CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-660, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00
Termin egzaminu:	3 czerwca 2026 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 3^{-3}.

1 pkt – poprawne zastosowanie wzorów na logarytm potęgi oraz na różnicę logarytmów i obliczenie a: $a=\frac{36}{81}$

ALBO

– poprawne zastosowanie wzorów na zamianę podstawy logarytmu oraz na logarytm potęgi i obliczenie b: $b=6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy wzór na logarytm potęgi oraz wzór na różnicę logarytmów i obliczamy a:

$$a=16^{\frac{1}{2}\cdot\log_4 36-2\cdot\log_4 3}=\left(4^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot\log_4 36-2\cdot\log_4 3}=4^{\log_4 36-4\cdot\log_4 3}=4^{\log_4\left(\frac{36}{81}\right)}=\frac{36}{81}$$

Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu oraz wzór na logarytm potęgi i obliczamy b:

$$b=\log_2 9\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8=\frac{\log_3 9}{\log_3 2}\cdot\log_3 5\cdot\frac{\log_3 8}{\log_3 5}=\frac{2}{\log_3 2}\cdot\log_3 8=\frac{2}{\log_3 2}\cdot 3\log_3 2=6$$

Obliczamy $\frac{a}{2b}$:

[1]Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

$$\frac{a}{2b} = \frac{36}{81} : 12 = 3^{-3}$$

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $33\ 600$.

2 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich kodów spełniających warunki zadania, np.

$\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych ustawień cyfry 4 oraz cyfry 8:

$\binom{8}{3}$ oraz $\binom{5}{2}$ (lub $\binom{8}{2}$ oraz $\binom{6}{3}$)

ALBO

– wyznaczenie liczby wszystkich możliwych ustawień cyfr nieparzystych: $\binom{8}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Cyfrę 2 umieszczamy na pierwszej pozycji kodu.

Spośród ośmiu dostępnych pozycji w kodzie wybieramy trzy pozycje, na których umieścimy czwórki. Liczba wszystkich takich wyborów jest równa $\binom{8}{3}$.

Po umieszczeniu czwórek w kodzie mamy pięć dostępnych pozycji. Spośród nich wybieramy dwie, na których umieścimy ósemki. Liczba wszystkich takich wyborów jest równa $\binom{5}{2}$.

Pozostały jeszcze trzy nieobsadzone pozycje, na których należy umieścić trzy – parami różne – cyfry nieparzyste. Liczba wszystkich takich możliwych obsadzeń tych trzech pozycji jest równa $5 \cdot 4 \cdot 3$.

Korzystamy z reguły mnożenia i obliczamy liczbę wszystkich kodów spełniających warunki zadania:

$$\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 33\ 600$$

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a = 2$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a, np.

$$\frac{(2a^2+1)(a-1)-(a^3+a)\cdot 1}{(a-1)^2} = -\frac{1}{2}a$$

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f, np. $f'(x) = \dfrac{(2ax+1)(x-1)-\left(ax^2+x\right)\cdot 1}{(x-1)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{(2ax+1)(x-1)-(ax^2+x)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{ax^2-2ax-1}{(x-1)^2}$$

dla każdego $x \neq 1$.

Stąd i z warunku $f'(a) = -\frac{1}{2}a$ otrzymujemy:

$$\frac{a^3-2a^2-1}{(a-1)^2} = -\frac{1}{2}a \quad \wedge \quad a \neq 1$$

$$2a^3-4a^2-2 = -a(a-1)^2 \quad \wedge \quad a \neq 1$$

$$3a^3-6a^2+a-2 = 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$$

$$3a^2(a-2)+(a-2) = 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$$

$$(3a^2+1)(a-2) = 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$$

$$a = 2$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – przekształcenie nierówności do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować o prawdziwości nierówności, np. $0 \le (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$ (dla *sposobu I*)

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci uporządkowanej nierówności kwadratowej ze względu na niewiadomą x (lub niewiadomą y) **oraz** wyznaczenie i przeprowadzenie analizy znaku wyróżnika odpowiedniego trójmianu kwadratowego, np. poprzez zapisanie wyróżnika w postaci, z której można bezpośrednio wnioskować o jego znaku, lub poprzez naszkicowanie poprawnego wykresu trójmianu $-3y^2+6y-3$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $0 \le (x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2$ (dla *sposobu III*).

1 pkt – pomnożenie obu stron nierówności przez 2 i przekształcenie nierówności do postaci, w której występuje co najmniej jeden z następujących kwadratów: $(x-y)^2$ lub $(x-1)^2$, lub $(y-1)^2$, np. $(x-y)^2 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \ge 0$ (dla *sposobu I*)

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci uporządkowanej nierówności kwadratowej ze względu na niewiadomą x (lub niewiadomą y) **oraz** wyznaczenie wyróżnika odpowiedniego trójmianu kwadratowego, np. $0 \le x^2 - (y+1)x + (y^2-y+1)$ oraz $\Delta = -3y^2+6y-3$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $0 \le [(x-1)-(y-1)]^2 + (x-1)(y-1)$ (dla *sposobu III*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy nierówność równoważnie i otrzymujemy:

$$xy + x + y \le x^2 + y^2 + 1$$

$$2xy + 2x + 2y \le 2x^2 + 2y^2 + 2$$

$$0 \le x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$0 \le (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$$

Wszystkie składniki sumy $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2$ są nieujemne jako kwadraty liczb rzeczywistych, więc nierówność $0 \le (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y. Zatem nierówność $xy+x+y \le x^2+y^2+1$ jest również prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y.
To należało wykazać.

Sposób II
Przekształcamy nierówność równoważnie i otrzymujemy:

$$xy+x+y \le x^2+y^2+1$$

$$0 \le x^2-(y+1)x+(y^2-y+1)$$

Wyróżnik Δ trójmianu $x^2-(y+1)x+(y^2-y+1)$ zmiennej x jest równy

$$\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y+1)=-3y^2+6y-3=-3(y-1)^2$$

Wyróżnik jest niedodatni jako iloczyn liczby ujemnej i liczby nieujemnej $(y-1)^2$. Ponadto współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc trójmian $x^2-(y+1)x+(y^2-y+1)$ przyjmuje tylko wartości nieujemne. Zatem nierówność $0 \le x^2-(y+1)x+(y^2-y+1)$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y, więc również nierówność $xy+x+y \le x^2+y^2+1$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y.
To należało wykazać.

Sposób III
Przekształcamy nierówność równoważnie i otrzymujemy:

$$xy+x+y \le x^2+y^2+1$$

$$0 \le x^2+y^2-2xy+xy-x-y+1$$

$$0 \le (x-y)^2+x(y-1)-(y-1)$$

$$0 \le (x-y)^2+(x-1)(y-1)$$

$$0 \le [(x-1)-(y-1)]^2+(x-1)(y-1)$$

$$0 \le (x-1)^2-2(x-1)(y-1)+(y-1)^2+(x-1)(y-1)$$

$$0 \le (x-1)^2-(x-1)(y-1)+(y-1)^2$$

Tę nierówność możemy równoważnie zapisać w postaci

$$0 \le a^2-ab+b^2$$

gdzie $a=x-1$ oraz $b=y-1$. Zauważmy teraz, że $a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2$.

