

Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2026

Rodzaj dokumentu:	Zasady oceniania rozwiązań zadań
Egzamin:	Egzamin maturalny
Przedmiot:	Matematyka
Poziom:	Poziom rozszerzony
Formy arkusza:	MMAP-R0-100
Termin egzaminu:	30 października 2025 r.
Data publikacji dokumentu:	31 października 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarymiczną [...] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia kwoty datku: 25 625 zł **oraz** rozstrzygnięcie, że fundacja **uzbierała** potrzebną kwotę w przeciągu dwóch tygodni.

1 pkt – obliczenie kwoty wpłaconego datku przez fundację: 25 625 zł
ALBO

– uzasadnienie, że fundacja uzbierała potrzebną kwotę w przeciągu dwóch tygodni.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Za rozstrzygnięcie, że fundacja uzbierała kwotę w przeciągu dwóch tygodni, nie uznaje się jedynie zapisanie odpowiedzi *tak*, lecz uzasadnienie poprzez komentarz słowny lub zapis matematyczny.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunków zadania $K(2) = 50\,225$ oraz $K(4) = 98\,441$, więc $50\,225 = W_0 \cdot k^2$ i $98\,441 = W_0 \cdot k^4$. Zatem

$$\frac{K(4)}{K(2)} = \frac{W_0 \cdot k^4}{W_0 \cdot k^2} = k^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{K(4)}{K(2)} = \frac{98\,441}{50\,225} = 1,96$$

Stąd

$$k^2 = 1,96$$

$$k = 1,4$$

Obliczamy kwotę wpłaconego datku W_0 :

$$50\,225 = W_0 \cdot 1,96$$

$$W_0 = 25\,625$$

Rozstrzygamy, czy fundacja uzbierała kwotę 2 500 000 zł na leczenie w przeciągu dwóch tygodni. Zauważmy, że $K(14) = 25\,625 \cdot (1,4)^{14}$ oraz $25\,625 \cdot (1,4)^{14} > 2\,500\,000$.

Na tej podstawie stwierdzamy, że fundacja uzbierała potrzebną kwotę w przeciągu 14 dni.

Zadanie 2. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy oraz poprawny wynik: $(+\infty)$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{\sqrt{2x^2-x}}{|x-6|-3}$ do postaci $\frac{\sqrt{2x^2-x}}{3-x}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie $\frac{\sqrt{2x^2-x}}{|x-6|-3}$ rozpisując wartość bezwzględną. Jako, że $x \rightarrow 3^-$, to

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{|x-6|-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{-(x-6)-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{3-x}$$

dla każdego $x \neq 3$ oraz $x \neq 9$.

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{2x^2-x} = \sqrt{15}$ oraz $\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x) = 0^+$, więc

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{|x-6|-3} = \left[\frac{\sqrt{15}}{0^+} \right] = +\infty$$

Zadanie 3. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 76.

2 pkt – spełnienie co najmniej dwóch z trzech kryteriów:

- obliczenie długości boku $|AB|$: 17
- obliczenie długości boku $|BC|$: 23
- skorzystanie z własności okręgu opisanego na czworokącie oraz zapisanie, że $\cos|\sphericalangle BCD| = \frac{2}{17}$.

1 pkt – obliczenie długości boku $|AB|$: 17

ALBO

- skorzystanie z własności okręgu opisanego na czworokącie oraz zapisanie, że $\cos|\sphericalangle BCD| = \frac{2}{17}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech $|\sphericalangle BAD| = \alpha$. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg,

zatem suma miar przeciwległych kątów tego czworokąta

musi być równa 180° . Wtedy $\alpha + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ$,

stąd $|\sphericalangle BCD| = 180^\circ - \alpha$. Wyznaczamy cosinus kąta BCD .

Korzystamy ze wzoru redukcyjnego:

$$\cos(|\sphericalangle BCD|) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha) = \frac{2}{17}.$$

Obliczamy długość boku $|AB|$ wykorzystując

twierdzenie cosinusów w trójkącie DAB :

$$(11\sqrt{6})^2 = |AB|^2 + 19^2 - 2 \cdot |AB| \cdot 19 \cdot \left(-\frac{2}{17}\right)$$

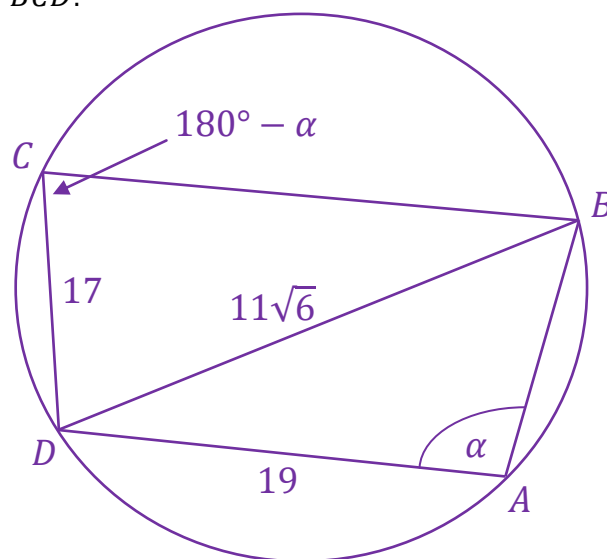
stąd $|AB| = 17$. Obliczamy długość boku $|BC|$ z

twierdzenia cosinusów w trójkącie BCD :

$$(11\sqrt{6})^2 = |BC|^2 + 17^2 - 2 \cdot |BC| \cdot 17 \cdot \frac{2}{17}$$

z czego otrzymujemy $|BC| = 23$.

