2) = (6x-3)(2x+1)$$

Przenosimy wyrażenia na jedną stronę

$$(4x+1)(4x+2) - (6x-3)(2x+1) = 0$$

$$2(4x+1)(2x+1) - (6x-3)(2x+1) = 0$$

Wyciągamy $(2x+1)$ przed nawias

$$(2x+1)(2(4x+1) - (6x-3)) = 0$$

$$(2x+1)(8x+2-6x+3) = 0$$

$$(2x+1)(2x+5) = 0$$

$$x = -\frac{5}{2} \in D \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2} \notin D$$

Zadanie 9. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $x = 3$

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $(x-3)^2 \leq 0$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwijamy wzór skróconego mnożenia oraz przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę

$$3(x+1)^2 \geq 4(x^2+3)$$

$$3(x^2+2x+1) \geq 4x^2+12$$

$$3x^2+6x+3-4x^2-12 \geq 0$$

$$-x^2+6x-9 \geq 0$$

$$x^2-6x+9 \leq 0$$

$$(x-3)^2 \leq 0$$

Nierówność jest prawdziwa tylko wtedy, gdy

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x-3 = 0$$

$$x = 3$$

Zadanie 10. (0–4)**Zasady oceniania**

- 4 pkt – cztery odpowiedzi poprawne.
 3 pkt – trzy odpowiedzi poprawne.
 2 pkt – dwie odpowiedzi poprawne.
 1 pkt – jedna odpowiedź poprawna.
 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $[-4, -1) \cup (-1, 3) \cup (4, 5]$.
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-3, 4]$.
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą jest przedział $[1, 3)$.
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) \geq 3$ jest przedział $[-3, -1)$.

Zadanie 11.1 (0–2)**Zasady oceniania**

- 2 pkt – poprawne dwie odpowiedzi.
 1 pkt – poprawna jedna odpowiedź.
 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A F

Zadanie 11.2. (0–1)**Zasady oceniania**

- 1 pkt – odpowiedź poprawna.
 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 11.3. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

$(-1, 2)$

Zadanie 11.4. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 12. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 13. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełne rozumowania

1 pkt – wyznaczenie wyrazu a_{n+1} : $6^n \cdot 2$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ciąg jest geometryczny, gdy jego iloraz jest stałą liczbą rzeczywistą. Zatem $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Obliczamy wyraz a_{n+1} :

$$a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 3^n = 2^n \cdot 2 \cdot 3^n = 2^n \cdot 3^n \cdot 2 = 6^n \cdot 2$$

Wtedy:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6^n \cdot 2}{2^n \cdot 3^{n-1}} = \frac{6^n \cdot 2}{2^n \cdot 3^n \cdot 3^{-1}} = \frac{6^n \cdot 2}{2^n \cdot 3^n \cdot \frac{1}{3}} = \frac{6^n \cdot 2}{6^n \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

Iloraz ciągu (b_n) jest liczbą stałą i wynosi 6, zatem ciąg (b_n) jest geometryczny.

Zadanie 14. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

–97

Zadanie 15. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B2

Zadanie 16. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 17. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: 2

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{\sin^3 \beta}{\cos \beta} + \sin \beta \cdot \cos \beta$ do postaci $\operatorname{tg} \beta$

ALBO

– obliczenie wartości tangensa kąta β : $\operatorname{tg} \beta = 2$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunku $\frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{2}$ wynika, że $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 2$ a zatem $\operatorname{tg} \beta = 2$.

Przekształcamy wyrażenie $\frac{\sin^3 \beta}{\cos \beta} + \sin \beta \cdot \cos \beta$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 \beta}{\cos \beta} + \sin \beta \cdot \cos \beta &= \frac{\sin^3 \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos^2 \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin^3 \beta + \sin \beta \cdot \cos^2 \beta}{\cos \beta} = \\ &= \frac{\sin \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}{\cos \beta} \end{aligned}$$

Zauważamy jedynkę trygonometryczną: $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, więc

$$\frac{\sin \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta \cdot 1}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \beta = 2$$

Zadanie 18. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$

1 pkt – obliczenie współrzędnych środka odcinka $|AB|$: $S = (5,5)$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Symetralna ma równanie $y = ax + b$. Symetralna $y = ax + b$ przechodzi przez środek odcinka $|AB|$, więc liczymy współrzędne środka tego odcinka: $S = \left(\frac{3+7}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (5,5)$.