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0$ oraz $\frac{3}{4}b^2 \geq 0$. Zatem suma $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2$ jest nieujemna jako suma liczb nieujemnych. To oznacza, że nierówność $0 \leq a^2-ab+b^2$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b. Tym samym nierówność $xy+x+y \leq x^2+y^2+1$ jest również prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y. To należało wykazać.

Zadanie 5. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne. VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania (dla *sposobu I*)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – zapisanie, że $|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle KBC|$ oraz zapisanie wraz z uzasadnieniem, że na czworokącie $DBLK$ można opisać okrąg

ALBO

– zapisanie wraz z uzasadnieniem, że na czworokącie $DBLK$ można opisać okrąg oraz zapisanie wraz z uzasadnieniem, że $|\sphericalangle KBL| = |\sphericalangle KDL|$.

1 pkt – zapisanie, że $|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle KBC|$

ALBO

– zapisanie wraz z uzasadnieniem, że na czworokącie $DBLK$ można opisać okrąg.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobu II*)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – zapisanie wraz z uzasadnieniem, że na czworokącie $MDLC$ można opisać okrąg **oraz** zapisanie, że $|\sphericalangle CML| = |\sphericalangle CDL|$

ALBO

– zapisanie wraz z uzasadnieniem, że na czworokącie $MAKC$ można opisać okrąg **oraz** zapisanie, że $|\sphericalangle CMK| = |\sphericalangle CAK|$,

ALBO

– zapisanie wraz z uzasadnieniem, że na czworokącie $MDLC$ można opisać okrąg **oraz** zapisanie wraz z uzasadnieniem, że na czworokącie $MAKC$ można opisać okrąg.

1 pkt – zapisanie wraz z uzasadnieniem, że na czworokącie $MDLC$ można opisać okrąg

ALBO

– zapisanie wraz z uzasadnieniem, że na czworokącie $MAKC$ można opisać okrąg.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

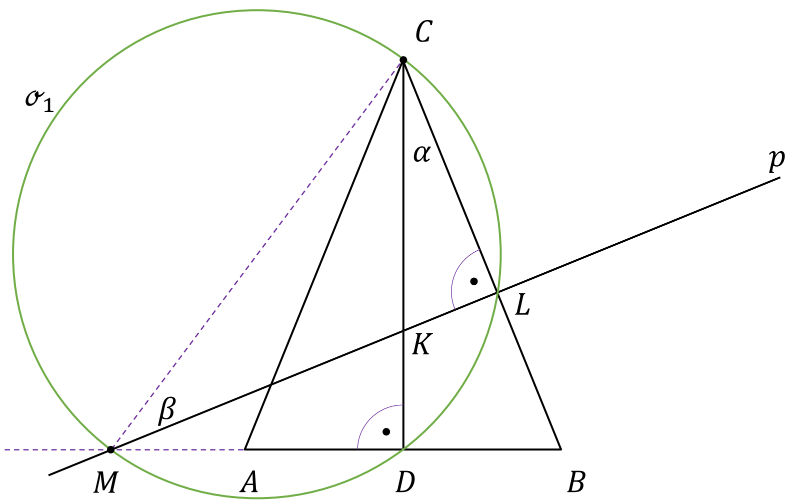
Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

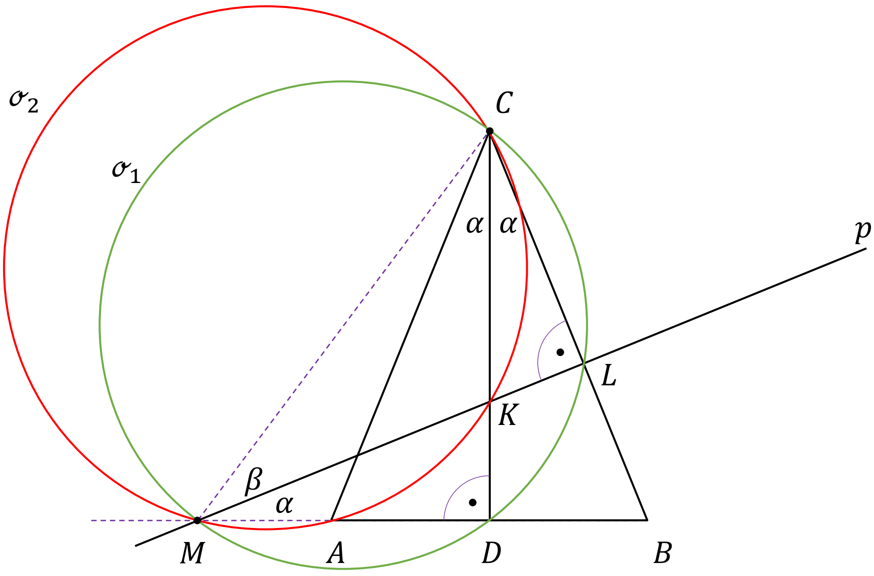
Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny i CD jest osią symetrii tego trójkąta, więc $|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle KBC| = |\sphericalangle KBL|$.
Ponieważ $|\sphericalangle KDB| = 90^\circ$ oraz $|\sphericalangle BLK| = 90^\circ$, więc na czworokącie $DBLK$ można opisać okrąg. W tym okręgu kąty wpisane KDL i KBL są oparte na tym samym łuku, więc mają równe miary. Zatem $|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle KBL| = |\sphericalangle KDL|$.
To należało wykazać.

Sposób II

Niech M będzie punktem przecięcia prostej p z prostą AB. Oznaczmy $\alpha = |\sphericalangle BCD|$ oraz $\beta = |\sphericalangle CML|$.
Trójkąt MCL jest prostokątny, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem odcinka MC, a promień tego okręgu jest równy $\frac{1}{2} \cdot |MC|$. Trójkąt MDC jest prostokątny, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem odcinka MC, a promień tego okręgu jest równy $\frac{1}{2} \cdot |MC|$. Zatem na czworokącie $MDLC$ można opisać okrąg. Oznaczmy ten okrąg przez σ_1 (zobacz rysunek).



Kąty LCD oraz LMD są wpisane w okrąg σ_1 i oparte na tym samym łuku LD, więc $|\sphericalangle LCD| = |\sphericalangle LMD| = \alpha$. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, więc $|\sphericalangle KCA| = |\sphericalangle DCA| = \alpha$. Zatem $|\sphericalangle KCA| = |\sphericalangle LMD| = |\sphericalangle KMA|$, a ponieważ punkty C oraz M są po tej samej stronie prostej AK, więc na czworokącie $MAKC$ można opisać okrąg. Oznaczmy ten okrąg przez σ_2 (zobacz rysunek).