Obliczamy obwód czworokąta $ABCD$: $17 + 23 + 17 + 19 = 76$.



Zadanie 4. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe [...].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{22}{35}$.

2 pkt – wyznaczenie mocy zdarzeń B oraz $A \cap B$.

1 pkt – wyznaczenie mocy zdarzenia B

ALBO

– wyznaczenie mocy zdarzenia $A \cap B$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Zdarzenie A polega na tym, że Franek otrzyma co najmniej dwie gałki spośród smaków: śmietankowego, truskawkowego, karmelowego albo pistacjowego.

Zdarzenie B polega na tym, że Franek otrzyma dokładnie jedną gałkę o smaku czekoladowym.

Zdarzenie $A \cap B$ polega na tym, że Franek otrzyma co najmniej dwie gałki spośród smaków: śmietankowego, truskawkowego, karmelowego albo pistacjowego, oraz otrzyma jedną gałkę o smaku czekoladowym, a także żaden smak się nie powtórzy.

Sposób I

Obliczamy moc zdarzenia B : $|B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{4}{3} = 22$.

Obliczamy moc zdarzenia $A \cap B$: $|A \cap B| = \binom{7}{3} = 35$.

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{22}{35}$$

Sposób II

Obliczamy moc zdarzenia B : $|B| = \binom{4}{1} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 528$.

Obliczamy moc zdarzenia $A \cap B$: $|A \cap B| = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{4}{1} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 840$.

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{528}{840} = \frac{22}{35}$$

Zadanie 5. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R5) korzysta ze wzorów na: [...] $(a + b)^n$ [...].

Zasady oceniania

- 3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj.
przekształcenie nierówności do postaci $(a + 2b)^2 > -2$ (*sposób I*) lub
 $2(a + b)^2 + 3b^2 > -1$ (*sposób II*) oraz uzasadnienie, że jest ona prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych.
- 2 pkt – przekształcenie nierówności do postaci: $2a^2 + (a + 2b)^2 + 2b^2 > 0$ (*sposób I*)
ALBO
– przekształcenie nierówności do postaci: $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{3}{2}b^2 + (a + b)^2 > 0$
(*sposób II*).
- 1 pkt – zapisanie nierówności z dwiema zmiennymi a i b oraz przeniesienie wszystkich wyrazów na jedną stronę nierówności: $3a^2 + 4ab + 6b^2 > 0$ (*sposób I*)
ALBO
– zapisanie nierówności z dwiema zmiennymi a i b oraz przeniesienie wszystkich wyrazów na jedną stronę nierówności: $\frac{3}{2}a^2 + 3b^2 + 2ab > 0$ (*sposób II*).
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy nierówność przy wykorzystaniu dwóch zmiennych a i b eliminując z niej c .

Z założenia $2b = a - c$ więc $c = a - 2b$. Otrzymujemy

$$2a^2 + 5b^2 > \frac{1}{2}(a - 2b)^2$$

Sposób I

Mnożymy obustronnie przez 2 oraz przenosimy wyrażenia na lewą stronę nierówności

$$4a^2 + 10b^2 > a^2 - 4ab + 4b^2$$

$$3a^2 + 4ab + 6b^2 > 0$$

Zauważamy wzór skróconego mnożenia $a^2 + 4ab + 4b^2$ oraz zbijamy wyrażenie w kwadrat sumy:

$$2a^2 + a^2 + 4ab + 4b^2 + 2b^2 > 0$$

$$2a^2 + 2b^2 + (a + 2b)^2 > 0$$

Z założenia $a^2 + b^2 = 1$, więc otrzymujemy

$$2 + (a + 2b)^2 > 0$$

$$(a + 2b)^2 > -2$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, zatem dana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych a , b i c .

Sposób II

Przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę nierówności oraz rozpisujemy wzór skróconego mnożenia

$$2a^2 + 5b^2 - \frac{1}{2}(a^2 - 4ab + 4b^2) > 0$$

$$\frac{3}{2}a^2 + 3b^2 + 2ab > 0$$

Rozbijamy wyrażenia na ułamki oraz zwiijamy we wzór na kwadrat sumy

$$\frac{1}{2}a^2 + 2b^2 + a^2 + 2ab + b^2 > 0$$

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{3}{2}b^2 + (a + b)^2 > 0$$

Z założenia $a^2 + b^2 = 1$, więc otrzymujemy

$$\frac{1}{2} + (a + b)^2 + \frac{3}{2}b^2 > 0$$

$$(a + b)^2 + \frac{3}{2}b^2 > -\frac{1}{2}$$

$$2(a + b)^2 + 3b^2 > -1$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny oraz suma kwadratów dwóch liczb nieujemnych jest również nieujemna, zatem dana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych a , b i c .