Obliczamy współczynniki a i b . Wykorzystamy do tego współrzędne punktów S oraz C :

$$\begin{cases} 1 = 11a + b \\ 5 = 5a + b \end{cases}$$

Po obustronnym odjęciu równań:

$$-4 = 6a$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

Wtedy

$$b = \frac{25}{3}$$

Symetralna ma równanie $y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$.

Zadanie 19. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 20. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 21. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 22. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 23. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 24. (0–3)

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: 27π

3 pkt – obliczenie długości tworzącej stożka: 6

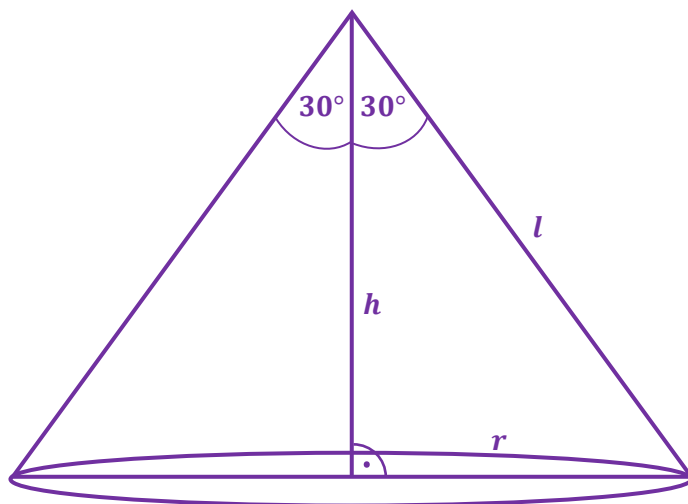
2 pkt – obliczenie długości promienia podstawy stożka i jego wysokości: $r = 3$ oraz $h = 3\sqrt{3}$

1 pkt – zapisanie związku między promieniem podstawy stożka i jego wysokością, np.:

$$r^2 = \frac{27\sqrt{3}}{h}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{h}$$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie



Zapisujemy równanie z dwiema niewiadomymi – promieniem podstawy i wysokością stożka.

Korzystamy z trygonometrii kąta prostego:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{h}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{h}$$

$$3r = \sqrt{3}h$$

$$h = \frac{3r}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}r$$

Ze wzoru na objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 9\sqrt{3}\pi$$

Dzielimy obustronnie przez $\frac{1}{3}\pi$

$$r^2 h = 27\sqrt{3}$$

Z zależności $h = \sqrt{3}r$

$$r^2 \cdot \sqrt{3}r = 27\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}r^3 = 27\sqrt{3}$$

$$r^3 = 27$$

$$r = 3$$

Stąd $h = 3\sqrt{3}$.

Obliczamy długość tworzącej stożka. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$3^2 + (3\sqrt{3})^2 = l^2$$

$$l^2 = 9 + 27$$

$$l^2 = 36$$

$$l = 6$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka. Korzystamy ze wzoru

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$P_c = 3\pi(3 + 6) = 27\pi$$

Zadanie 25. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 26. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $P(A) = \frac{33}{49}$

1 pkt – wyznaczenie $|A| = 33$

ALBO

– wyznaczenie $|\Omega| = 49$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω :

$$|\Omega| = 7^2 = 49$$

Obliczamy $|A|$. Zastosujemy rozwiązanie poprzez utworzenie tabelki.