Kąty wpisane KMC oraz KAC są oparte na tym samym łuku CK okręgu $\mathcal{O}_2$, więc $|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle KMC|$ i wobec $|\sphericalangle KMC| = |\sphericalangle LMC|$ mamy $|\sphericalangle KAC| = \beta$.
Kąty wpisane CDL oraz LMC są oparte na tym samym łuku CL okręgu $\mathcal{O}_1$, więc $|\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle LMC| = \beta$. Zatem $|\sphericalangle KAC| = \beta = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle KDL|$.
To należało wykazać.

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Zasady oceniania (dla *sposobu I*)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{5}{29}$.

3 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B: $P(B) = \frac{116}{900}$.

2 pkt – zapisanie/obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń A_1, A_2 i A_3 **oraz** prawdopodobieństw $P(B|A_1)$, $P(B|A_2)$ i $P(B|A_3)$: $P(A_1) = \frac{2}{9}$ oraz $P(A_2) = \frac{3}{9}$, oraz $P(A_3) = \frac{4}{9}$, oraz $P(B|A_1) = \frac{10}{100}$, oraz $P(B|A_2) = \frac{12}{100}$, oraz $P(B|A_3) = \frac{15}{100}$.

1 pkt – zapisanie/obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń A_1, A_2 i A_3: $P(A_1) = \frac{2}{9}$ oraz $P(A_2) = \frac{3}{9}$, oraz $P(A_3) = \frac{4}{9}$

ALBO

– zapisanie/obliczenie prawdopodobieństw $P(B|A_1)$, $P(B|A_2)$ i $P(B|A_3)$:

$P(B|A_1) = \frac{10}{100}$ oraz $P(B|A_2) = \frac{12}{100}$, oraz $P(B|A_3) = \frac{15}{100}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobu II*)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{5}{29}$.

3 pkt – wyznaczenie prawdopodobieństw zdarzeń $A_1 \cap B$ oraz B, np. $P(A_1 \cap B) = \frac{0{,}2}{9}$

oraz $P(B) = \frac{1{,}16n}{2n + 3n + 4n}$,

ALBO

– zapisanie liczby bochenków chleba razowego dostarczonego przez piekarnię $\mathcal{P}_1$ oraz łącznej liczby bochenków chleba razowego dostarczonego przez piekarnie w zależności od jednej zmiennej, np. $0{,}2n$ oraz $1{,}16n$.

2 pkt – wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A_1 \cap B$, np.

$P(A_1 \cap B) = \frac{0{,}2n}{2n + 3n + 4n}$

ALBO

– wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B, np. $P(B) = \frac{1{,}16n}{2n + 3n + 4n}$,

ALBO

– zapisanie liczby bochenków chleba dostarczonego przez poszczególne piekarnie oraz liczby bochenków chleba razowego dostarczonego przez piekarnię $\mathcal{P}_1$ w zależności od jednej zmiennej, np. $2n$ oraz $3n$ i $4n$ oraz $0{,}2n$.

1 pkt – zapisanie liczby bochenków chleba dostarczonego przez poszczególne piekarnie w zależności od jednej zmiennej, np. $2n$ oraz $3n$ i $4n$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A_1 – zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany chleb pochodzi z piekarni $\mathcal{P}_1$,

A_2 – zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany chleb pochodzi z piekarni $\mathcal{P}_2$,

A_3 – zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany chleb pochodzi z piekarni $\mathcal{P}_3$,

B – zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany chleb jest razowy.

Wtedy $P(A_1) = \frac{2}{9}$, $P(A_2) = \frac{3}{9}$, $P(A_3) = \frac{4}{9}$ oraz $P(B|A_1) = \frac{10}{100}$, $P(B|A_2) = \frac{12}{100}$ i $P(B|A_3) = \frac{15}{100}$.

Ponieważ zdarzenia A_1, A_2, A_3 są parami rozłączne i $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ oraz prawdopodobieństwa tych zdarzeń są dodatnie, więc możemy obliczyć $P(B)$, stosując wzór na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{10}{100} + \frac{3}{9} \cdot \frac{12}{100} + \frac{4}{9} \cdot \frac{15}{100} = \frac{116}{900}$$

Stosujemy wzór Bayesa i obliczamy prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany chleb pochodzi z piekarni $\mathcal{P}_1$, jeżeli wiadomo, że ten chleb jest razowy:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{9} \cdot \frac{10}{100}}{\frac{116}{900}} = \frac{5}{29}$$

Sposób II

Stosunek liczby bochenków chleba dostarczonego przez piekarnie $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ oraz $\mathcal{P}_3$ do tego supermarketu jest równy – odpowiednio – $2 : 3 : 4$, więc liczby bochenków chleba dostarczonego do supermarketu przez piekarnie $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ oraz $\mathcal{P}_3$ wynoszą – odpowiednio – $2n$, $3n$ oraz $4n$ (przy pewnym n całkowitym dodatnim).

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A_1 – zdarzenie polegające na tym, że wybrany losowo chleb pochodzi z piekarni $\mathcal{P}_1$,

B – zdarzenie polegające na tym, że wybrany losowo chleb jest razowy.

Z warunków zadania wynika, że liczba bochenków chleba razowego dostarczonego z piekarni:

- $\mathcal{P}_1$ jest równa $0{,}1 \cdot 2n = 0{,}2n$
- $\mathcal{P}_2$ jest równa $0{,}12 \cdot 3n = 0{,}36n$
- $\mathcal{P}_3$ jest równa $0{,}15 \cdot 4n = 0{,}6n$.

Zatem łączna liczba bochenków chleba razowego dostarczonego do supermarketu jest równa $0{,}2n + 0{,}36n + 0{,}6n = 1{,}16n$.

Dlatego $P(B) = \frac{1{,}16n}{2n + 3n + 4n} = \frac{29}{225}$ oraz $P(A_1 \cap B) = \frac{0{,}2n}{2n + 3n + 4n} = \frac{1}{45}$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany chleb pochodzi z piekarni $\mathcal{P}_1$, jeśli wiadomo, że ten chleb jest razowy:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{45}}{\frac{29}{225}} = \frac{5}{29}$$

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$a_n = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

3 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą q (lub a_1).

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą q (lub a_1), np. $\frac{[14 \cdot (1-q)]^3}{1-q^3} = 392$,

$\frac{a_1^3}{1-\left(1-\frac{a_1}{14}\right)^3} = 392$.

1 pkt – wyznaczenie a_1 w zależności od q: $a_1 = 14(1-q)$

ALBO

– zapisanie dwóch równań z dwiema niewiadomymi a_1 oraz q, które wynikają z warunków dotyczących sumy wszystkich wyrazów ciągu i sumy sześcianów wszystkich wyrazów ciągu, np. $\frac{a_1}{1-q} = 14$ oraz $\frac{a_1^3}{1-q^3} = 392$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełnia w rozwiązaniu błędy rachunkowe, w wyniku których otrzymuje równanie z jedną niewiadomą q, które nie ma rozwiązań spełniających warunek $|q| < 1$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający zapisuje sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jako sumę n początkowych wyrazów ciągu i na tym opiera swoje rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n). Ponieważ suma wszystkich wyrazów tego ciągu istnieje i jest równa 14, więc

$$\frac{a_1}{1-q} = 14 \ \wedge \ |q| < 1$$

Stąd $a_1 = 14(1-q)$, gdzie $|q| < 1$.