Zadanie 6. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie $2\sin \alpha$ względem wyrażenia pod pierwiastkiem: $\sqrt{\frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\sin \alpha}}$

(sposób I)

ALBO

– dopełnienie wyrażenia $R \cdot \sqrt{\frac{4\sin^3 \alpha}{\sin \alpha}}$ do wzoru na sinus potrojonego kąta:

$$R \cdot \sqrt{\frac{3\sin \alpha - (-4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha)}{\sin \alpha}} \quad (\text{sposób II}).$$

1 pkt – rozpisanie $\sin 3\alpha$ oraz doprowadzenie wyrażenia do postaci $3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$

(sposób I)

ALBO

– zastosowanie twierdzenia sinusów oraz zapisanie go w postaci $b = 2R \cdot \sin \alpha$

(sposób II).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Rozpisując $\sin 3\alpha$ otrzymujemy

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

Przekształcając równanie

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

uzyskujemy

$$4\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - \sin 3\alpha$$

Kąt α jest ostry, zatem dzielimy obustronnie przez $\sin \alpha$

$$4\sin^2 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\sin \alpha}$$

z czego wynika

$$2 \sin \alpha = \sqrt{\frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{\sin \alpha}}$$

Z twierdzenia sinusów $b = R \cdot 2 \sin \alpha$, co jest równoważne z $b = R \sqrt{\frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{\sin \alpha}}$.

Sposób II

Z twierdzenia sinusów: $b = 2R \cdot \sin \alpha$. Przekształcamy:

$$b = R \sqrt{4 \sin^2 \alpha} = R \sqrt{\frac{4 \sin^3 \alpha}{\sin \alpha}}$$

Dopełniamy licznik ułamka pod pierwiastkiem do wzoru na $\sin 3\alpha$:

$$b = R \sqrt{\frac{3 \sin \alpha - (-4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha)}{\sin \alpha}} = R \sqrt{\frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{\sin \alpha}}$$

co kończy dowód.

Zadanie 7. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 1000.

3 pkt – wyznaczenie pierwszego wyrazu nieskończonego ciągu: 200.

2 pkt – obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego: $q = \frac{4}{5}$ oraz odrzucenie ujemnej opcji.

1 pkt – zapisanie równania z którego można obliczyć iloraz ciągu, np. $\frac{16}{1-q^2} = \frac{400}{9}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystając z zależności $\sqrt{a_1 \cdot a_3} = 160$ obliczamy drugi wyraz ciągu geometrycznego:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_3} = \sqrt{a_2^2} = |a_2|$$

Ciąg (a_n) jest monotoniczny oraz ma wszystkie wyrazy dodatnie, zatem $a_2 = 160$.

Obliczamy iloraz ciągu z sumy wyrazów o numerach parzystych:

$$S_{2n} = \frac{a_2}{1-q^2} = \frac{160}{1-q^2} \quad \text{a także} \quad 444, (4) = \frac{4000}{9}, \quad \text{więc}$$

$$\frac{160}{1-q^2} = \frac{4000}{9}$$

Otrzymujemy równanie

$$q^2 = \frac{16}{25}$$

stąd $q = \frac{4}{5}$ lub $q = -\frac{4}{5}$, natomiast ciąg (a_n) jest monotoniczny, zatem $q = \frac{4}{5}$.

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{160}{\frac{4}{5}} = 200$. Obliczamy sumę wszystkich

wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) :

$$S = \frac{200}{1 - \frac{4}{5}} = 1000.$$

Zadanie 8. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie poprawnych wyników: 17 lub 61.

3 pkt – obliczenie długości wektora w jednym z dwóch przypadków: 17

ALBO

– obliczenie długości wektora w jednym z dwóch przypadków: 61.

2 pkt – wyznaczenie współrzędnych wektora $-8 \cdot \overrightarrow{AB}$ w obu przypadkach:

$[-4, -38]$ **oraz** $[4, 38]$.

1 pkt – wyznaczenie współrzędnych punktów A oraz B : $\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$ oraz $(1, 9)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający nie rozpatruje dwóch przypadków dla współrzędnych punktów A oraz B oraz rozwiązuje zadanie tylko dla jednego przypadku i otrzymuje poprawną odpowiedź, to za całe zadanie otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy współrzędne punktów A oraz B – są one punktami przecięcia parabol f i g :

$$x^2 + 8x = 3x^2 + 5x + 1$$

Stąd $x = 1$ lub $x = \frac{1}{2}$. Obliczamy drugie współrzędne punktów przecięcia. Otrzymujemy

$y = 9$ lub $y = \frac{17}{4}$. Stąd

$$\begin{cases} A_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right) \\ B_1 = (1, 9) \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} A_2 = (1, 9) \\ B_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right) \end{cases}$$

Przypadek 1° Niech $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$ oraz $B = (1, 9)$.

Obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = \left[1 - \frac{1}{2}, 9 - \frac{17}{4}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{19}{4}\right]$.

Obliczamy współrzędne wektora $-8 \cdot \overrightarrow{AB}$: $-8 \cdot \overrightarrow{AB} = \left[-8 \cdot \frac{1}{2}, -8 \cdot \frac{19}{4}\right] = [-4, -38]$.