	1	2	3	4	5	6	7
1	A	A	A	A		A	
2	A		A	A	A		A
3	A	A		A	A	A	
4	A	A	A			A	A
5		A	A			A	A
6	A		A	A	A		A
7		A		A	A	A	

Zatem $|A| = 33$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A .

$$P(A) = \frac{33}{49}$$

Zadanie 27.1. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 27.2. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 28. (0–4)**Zasady oceniania**

4 pkt – obliczenie największego możliwego pola tablicy i przedstawienie go w postaci

$$P = \frac{600(\sqrt{3}+6)}{11}$$

3 pkt – obliczenie długości boku, dla której pole tablicy jest największe, np. $a = \frac{20(\sqrt{3}+6)}{11}$

2 pkt – wyznaczenie wzoru funkcji opisującej pole tablicy przy pomocy jednej niewiadomej,

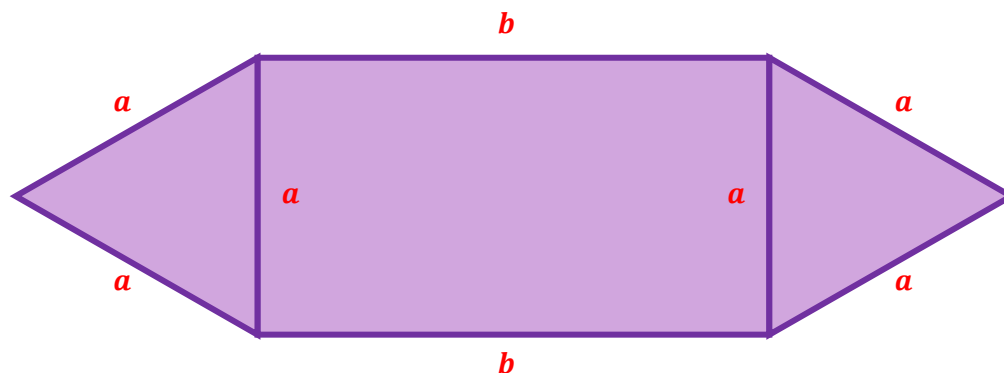
$$\text{np. } P(a) = \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) \cdot a^2 + 60 \cdot a$$

1 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji opisującej pole tablicy przy pomocy jednej niewiadomej, np. $a \in (0,20)$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Na obwód wraz z ramkami deweloper przeznacza 120 dm, zatem

$$a + b + a + a + b + a + a + a = 120$$

$$6a + 2b = 120$$

$$3a + b = 60$$

Wyznaczamy b :

$$b = 60 - 3a$$

Zapisujemy konieczne założenia i wyznaczamy dziedzinę funkcji opisującej pole tablicy.

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad b > 0$$

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad 60 - 3a > 0$$

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad 60 > 3a$$

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad a < 20$$

Zatem

$$a \in (0, 20)$$

Tworzymy wzór funkcji opisującej pole tablicy:

$$P = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + a \cdot b$$

$$P(a) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + a(60 - 3a) = \frac{2a(60 - 3a) + a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^2(\sqrt{3} - 6) + 120a}{2}$$

Co daje w rezultacie

$$P(a) = \left(\frac{\sqrt{3} - 6}{2} \right) a^2 + 60a$$

Funkcja $P(a)$ jest kwadratowa, zatem największą wartość osiągnie w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem. Wyznaczamy długość a , dla której funkcja P osiąga wartość maksymalną

$$p = -\frac{60}{2 \cdot \frac{\sqrt{3} - 6}{2}} = \frac{-60}{\sqrt{3} - 6} = \frac{-60(\sqrt{3} + 6)}{-33} = \frac{20(\sqrt{3} + 6)}{11} \in (0, 20)$$

Obliczamy największe możliwe pole tablicy. Jest nim $P\left(\frac{20(\sqrt{3}+6)}{11}\right)$.

Największe pole jest równe

$$q = \frac{-\left(60^2 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3} - 6}{2} \cdot 0\right)}{4 \cdot \frac{\sqrt{3} - 6}{2}} = \frac{-3600}{2(\sqrt{3} - 6)} = \frac{-1800}{\sqrt{3} - 6} = \frac{-1800(\sqrt{3} + 6)}{-33} = \frac{600(\sqrt{3} + 6)}{11}$$

Największe możliwe pole tej tablicy jest równe $\frac{600(\sqrt{3}+6)}{11} \text{ dm}^2$.