Ciąg sześcianów wyrazów ciągu (a_n) jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie równym a_1^3 i ilorazie q^3. Ponieważ $|q| < 1$, więc $|q^3| < 1$. Zatem z warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{a_1^3}{1-q^3}=392$$

Stąd i z zależności $a_1=14(1-q)$ otrzymujemy dalej:

$$\frac{14^3\cdot(1-q)^3}{1-q^3}=392$$

$$\frac{7(1-q)^3}{(1-q)(1+q+q^2)}=1$$

$$7(1-q)^2=1+q+q^2 \quad \wedge \quad q\neq 1$$

$$6q^2-15q+6=0 \quad \wedge \quad q\neq 1$$

$$q=\frac{1}{2} \quad \vee \quad q=2$$

Po uwzględnieniu warunku $|q|<1$ otrzymujemy $q=\frac{1}{2}$. Zatem $a_1=14(1-q)=7$.

Wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n=7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; VI.6) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(x,y,z)=(1,3,9)$ oraz

$(x,y,z)=\left(\frac{1}{9},\frac{7}{9},\frac{49}{9}\right)$.

3 pkt – obliczenie r: $r=2$ oraz $r=\frac{2}{3}$ (dla *sposobu I*)

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą x (lub y, lub z), np.:

$\left(\frac{5x+1}{2}\right)^2=x\left[2\cdot\left(\frac{5x+1}{2}\right)+4-x\right]$,

$y^2=\left(2y-\frac{8y+21}{5}+4\right)\cdot\left(\frac{8y+21}{5}\right)$,

$\left(\frac{\frac{z-5}{4}+z-4}{2}\right)^2=\frac{z-5}{4}\cdot z$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– obliczenie q (lub x): $q = 3$ oraz $q = 7$ (lub: $x = \frac{1}{9}$ oraz $x = 1$)
(dla *sposobu III*).

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r, np. $r^2 = 4(r^2 - 2r + 1)$
(dla *sposobu I*)
ALBO
– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema niewiadomymi x, y (lub y, z, lub z, x), np.:
$y^2 = x(2y + 4 - x)$ oraz $(y-1)^2 = x(2y - x - 1)$,
$y^2 = (2y - z + 4)z$ oraz $(y-1)^2 = (2y - z + 4)(z - 5)$,
$\left(\frac{x+z-4}{2}\right)^2 = xz$ oraz $\left(\frac{x+z-4}{2} - 1\right)^2 = x(z-5)$ (dla *sposobu II*),
ALBO
– zapisanie równania z jedną niewiadomą q (lub x), np.
$\frac{1}{2q-5} = \frac{4}{(q-1)^2}$ (dla *sposobu III*).

1 pkt – zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema niewiadomymi (z których jedną jest r), np.
$(x+r)^2 = x(x + 2r + 4)$ oraz $(x + r - 1)^2 = x(x + 2r + 4 - 5)$
(dla *sposobu I*)
ALBO
– wyznaczenie x w zależności od r, np. $x = r^2 - 2r + 1$ (dla *sposobu I*),
ALBO
– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi x, y, z, np.:
$y^2 = x \cdot z$ oraz $y = \frac{x+z-4}{2}$ oraz $(y-1)^2 = x \cdot (z-5)$ (dla *sposobu II*),
ALBO
– zapisanie równania z dwiema niewiadomymi x, y (lub y, z, lub z, x), np.
$y^2 = x(2y + 4 - x)$, $(y-1)^2 = (2y - z + 4) \cdot (z - 5)$ (dla *sposobu II*),
ALBO
– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema niewiadomymi (z których jedną jest q), np.
$xq = \frac{x + xq^2 - 4}{2}$ oraz $(xq - 1)^2 = x \cdot (xq^2 - 5)$ (dla *sposobu III*),
ALBO
– wyznaczenie x w zależności od q (lub q w zależności od x), np.
$x = \frac{4}{(q-1)^2}$ (dla *sposobu III*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przyjmuje, że $y = \sqrt{x \cdot z}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający otrzyma więcej niż dwa ciągi (x, y, z), wśród których dwa są właściwe: $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ oraz $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$, i nie odrzuci pozostałych ciągów, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający myli ciąg geometryczny z arytmetycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez r)

Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego $(x, y, z-4)$. Wówczas $y = x + r$ oraz $z = x + 2r + 4$. Ponieważ ciąg (x, y, z) jest geometryczny, więc korzystamy z własności ciągu geometrycznego i otrzymujemy:

$$(x+r)^2 = x(x+2r+4)$$

$$x^2 + 2xr + r^2 = x^2 + 2xr + 4x$$

$$r^2 = 4x$$

Ponieważ ciąg $(x, y-1, z-5)$ jest geometryczny, więc korzystamy z własności ciągu geometrycznego i otrzymujemy:

$$(x+r-1)^2 = x(x+2r+4-5)$$

$$(x+r)^2 - 2\cdot(x+r)\cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2xr - x$$

$$x^2 + 2xr + r^2 - 2x - 2r + 1 = x^2 + 2xr - x$$

$$r^2 - 2r + 1 = x$$

Stąd z i zależności $r^2 = 4x$ otrzymujemy:

$$r^2 = 4(r^2 - 2r + 1)$$

$$0 = 3r^2 - 8r + 4$$

$$r = 2 \quad \vee \quad r = \frac{2}{3}$$

Gdy $r = 2$, to $x = r^2 - 2r + 1 = 1$, $y = x + r = 3$ oraz $z = x + 2r + 4 = 9$.
Ponieważ ciąg $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ jest geometryczny, ciąg $(x, y, z-4) = (1, 3, 5)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, y-1, z-5) = (1, 2, 4)$ jest geometryczny, więc trójka liczb $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ spełnia warunki zadania.

Gdy $r = \frac{2}{3}$, to $x = r^2 - 2r + 1 = \frac{1}{9}$, $y = x + r = \frac{7}{9}$ oraz $z = x + 2r + 4 = \frac{49}{9}$.
Ponieważ ciąg $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$ jest geometryczny, ciąg $(x, y, z-4) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{13}{9}\right)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, y-1, z-5) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$ jest geometryczny, więc trójka liczb $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$ także spełnia warunki zadania.

Ostatecznie rozwiązaniami zadania są dwie trójki liczb: $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ oraz $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$.