Obliczamy współrzędne wektora $\vec{w}$: $\vec{w} = [-4 - 4, -38 + 23] = [-8, -15]$.

Obliczamy długość wektora $\vec{w}$: $|\vec{w}| = \sqrt{(-8)^2 + (-15)^2} = 17$.

Przypadek 2° Niech $A = (1, 9)$ oraz $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$.

Obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = \left[\frac{1}{2} - 1, \frac{17}{4} - 9\right] = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{19}{4}\right]$.

Obliczamy współrzędne wektora $-8 \cdot \overrightarrow{AB}$: $-8 \cdot \overrightarrow{AB} = \left[-8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), -8 \cdot \left(-\frac{19}{4}\right)\right] = [4, 38]$.

Obliczamy współrzędne wektora $\vec{w}$: $\vec{w} = [4 - 4, 38 + 23] = [0, 61]$.

Obliczamy długość wektora $\vec{w}$: $|\vec{w}| = \sqrt{0^2 + 61^2} = 61$.

Zadanie 9. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{20}, \frac{11\pi}{20}$.

3 pkt – rozwiązanie równania w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{oraz} \quad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

2 pkt – przedstawienie równania w postaci iloczynowej:

$$2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = 0.$$

1 pkt – przekształcenie lewej strony równania do postaci $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

ALBO

– przekształcenie prawej strony równania do postaci $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Przekształcamy równanie $\sin 6x - \cos 4x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot (\cos x - \sin x)$.

Sposób I

Przekształcamy lewą stronę równania. Korzystamy ze wzoru redukcyjnego oraz wzoru na różnicę sinusów

$$\sin 6x - \cos 4x = \sin 6x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Przekształcając prawą stronę równania skorzystamy ze wzoru na sumę kątów w cosinusie

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot (\cos x - \sin x) = 2 \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Następnie rozwiązujemy równanie $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Po pogrupowaniu dostajemy $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = 0$

oraz rozwiązujemy dwa równania: $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Otrzymujemy: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$

Zapisujemy rozwiązania należące do przedziału $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$: $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{20}, \frac{11\pi}{20}\right\}.$

Sposób II

Przekształcając zarówno lewą jak i prawą stronę równania zastosujemy wzór redukcyjny

$$L = \sin 6x - \cos 4x = \sin 6x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

oraz

$$P = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot (\cos x - \sin x) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right).$$

Stosując wzór na różnicę cosinusów uzyskujemy

$$\sqrt{2} \cdot \left(\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Korzystamy ponownie ze wzoru redukcyjnego otrzymując

$$-\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Następnie rozwiązujemy równanie $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Po pogrupowaniu dostajemy $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = 0$

oraz rozwiązujemy dwa równania: $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Otrzymujemy: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$

Zapisujemy rozwiązania należące do przedziału $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$: $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{20}, \frac{11\pi}{20}\right\}.$

Zadanie 10. (0–5)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania [...] kwadratowe z parametrami [...].

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu warunku $a \neq 0$ oraz nierówności $\Delta > 0$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie warunku $a \neq 0$ oraz poprawne rozwiązanie nierówności

$$\Delta > 0: m \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 4\right).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$ to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Jeżeli zdający rozważa opcję dla której $a = 0$ lub nie rozważy warunku $a \neq 0$ to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których miejsca zerowe funkcji f są przeciwnego znaku. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie i poprawne rozwiązanie nierówności $\frac{m-3}{2m+1} < 0$: $m \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $x_1^3 + x_2^3 > (x_1 + x_2)^4$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

2 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m , równoważnej warunkowi:

$$x_1^3 + x_2^3 > (x_1 + x_2)^4: m \in \left(-\infty, \frac{1-3\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1+3\sqrt{17}}{4}\right).$$

1 pkt – przedstawienie nierówności w postaci iloczynowej z jedną niewiadomą m :

$$(2m + 1)(4m^3 - 8m^2 - 35m + 53) > 0.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Czwarty etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki: $m \neq -\frac{1}{2}$ oraz $m \in \left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ oraz $m \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

oraz $m \in \left(-\infty, \frac{1-3\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1+3\sqrt{17}}{4}\right)$:

$$m \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki: $m \neq -\frac{1}{2}$ oraz $m \in \left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ oraz $m \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{1-3\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1+3\sqrt{17}}{4}\right)$: $m \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w którymś z etapów I–III popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający w etapach I–III nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I–III i warunku $m \neq -\frac{1}{2}$, to za IV etap otrzymuje **1 punkt**; natomiast jeżeli otrzyma zbiory rozwiązań, które są rozłączne lub co najmniej jeden z nich jest zbiorem liczb rzeczywistych, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w III etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm \frac{m-3}{2m+1}$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm \frac{6}{2m+1}$, lub $x_1 + x_2 = \pm \frac{b}{2a}$, to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za przekształcenie nierówności $x_1^3 + x_2^3 > (x_1 + x_2)^4$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów** (co najwyżej 1 punkt za I etap, co najwyżej 1 punkt za II etap i co najwyżej 3 punkty za III etap).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe wówczas, gdy $2m + 1 \neq 0$ wyróżnik trójmianu kwadratowego $(2m + 1) \cdot x^2 - 6x + m - 3$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunki:

$$2m + 1 \neq 0$$

$$m \neq -\frac{1}{2}$$

$$(-6)^2 - 4 \cdot (2m + 1) \cdot (m - 3) > 0$$

$$-8m^2 + 20m + 48 > 0$$

$$m \in \left(-\frac{3}{2}, 4\right) \quad \wedge \quad m \neq -\frac{1}{2}$$

Miejsca zerowe funkcji f mają przeciwny znak tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$.