Sposób Ia (poprzez r)

Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego $(x, y, z-4)$. Wówczas $x = y - r$ oraz $z = y + r + 4$. Ponieważ ciąg (x, y, z) jest geometryczny, więc korzystamy z własności ciągu geometrycznego i otrzymujemy:

$$y^2 = (y-r)(y+r+4)$$

$$y^2 = y^2 - r^2 + 4(y-r)$$

$$r^2 + 4r = 4y$$

Ponieważ ciąg $(x, y-1, z-5)$ jest geometryczny, więc ciąg $(y-r, y-1, y+r-1)$ jest geometryczny. Korzystamy z własności ciągu geometrycznego i otrzymujemy:

$$(y-1)^2 = (y-r)(y+r-1)$$

$$y^2 - 2y + 1 = y^2 - r^2 - (y-r)$$

$$r^2 - r + 1 = y$$

Stąd z i zależności $r^2 + 4r = 4y$ otrzymujemy:

$$r^2 + 4r = 4(r^2 - r + 1)$$

$$0 = 3r^2 - 8r + 4$$

$$r = 2 \quad \vee \quad r = \frac{2}{3}$$

Gdy $r = 2$, to $y = r^2 - r + 1 = 3$, $x = y - r = 1$ oraz $z = y + r + 4 = 9$.
Ponieważ ciąg $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ jest geometryczny, ciąg $(x, y, z-4) = (1, 3, 5)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, y-1, z-5) = (1, 2, 4)$ jest geometryczny, więc trójka liczb $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ spełnia warunki zadania.
Gdy $r = \frac{2}{3}$, to $y = r^2 - r + 1 = \frac{7}{9}$, $x = y - r = \frac{1}{9}$ oraz $z = y + r + 4 = \frac{49}{9}$. Ponieważ ciąg $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$ jest geometryczny, ciąg $(x, y, z-4) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{13}{9}\right)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, y-1, z-5) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$ jest geometryczny, więc trójka liczb $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$ także spełnia warunki zadania.
Ostatecznie rozwiązaniami zadania są dwie trójki liczb: $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ oraz $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$.

Sposób II

Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$y^2 = x \cdot z$$

Z własności ciągu arytmetycznego i warunków zadania otrzymujemy

$$y = \frac{x + z - 4}{2}$$

Ciąg $(x, y-1, z-5)$ jest geometryczny, więc

$$(y-1)^2 = x \cdot (z-5)$$

Stąd i ze związku $y^2 = x \cdot z$ otrzymujemy:

$$(y-1)^2 = xz - 5x$$

$$y^2 - 2y + 1 = y^2 - 5x$$

$$y = \frac{5x+1}{2}$$

Ponieważ $y = \frac{x+z-4}{2}$ oraz $y = \frac{5x+1}{2}$, więc:

$$\frac{x+z-4}{2} = \frac{5x+1}{2}$$

$$z = 4x + 5$$

Ze związków $y^2 = x \cdot z$, $y = \frac{5x+1}{2}$ oraz $z = 4x+5$ otrzymujemy:

$$\left(\frac{5x+1}{2}\right)^2 = x(4x+5)$$

$$25x^2 + 10x + 1 = 16x^2 + 20x$$

$$9x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{9}$$

Dla $x = 1$ otrzymujemy $y = 3$ i $z = 9$. Wówczas ciąg $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ jest geometryczny, ciąg $(x, y, z-4) = (1, 3, 5)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, y-1, z-5) = (1, 2, 4)$ jest geometryczny.
To oznacza, że trójka liczb $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ spełnia warunki zadania.
Dla $x = \frac{1}{9}$ otrzymujemy $y = \frac{7}{9}$ i $z = \frac{49}{9}$. Wówczas ciąg $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$ jest geometryczny, ciąg $(x, y, z-4) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{13}{9}\right)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, y-1, z-5) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$ jest geometryczny.
Zatem trójka liczb $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$ także spełnia warunki zadania.
Ostatecznie rozwiązaniami zadania są dwie trójki liczb: $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ oraz $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$.

Sposób III (poprzez q)

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (x,y,z). Wówczas $y = xq$ oraz $z = xq^2$.
Ponieważ ciąg $(x,y,z-4)$ jest arytmetyczny, więc korzystamy z własności ciągu arytmetycznego i otrzymujemy:

$$xq = \frac{x + xq^2 - 4}{2}$$

$$2xq = x + xq^2 - 4$$

$$4 = x(q^2 - 2q + 1)$$

Dla $q = 1$ równanie $4 = x(q^2 - 2q + 1)$ jest sprzeczne, więc

$$x = \frac{4}{(q-1)^2} \quad \wedge \quad q \neq 1$$

Ponieważ $(x, y-1, z-5)$ jest geometryczny, więc:

$$(xq-1)^2 = x \cdot (xq^2 - 5)$$

$$x^2q^2 - 2xq + 1 = x^2q^2 - 5x$$

$$1 = (2q-5)x$$

Dla $q = \frac{5}{2}$ równanie $1 = (2q-5)x$ jest sprzeczne, więc

$$x = \frac{1}{2q-5} \quad \wedge \quad q \neq \frac{5}{2}$$

Zatem $q \neq 1$ i $q \neq \frac{5}{2}$ oraz:

$$\frac{1}{2q-5} = \frac{4}{(q-1)^2}$$

$$(q-1)^2 = 4(2q-5)$$

$$q^2 - 10q + 21 = 0$$

$$q = 3 \quad \vee \quad q = 7$$

Gdy $q = 3$, to $(x,y,z) = (1,3,9)$. Ponieważ ciąg $(x,y,z) = (1,3,9)$ jest geometryczny, ciąg $(x,y,z-4) = (1,3,5)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x,y-1,z-5) = (1,2,4)$ jest geometryczny, więc trójka liczb $(x,y,z) = (1,3,9)$ spełnia warunki zadania.
Gdy $q = 7$, to $(x,y,z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$. Ponieważ ciąg $(x,y,z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$ jest geometryczny, ciąg $(x,y,z-4) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{13}{9}\right)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x,y-1,z-5) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$ jest geometryczny, więc trójka liczb $(x,y,z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$ także spełnia warunki zadania.

Ostatecznie rozwiązaniami zadania są dwie trójki liczb: $(x,y,z)=(1,3,9)$ oraz $(x,y,z)=\left(\frac{1}{9},\frac{7}{9},\frac{49}{9}\right)$.

Zadanie 9. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 20.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością jednej z przyprostokątnych trójkąta ACD), np. $c^2+\left(\frac{8}{c}\right)^2=65$

ALBO

– zapisanie równania $(c+d)^2=81$,

ALBO

– obliczenie długości odcinków AE oraz EC (dla jednego przypadku): $\frac{1}{\sqrt{65}}$ i $\frac{64}{\sqrt{65}}$.

2 pkt – zapisanie układu równań niezależnych z dwiema niewiadomymi c i d, np. $\frac{1}{2}cd=4$ oraz $c^2+d^2=\left(\sqrt{65}\right)^2$ (dla *sposobu I*)

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością odcinka AE lub EC), np. $\frac{\sqrt{65}-x}{\frac{8}{\sqrt{65}}}=\frac{\frac{8}{\sqrt{65}}}{x}$ (dla *sposobu II*).

1 pkt – obliczenie pola trójkąta ACD i zapisanie, że trójkąt ACD jest prostokątny (lub dokonanie zapisów, z których wynika, że zdający traktuje ten trójkąt jako prostokątny), np. $P_{ACD}=4$ oraz $\frac{1}{2}cd=4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

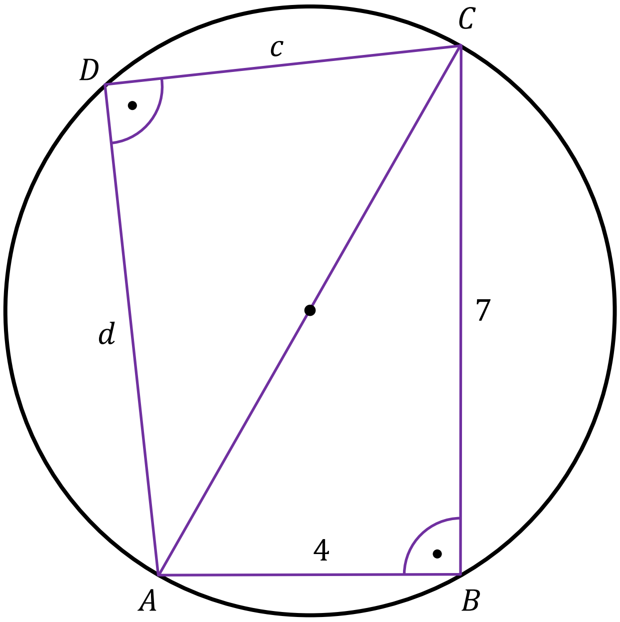
Jeżeli zdający uzyska tylko jeden czworokąt $ABCD$ spełniający warunki zadania i nie skomentuje, że drugi czworokąt spełniający warunki zadania różni się tylko permutacją długości boków AD i CD, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $c=|CD|$ oraz $d=|AD|$.

Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i odcinki AB oraz CD są prostopadłe, więc trójkąt ABC jest prostokątny, a odcinek AC jest średnicą tego okręgu. Wobec tego trójkąt ACD również jest prostokątny.



Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14$. Pole czworokąta $ABCD$ jest równe 18, więc pole trójkąta ACD jest równe 4. Zatem

$$\frac{1}{2}cd = 4$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABC i ACD otrzymujemy:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 = |CD|^2 + |AD|^2$$

$$4^2 + 7^2 = c^2 + d^2$$

Stąd i z zależności $\frac{1}{2}cd = 4$ otrzymujemy dalej:

$$c^2 + d^2 = 65$$

$$c^2 + 2cd + d^2 = 65 + 4 \cdot 4$$

$$(c + d)^2 = 81$$

$$c + d = 9$$

gdyż c i d to liczby dodatnie.

Wyznaczając z tego równania $d = 9 - c$ i wstawiając do równania $\frac{1}{2}cd = 4$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}c(9 - c) = 4$$

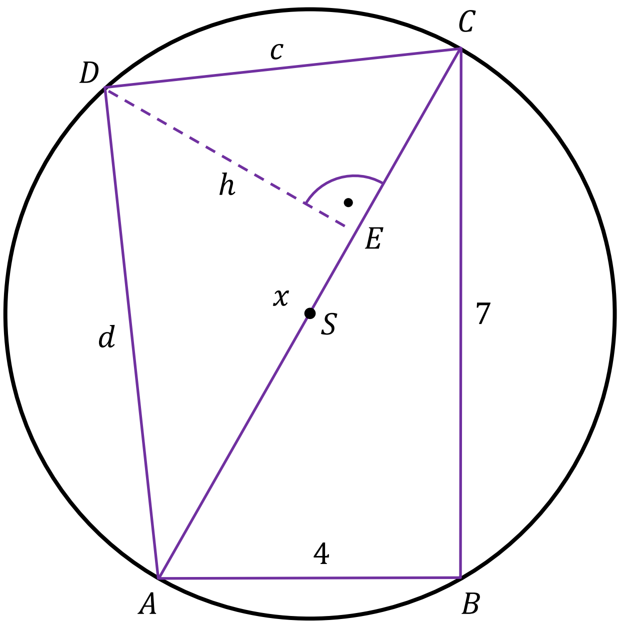
$$0 = c^2 - 9c + 8$$

$$c = 1 \quad \vee \quad c = 8$$

Gdy $c = 1$, to $d = 8$.
Gdy $c = 8$, to $d = 1$.
Otrzymaliśmy dwa czworokąty spełniające warunki zadania. Obwód L każdego z nich jest równy

$$L = 4 + 7 + 1 + 8 = 20$$

Sposób II
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
c – długość odcinka CD,
d – długość odcinka AD,
E – punkt przecięcia prostej AC z prostą do niej prostopadłą i przechodzącą przez punkt D,
h – wysokość trójkąta ACD opuszczona z wierzchołka D,
x – długość odcinka AE (zobacz rysunek).



Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i odcinki AB oraz CD są prostopadłe, więc trójkąt ABC jest prostokątny, a odcinek AC jest średnicą tego okręgu. Wobec tego trójkąt ACD również jest prostokątny.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$4^2 + 7^2 = |AC|^2$$

$$|AC| = \sqrt{65}$$

Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14$. Pole czworokąta $ABCD$ jest równe 18, więc pole trójkąta ACD jest równe 4. Zatem:

$$\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h = 4$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{65} \cdot h = 4$$

$$h = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

Ponieważ h jest wysokością trójkąta prostokątnego opuszczoną na przeciwprostokątną, więc:

$$h^2 = |AE| \cdot |EC|$$

$$\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right)^2 = x \cdot \left(\sqrt{65} - x\right)$$

$$x^2 - \sqrt{65}x + \frac{64}{65} = 0$$

$$\Delta = \left(-\sqrt{65}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{64}{65} = \frac{65^2 - 16^2}{65} = \frac{49 \cdot 81}{65}$$

$$x = \frac{\sqrt{65} - \frac{7 \cdot 9}{\sqrt{65}}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{65}} \quad \vee \quad x = \frac{\sqrt{65} + \frac{7 \cdot 9}{\sqrt{65}}}{2 \cdot 1} = \frac{64}{\sqrt{65}}$$

Gdy $x = \frac{1}{\sqrt{65}}$, to $|EC| = \sqrt{65} - x = \frac{64}{\sqrt{65}}$ i wówczas:

$$c^2 = h^2 + |EC|^2$$

$$c^2 = \frac{64}{65} + \frac{64^2}{65}$$

$$c = 8$$

oraz:

$$d^2 = h^2 + x^2$$

$$d^2 = \frac{64}{65} + \frac{1}{65}$$

$$d = 1$$

Gdy $x = \frac{64}{\sqrt{65}}$, to $|EC| = \sqrt{65} - x = \frac{1}{\sqrt{65}}$ i wówczas:

$$c^2 = h^2 + |EC|^2$$

$$c^2 = \frac{64}{65} + \frac{1}{65}$$

$$c = 1$$

oraz:

$$d^2 = h^2 + x^2$$

$$d^2 = \frac{64}{65} + \frac{64^2}{65}$$

$$d = 8$$

Otrzymaliśmy dwa czworokąty spełniające warunki zadania. Obwód L każdego z nich jest równy

$$L = 4 + 7 + 1 + 8 = 20$$

Zadanie 10. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ oraz $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, oraz $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, oraz $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w zbiorze $\mathbb{R}$, np.