Rozwiązujemy tę nierówność, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{m-3}{2m+1} < 0$$

$$(m-3)(2m+1) < 0$$

$$m \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

Przekształcamy warunek $x_1^3 + x_2^3 > (x_1 + x_2)^4$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskaną nierówność z niewiadomą m :

$$x_1^3 + x_2^3 > (x_1 + x_2)^4$$

$$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2)^3] > 0$$

$$(2m+1)(4m^3 - 8m^2 - 35m + 53) < 0$$

$$(2m+1)[2m^2(2m-3) - m(2m-3) - 19(2m-3)] < 0$$

$$(2m+1)(2m-3)(2m^2 - m - 19) < 0$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{1-3\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1+3\sqrt{17}}{4}\right)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , które jednocześnie spełniają warunki:

- $m \neq -\frac{1}{2}$
- $m \in \left(-\frac{3}{2}, 4\right)$
- $m \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$
- $m \in \left(-\infty, \frac{1-3\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1+3\sqrt{17}}{4}\right)$:

$$m \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

Zadanie 11. (0–5)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in \left(-3, -\frac{14}{5}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, 3\right)$.

4 pkt – przedstawienie nierówności w postaci iloczynowej czynników możliwie najniższego stopnia: $-2(3x - 7)(5x + 14)(x - 3)(x + 3) \geq 0$.

3 pkt – zapisanie nierówności w postaci jednego ułamka z uporządkowanymi wyrażeniami,

$$\text{np. } \frac{-15x^2 - 7x + 98}{2(x-3)(x+3)} \geq 0.$$

2 pkt – sprowadzenie nierówności do postaci jednego ułamka, np.

$$\frac{2(x+4) - x(x-3) - 2 \cdot 2x(x+3) - 5 \cdot 2 \cdot (x-3)(x+3)}{2(x-3)(x+3)} \geq 0.$$

1 pkt – zapisanie i rozwiązanie niezbędnych założeń: $x \neq 3 \quad \wedge \quad x \neq -3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi.

1. Jeżeli zdający nie zapisuje koniecznych założeń spełniających sens liczbowy oraz rozwiązuje zadanie i otrzymuje poprawny wynik z przedziałami domkniętymi, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający nie zapisuje koniecznych założeń spełniających sens liczbowy oraz konsekwentnie rozwiązuje nierówność, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełnia poważne błędy merytoryczne w zadaniu, np. mnoży obustronnie nierówność przez wielomiany bez pewności co do znaku wyrażenia oraz nierówności, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **1 punkt** – w przypadku podania poprawnej odpowiedzi.
4. Jeżeli zdający popełnia jednocześnie błędy wymienione w uwagach **1.–2.** oraz **3.**, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Aby spełniony był sens liczbowy nierówności, zapisujemy założenia

$$x^2 - 9 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad 2x + 6 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad x - 3 \neq 0$$

stąd

$$x \neq 3 \quad \text{oraz} \quad x \neq -3$$

Rozwiązujemy nierówność. Przenosimy wyrażenia na lewą stronę nierówności oraz sprowadzamy je do wspólnego mianownika

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x^2-9} - \frac{x}{2x+6} &\geq \frac{2x}{x-3} + 5 \\ \frac{2(x+4)}{2(x^2-9)} - \frac{x(x-3)}{2(x^2-9)} - \frac{2 \cdot 2x(x+3)}{2(x^2-9)} - \frac{5 \cdot 2(x^2-9)}{2(x^2-9)} &\geq 0 \\ \frac{2(x+4) - x(x-3) - 2 \cdot 2x(x+3) - 5 \cdot 2(x^2-9)}{2(x^2-9)} &\geq 0 \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu

$$\frac{-15x^2 - 7x + 98}{2(x^2 - 9)} \geq 0$$

Sprowadzamy do postaci iloczynowej

$$2(x^2 - 9)(-15x^2 - 7x + 98) \geq 0$$

Rozkładamy trójmian $-15x^2 - 7x + 98$ na czynniki

$$-2(3x - 7)(5x + 14)(x - 3)(x + 3) \geq 0$$

Obliczamy pierwiastki wielomianu oraz rysujemy jego wykres i odczytujemy znaki. Stąd

$$x \in \left[-3, -\frac{14}{5}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, 3\right] \quad \text{oraz} \quad x \neq 3 \quad \wedge \quad x \neq -3$$

Zatem zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności jest

$$x \in \left(-3, -\frac{14}{5}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, 3\right)$$

Zadanie 12. (0–5)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola graniastosłupów, ostrosłupów [...]

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $\sqrt{2}$.

4 pkt – wyznaczenie pola jednej ściany bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy

ostrosłupa, np. $\frac{\sqrt{2}}{4} a^2$ (*sposób I*)

ALBO

– wyznaczenie pola powierzchni bocznej ostrosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy, np. $\sqrt{2} \cdot a^2$ (*sposób II*).

3 pkt – wyznaczenie długości krawędzi bocznej ostrosłupa w zależności od długości

krawędzi podstawy, np. $\frac{\sqrt{3}}{2} a$ (*sposób I*)

ALBO

– wyznaczenie wysokości ściany bocznej ostrosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy, np. $\frac{\sqrt{2}}{2} a$ (*sposób II*).

2 pkt – wyznaczenie wysokości ściany bocznej w zależności od długości krawędzi bocznej

ostrosłupa, np. $\frac{\sqrt{6}}{3} c$ (*sposób I*)

ALBO

– wyznaczenie długości boku trójkąta utworzonego z krawędzi podstawy ostrosłupa i wysokości ściany bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy, np. $\frac{\sqrt{3}}{3} a$ (*sposób II*).

1 pkt – wyznaczenie wysokości ściany bocznej w zależności od długości krawędzi

podstawy ostrosłupa, np. $\frac{\sqrt{6}}{3} a$ (*sposób I*)

ALBO

– wyznaczenie długości boku trójkąta utworzonego z wysokości ściany bocznej ostrosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy, np. $\frac{\sqrt{6}}{3} a$ (*sposób II*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

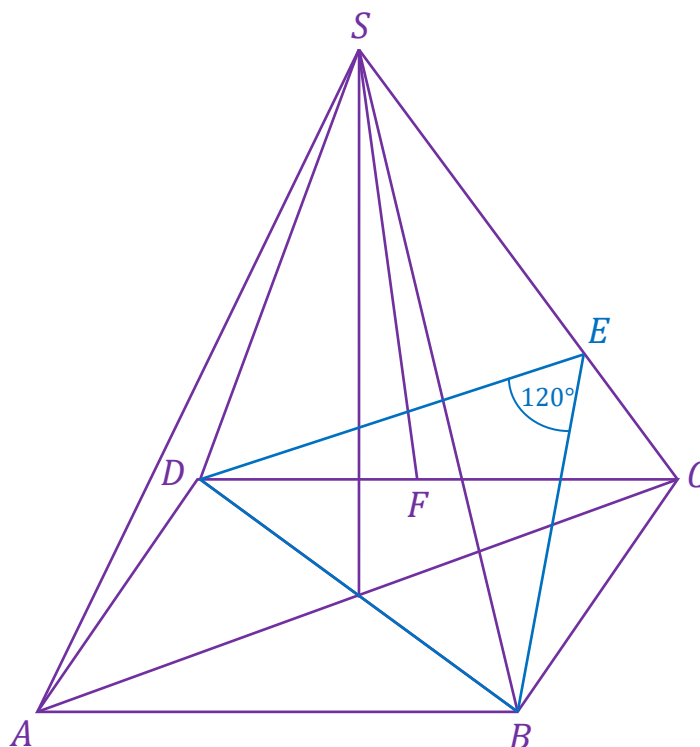
Przykładowe pełne rozwiązania

Niech krawędź podstawy ostrosłupa ma długość a .

Sposób I

Niech b oznacza długość jednej z wysokości ściany bocznej ostrosłupa – $|BE|$ oraz $|DE|$.

Niech c oznacza długość krawędzi bocznej ostrosłupa.



Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa jest równy 120° i $|BE| = |DE| = b$.

Wiedząc, że $|DB| = a\sqrt{2}$ korzystamy z twierdzenia cosinusów

$$(a\sqrt{2})^2 = b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot b \cdot \cos 120^\circ$$

rozpisując $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$b^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$b = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

Wyznaczamy wysokość $|SF|$ ściany bocznej poprzez porównanie pól trójkąta DCS

$$\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a \cdot c}{2} = \frac{a \cdot |SF|}{2}$$

stąd

$$|SF| = \frac{\sqrt{6}}{3}c$$

Wyznaczamy długość krawędzi bocznej w zależności od a . Korzystamy z twierdzenia

Pitagorasa w trójkącie FCS

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}c\right)^2 = c^2$$

$$c^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Obliczamy pole ściany bocznej – trójkąta DCS