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ oraz $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze $\mathbb{R}$, np.

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ oraz $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci alternatywy dwóch elementarnych równań trygonometrycznych: $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sinus podwojonego argumentu i zapisanie równania w postaci $\sin x + 2\sin x \cos x - \cos x = \frac{1}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie $\sin x + \sin(2x) - \cos x = \frac{1}{2}$ równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego argumentu:

$$\sin x + \sin(2x) - \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x + 2\sin x \cos x - \cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\sin x\,(1 + 2\cos x) - \frac{1}{2} \cdot (2\cos x + 1) = 0$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(2\cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \quad \vee \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 11. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami […].

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$: $m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$, np. $[(-m)^2 - 2m]^2 - 2m^2 + 4m^3 \geq 3$.

1 pkt – przekształcenie nierówności $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $[(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2]^2 - 2(x_1 \cdot x_2)^2 + 4(x_1 \cdot x_2)^3 \geq 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $\Delta > 0$ oraz $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$: $m \in (-\infty, -1] \cup (4, +\infty)$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $\Delta > 0$ oraz $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$: $m \in (-\infty, -1] \cup (4, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w którymś z etapów I–II popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający w etapach I–II nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I–II, to za III etap otrzymuje **1 punkt**; natomiast jeżeli otrzyma zbiory rozwiązań, które są rozłączne lub co najmniej jeden z nich jest zbiorem liczb rzeczywistych, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.

3. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 \cdot x_2 = -m$ lub $x_1 + x_2 = \pm \frac{b}{2a}$, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za przekształcenie nierówności $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za <u>konsekwentne</u> rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.

4. Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty** (co najwyżej 1 punkt za I etap i co najwyżej 3 punkty za II etap).

5. Jeżeli zdający podczas przekształcania nierówności $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$ do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète'a popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, ale otrzyma nierówność, która po poprawnym zastosowaniu wzorów Viète'a prowadzi do nierówności wielomianowej stopnia czwartego, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za poprawne zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie $x^2 + mx + m = 0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wówczas, gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $x^2 + mx + m$ jest dodatni.
Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$m^2 - 4m > 0$$

$$m(m-4) > 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

Przekształcamy warunek $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskaną nierówność z niewiadomą m:

$$x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$$

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$$

$$[(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2]^2 - 2(x_1 \cdot x_2)^2 + 4(x_1 \cdot x_2)^3 \geq 3$$

$$[(-m)^2 - 2m]^2 - 2m^2 + 4m^3 \geq 3$$

$$m^4 + 2m^2 - 3 \geq 0$$

$$m^4 - m^2 + 3m^2 - 3 \geq 0$$

$$(m^2 - 1)(m^2 + 3) \geq 0$$

$$(m-1)(m+1)(m^2 + 3) \geq 0$$

$$m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, które jednocześnie spełniają warunki $\Delta > 0$ oraz $x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$: $m \in (-\infty, -1] \cup (4, +\infty)$.

Zadanie 12. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami. X.R2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na obliczeniu długości krawędzi podstawy ostrosłupa. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.
Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:
2 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 6$.
1 pkt – wyznaczenie wysokości ostrosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy:

$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Drugi etap polega na wyznaczeniu długości krótszej podstawy trapezu oraz wysokości trapezu w zależności od długości krawędzi podstawy ostrosłupa. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
2 pkt – wyznaczenie długości krótszej podstawy trapezu oraz wysokości trapezu w zależności od długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $|MN| = \frac{3}{4}a$ oraz $|PR| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

ALBO

– obliczenie długości krótszej podstawy trapezu oraz wysokości trapezu: $|MN| = \frac{18}{4}$ oraz $|PR| = \frac{6\sqrt{3}}{4}$.

1 pkt – wyznaczenie długości krótszej podstawy trapezu lub wysokości trapezu w zależności od długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $|MN| = \frac{3}{4}a$ lub $|PR| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

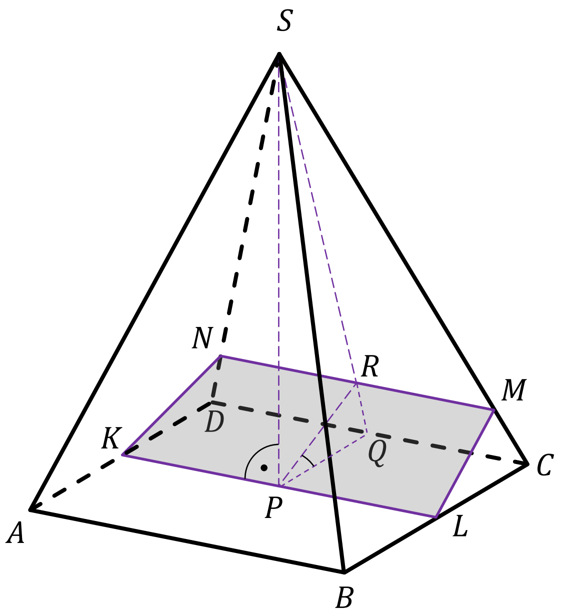
ALBO

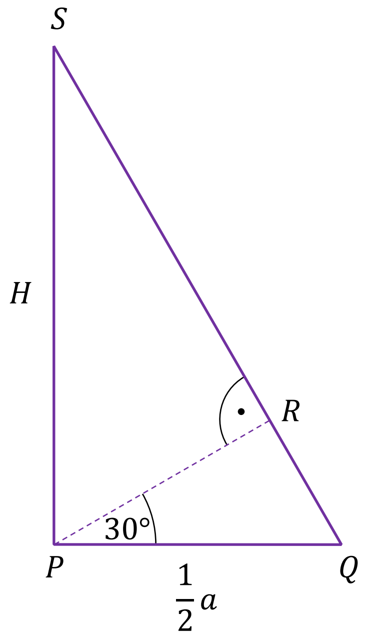
– obliczenie długości krótszej podstawy trapezu lub wysokości trapezu: $|MN| = \frac{18}{4}$ lub $|PR| = \frac{6\sqrt{3}}{4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na obliczeniu pola trapezu.
Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
1 pkt – obliczenie pola przekroju ostrosłupa: $\frac{63\sqrt{3}}{8}$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
P – środek odcinka KL,
Q – środek krawędzi CD,
R – środek odcinka MN,
a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa $ABCDS$,
H – wysokość ostrosłupa $ABCDS$ (zobacz rysunki).
Wówczas $|PQ| = \frac{1}{2}a$.