$$P_{DCS} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa

$$P_p = a^2$$

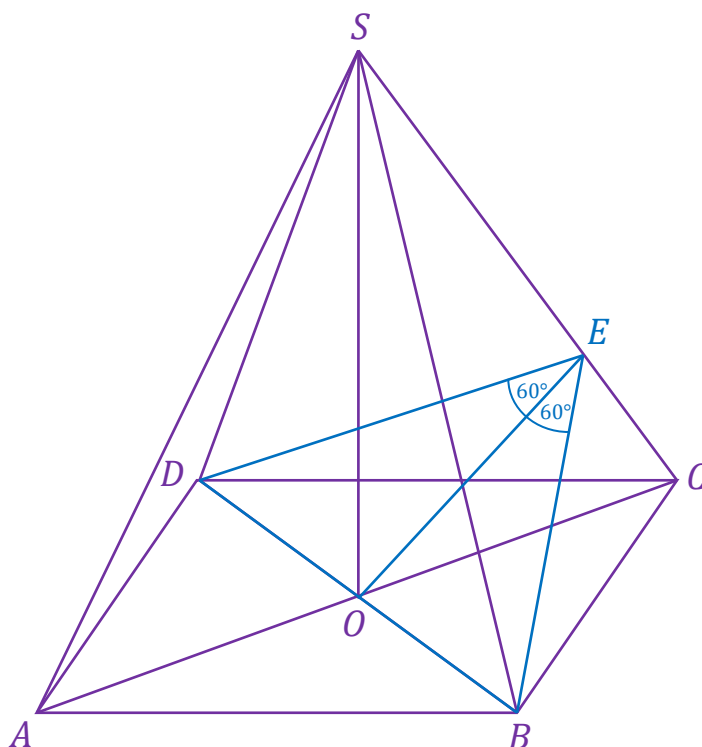
Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa

$$P_b = 4P_{DCS} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}a^2 = \sqrt{2}a^2$$

Obliczamy stosunek pola powierzchni bocznej do pola podstawy

$$\frac{P_b}{P_p} = \frac{\sqrt{2}a^2}{a^2} = \sqrt{2}$$

Sposób II



Wyznaczamy wysokość $|BE|$ przy użyciu funkcji trygonometrycznych

$$\sin 60^\circ = \frac{|OB|}{|BE|}$$

gdzie $|OB|$ to połowa przekątnej podstawy

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{|BE|}$$

stąd

$$|BE| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Wyznaczamy długość $|EC|$ korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BEC

$$|EC|^2 + |BE|^2 = |BC|^2$$

$$|EC|^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = a^2$$

$$|EC|^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$|EC| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Niech h oznacza wysokość ściany bocznej. Układamy zależność

$$\frac{h}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}a}$$

stąd

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \sqrt{2}a^2$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa

$$P_p = a^2$$

Obliczamy stosunek pola powierzchni bocznej do pola podstawy

$$\frac{P_b}{P_p} = \frac{\sqrt{2}a^2}{a^2} = \sqrt{2}$$

Zadanie 13.1. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

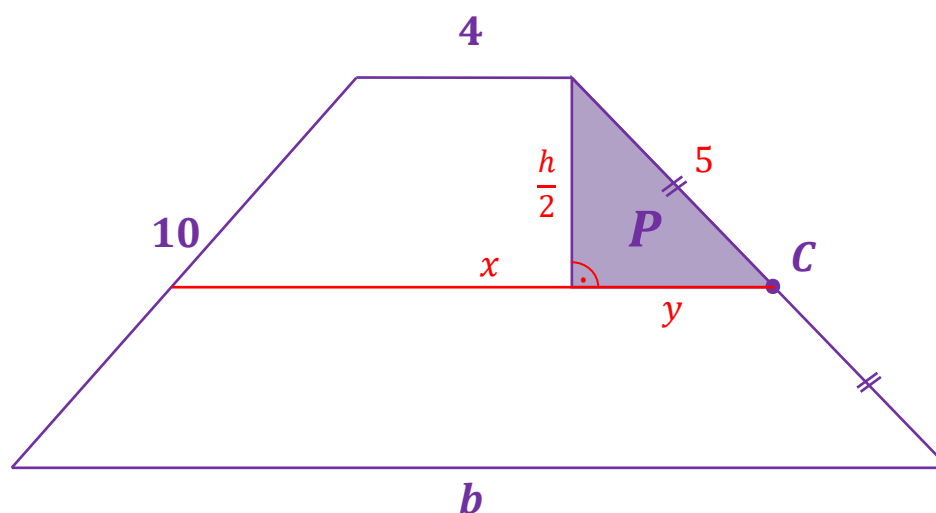
1 pkt – zapisanie pola trapezu przy użyciu jednej niewiadomej b :

$$P(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-4}{4} \cdot \frac{\sqrt{-b^2+8b+384}}{4}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I