Trójkąty PQR i PQS są prostokątne i mają kąty ostre o miarach $30°$ i $60°$. Zatem korzystając z własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych $30°$ i $60°$ (lub z funkcji trygonometrycznych), otrzymujemy: $|QR| = \frac{1}{4}a$, $|PR| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $|QS| = a$, $H = |PS| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $|RS| = \frac{3}{4}a$.

Ponieważ objętość ostrosłupa jest równa $36\sqrt{3}$, więc:

$$\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

$$a = 6$$

Trójkąty DCS i NMS są podobne na mocy cechy kąt-kąt-kąt, więc stąd:

$$\frac{|NM|}{|DC|} = \frac{|RS|}{|QS|}$$

$$\frac{|NM|}{a} = \frac{\frac{3}{4}a}{a}$$

$$|NM| = \frac{9}{2}$$

Obliczamy pole P_{KLMN} przekroju $KLMN$:

$$P_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot \left(6 + \frac{9}{2}\right) \cdot \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{63\sqrt{3}}{8}$$

Zadanie 13.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: IX.1) […] znajduje punkt wspólny dwóch prostych […]; IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie pierwszej współrzędnej x_A punktu A oraz drugiej współrzędnej y_B punktu B w zależności od współczynnika kierunkowego a prostej AB: $x_A = \frac{a-2}{a}$ oraz $y_B = 2 - a$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Prosta AB przechodzi przez punkty B oraz $K = (1, 2)$ o różnych pierwszych współrzędnych, więc równanie tej prostej można zapisać w postaci kierunkowej $y = a(x-1) + 2$, czyli $y = ax + (2-a)$.

Ponieważ punkt B leży na dodatniej półosi Oy, więc $B = (0, 2-a)$ i $2 - a > 0$, czyli $a < 2$.

Ponieważ punkt A leży na dodatniej półosi Ox, więc $A = \left(\frac{a-2}{a}, 0\right)$ oraz $\frac{a-2}{a} > 0$.

Wyznaczamy pole P trójkąta ABC:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{a-2}{a}\right| \cdot |2-a| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a - 2}{a} \cdot (2-a) = \frac{-a^2 + 4a - 4}{2a}$$

To należało wykazać.

Zadanie 13.2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu […]; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $a = -2$ oraz wyznaczenie równania prostej zawierającej przeciwprostokątną AB tego z trójkątów, który ma najmniejsze pole, np. $y = -2x + 4$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $a = -2$

ALBO

– przekształcenie nierówności $\frac{\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{2}{a}\right)}{2} \geq \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{a}\right)}$ do postaci $\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{2}{a}\right)+2 \geq 4$ **oraz** zapisanie, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy liczby dodatnie $\left(-\frac{a}{2}\right)$ oraz $\left(-\frac{2}{a}\right)$ są równe.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji P: $a = -2$

ALBO

– obliczenie wartości a, dla której zachodzi równość średniej arytmetycznej i geometrycznej liczb dodatnich $\left(-\frac{a}{2}\right)$ oraz $\left(-\frac{2}{a}\right)$: $a = -2$,

ALBO

– przekształcenie nierówności $\frac{\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{2}{a}\right)}{2} \geq \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{a}\right)}$ do postaci $\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{2}{a}\right)+2 \geq 4$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji P, np. $P'(a) = \frac{(-2a+4)\cdot 2a - \left(-a^2+4a-4\right)\cdot 2}{(2a)^2}$

ALBO

– zapisanie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną liczb $\left(-\frac{a}{2}\right)$ oraz $\left(-\frac{2}{a}\right)$: $\frac{\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{2}{a}\right)}{2} \geq \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{a}\right)}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji $(-a^2+4a-4)$ oraz $2a$ i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną, która ma w przedziale $(-\infty, 0)$ co najmniej jedno miejsce zerowe, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce/a zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji P, za wyznaczenie równania prostej AB tego z trójkątów, który ma najmniejsze pole).

Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji $(-a^2+4a-4)$ lub $2a$ i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną, która ma w przedziale $(-\infty, 0)$ co najmniej jedno miejsce zerowe, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji P oraz za wyznaczenie równania prostej AB tego z trójkątów, który ma najmniejsze pole).

3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości a, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej
ORAZ:
– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji P
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja P ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja P ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji,
LUB
– wyznaczy drugą pochodną funkcji P i dla wyznaczonej wartości a obliczy wartość tej drugiej pochodnej oraz zapisze, że funkcja P ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „−”) znak pochodnej.

4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej, 1 punkt za wyznaczenie równania prostej AB, dla której pole trójkąta ABC jest najmniejsze).

5. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Obliczamy argument, dla którego funkcja P określona wzorem $P(a)=\frac{-a^2+4a-4}{2a}$ dla $a<0$ osiąga wartość najmniejszą.
Wyznaczamy pochodną funkcji P:

$$P'(a)=\frac{(-2a+4)\cdot 2a-(-a^2+4a-4)\cdot 2}{(2a)^2}$$

$$P'(a)=\frac{-2a^2+8}{(2a)^2}$$

dla $a<0$.
Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji P:

$$P'(a)=0$$

$$-2a^2+8=0$$

$$a = 2 \notin (-\infty, 0) \quad \vee \quad a = -2 \in (-\infty, 0)$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(a) < 0$$

$$-2a^2 + 8 < 0 \quad \wedge \quad a < 0$$

$$a \in (-\infty, -2)$$

więc $P'(a) < 0$ dla $a \in (-\infty, -2)$ oraz $P'(a) > 0$ dla $a \in (-2, 0)$.
Zatem funkcja P jest malejąca w przedziale $(-\infty, -2]$ i rosnąca w przedziale $[-2, 0)$.
Stąd funkcja P osiąga wartość najmniejszą dla $a = -2$. Wtedy prosta AB ma równanie $y = -2(x-1) + 2$, czyli $y = -2x + 4$.

Sposób II

Zauważmy, że $P(a) = -\frac{a^2}{2a} + \frac{4a}{2a} - \frac{4}{2a} = -\frac{a}{2} - \frac{2}{a} + 2$. Ponieważ $a < 0$, więc liczby $\left(-\frac{a}{2}\right)$ oraz $\left(-\frac{2}{a}\right)$ są dodatnie. Z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich $\left(-\frac{a}{2}\right)$ oraz $\left(-\frac{2}{a}\right)$ otrzymujemy:

$$\frac{\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{2}{a}\right)}{2} \geq \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{a}\right)}$$

$$-\frac{a}{2} - \frac{2}{a} \geq 2$$

$$-\frac{a}{2} - \frac{2}{a} + 2 \geq 4$$

$$P(a) \geq 4$$

przy czym równość zachodzi tylko dla tych a, dla których $-\frac{a}{2} = -\frac{2}{a}$ i jednocześnie $a < 0$, tj. dla $a = -2$.
Zatem funkcja P osiąga wartość najmniejszą dla $a = -2$. Wtedy prosta AB ma równanie $y = -2(x-1) + 2$, czyli $y = -2x + 4$.