Wyznaczamy x – jest to średnia arytmetyczna długości podstaw trapezu

$$x = \frac{b+4}{2}$$

Wyznaczamy y

$$y = \frac{x-4}{2} = \frac{\frac{b+4}{2}-4}{2} = \frac{b-4}{4}$$

Wyznaczamy $\frac{h}{2}$ wykorzystując twierdzenie Pitagorasa

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + y^2 = 5^2$$

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-4}{4}\right)^2 = 5^2$$

stąd

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{-b^2 + 8b + 384}{16}$$

$$\frac{h}{2} = \frac{\sqrt{-b^2 + 8b + 384}}{4}$$

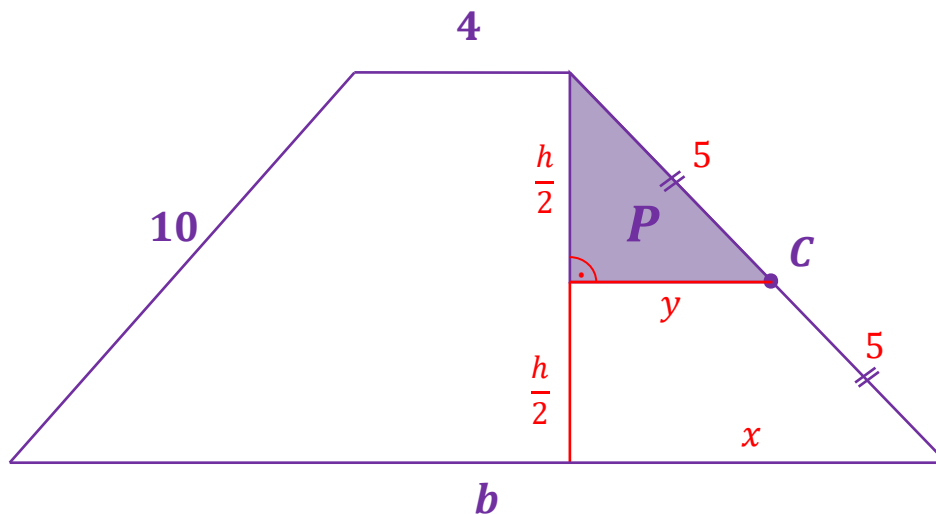
Obliczamy pole trójkąta P z niewiadomą b

$$P(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-4}{4} \cdot \frac{\sqrt{-b^2 + 8b + 384}}{4}$$

co po uproszczeniu daje

$$P(b) = \frac{\sqrt{-b^4 + 16b^3 + 304b^2 - 2944b + 6144}}{32}$$

Sposób II



Obliczamy x

$$x = \frac{b-4}{2}$$

Wyznaczamy y . Korzystamy z podobieństwa trójkątów (cecha kkk) oraz układamy stosunek

$$\frac{\frac{h}{2}}{y} = \frac{h}{x}$$

$$\frac{\frac{h}{2}}{y} = \frac{h}{\frac{b-4}{2}}$$

stąd

$$\frac{h}{2y} = \frac{2h}{b-4}$$

$$4y = b - 4$$

$$y = \frac{b-4}{4}$$

Wyznaczamy $\frac{h}{2}$ wykorzystując twierdzenie Pitagorasa

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-4}{4}\right)^2 = 5^2$$

stąd

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{-b^2 + 8b + 384}{16}$$

$$\frac{h}{2} = \frac{\sqrt{-b^2 + 8b + 384}}{4}$$

Obliczamy pole trójkąta P z niewiadomą b

$$P(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-4}{4} \cdot \frac{\sqrt{-b^2 + 8b + 384}}{4}$$

co po przekształceniu daje

$$P(b) = \frac{\sqrt{-b^4 + 16b^3 + 304b^2 - 2944b + 6144}}{32}$$

Zadanie 13.2. (0–5)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

5 pkt – uzasadnienie, że funkcja P przyjmuje wartość największą dla $b = 4 + 10\sqrt{2}$ i

obliczenie największego możliwego pola trójkąta: $\frac{25}{4}$

4 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja P

przyjmuje wartość największą dla $b = 4 + 10\sqrt{2}$

3 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji: $b = 4 + 10\sqrt{2}$

2 pkt – zapisanie równania pozwalającego na znalezienie pierwiastków pochodnej funkcji P :

$$b^3 - 12b^2 - 152b + 736 = 0$$

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji złożonej P , np.

$$P'(b) = \frac{1}{32} \cdot \frac{-4b^3 + 48b^2 + 608b - 2944}{2\sqrt{-b^4 + 16b^3 + 304b^2 - 2944b + 6144}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości b , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:
 - opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji P
LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości b funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość
LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości b funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.Jeżeli zdający nie przedstawi poprawnego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji P : $P'(b) = \frac{1}{32} \cdot \frac{-4b^3 + 48b^2 + 608b - 2944}{2\sqrt{-b^4 + 16b^3 + 304b^2 - 2944b + 6144}}$

dla $b \in (4, 24)$. Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji P

$$-4b^3 + 48b^2 + 608b - 2944 = 0$$

$$b^3 - 12b^2 - 152b + 736 = 0$$

$$b^2(b - 4) - 8b(b - 4) - 184(b - 4) = 0$$

$$(b - 4)(b^2 - 8b - 184) = 0$$

$$b - 4 = 0 \quad \text{lub} \quad b^2 - 8b - 184 = 0$$

$$b = 4 \notin (4, 24) \quad \text{lub} \quad b = 4 + 10\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad b = 4 - 10\sqrt{2} \notin (4, 24)$$

Badamy znak pochodnej

b	$(4, 4 + 10\sqrt{2})$	$4 + 10\sqrt{2}$	$(4 + 10\sqrt{2}, 24)$
$P'(b)$	+	0	-
$P(b)$	↗	$y_{\max} = \frac{25}{4}$	↘

Zatem dla $b = 4 + 10\sqrt{2}$ pole tego trójkąta jest największe. Obliczamy to pole

$$y_{\max} = P(4 + 10\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{40000 - 34560\sqrt{2} + 39680\sqrt{2} + 24320\sqrt{2} - 29440\sqrt{2}}}{32} = \frac{25}{4}$$