CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Próbny egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMAP-P0-100
Termin egzaminu:	5 marca 2026 r.
Data publikacji dokumentu:	6 marca 2026 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.4) stosuje […] prawa działań na potęgach […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […]. II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: […] $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania
2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $2501^4 - 2499^4$ do postaci
$(2501^2 - 2499^2)(2501^2 + 2499^2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Korzystamy z własności działań na potęgach oraz ze wzoru na różnicę kwadratów i otrzymujemy:

$$2501^4 - 2499^4 = (2501^2)^2 - (2499^2)^2 = (2501^2 - 2499^2)(2501^2 + 2499^2) =$$

$$= (2501 - 2499)(2501 + 2499)(2501^2 + 2499^2) =$$

$$= 2 \cdot 5000 \cdot (2501^2 + 2499^2) = 10000 \cdot (2501^2 + 2499^2)$$

Liczba $2501^2 + 2499^2$ jest liczbą całkowitą, zatem liczba $2501^4 - 2499^4$ jest podzielna przez $10\,000$.

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.4) mnoży […] wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 8. (0–2)

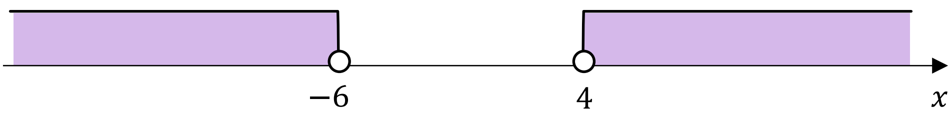
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.4) rozwiązuje […] nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$

ALBO

– zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów, np.



1 pkt – obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 + 2x - 24$:

$x_1 = -6$ oraz $x_2 = 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Odpowiedź zdającego uznajemy za poprawną tylko wtedy, gdy można w sposób jednoznaczny ustalić, czy przedziały zapisane przez zdającego są otwarte czy domknięte.

2. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $x^2 + 2x - 24$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego, w przypadku gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający rozpatruje trójmian kwadratowy inny niż podany w zadaniu, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $x^2 + 2x - 15$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $x^2 + 2x - 15 > 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

5. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów i jednocześnie zapisze niewłaściwy zbiór rozwiązań (np. $x \in (-6, 4)$ lub $x \in (-\infty - 6] \cup [4, +\infty)$), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający spełni kryterium za 1 punkt, a następnie pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, 4) \cup (-6, +\infty)$ lub w postaci $(+\infty, -6) \cup (4, -\infty)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci $x^2 + 2x - 24 > 0$ i obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + 2x - 24$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + 2x - 24$:

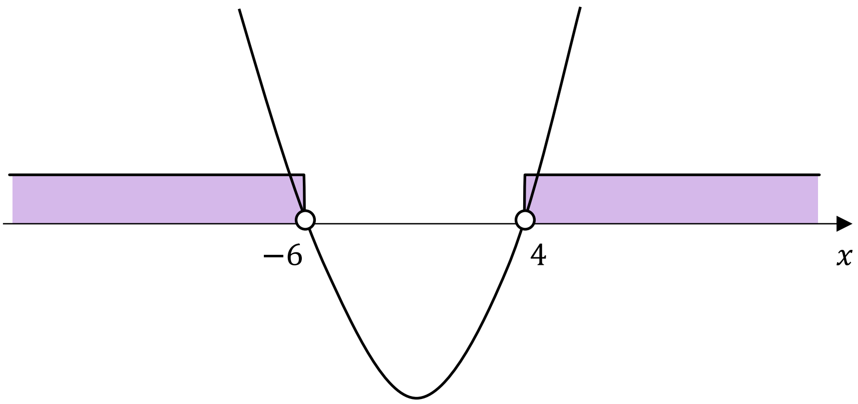
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100$$

Stąd

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = -6$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = 4$$

Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2 + 2x - 24$.
Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$.

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PP

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 11.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] przedziały monotoniczności […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 11.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą […] wykresów, wzorów […]; V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] największe i najmniejsze wartości funkcji […].

Zasady oceniania
2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.
1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Rozwiązanie

1. Największa wartość funkcji f jest równa 4.

2. Równanie $f(x) = \sqrt{5}$ ma 3 rozwiązania.

Zadanie 11.3. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, […] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby […]. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego […].

Zasady oceniania
2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.
1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga:
Odpowiedź zdającego uznajemy za poprawną tylko wtedy, gdy można w sposób jednoznaczny ustalić, czy zapisany przez zdającego przedział jest otwarty czy domknięty.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze, że dziedziną funkcji f jest przedział $[3, -4]$, to otrzymuje **1 punkt** za tak uzupełnione zdanie.

Rozwiązanie

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $[-4, 3]$.

2. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) < 1$ jest przedział $(2, 3]$.

Zadanie 12. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: V.7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem; V.11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych […].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P_{ABC} = 54$.

2 pkt – obliczenie rzędnej punktu C **oraz** obliczenie miejsc zerowych funkcji f: $q = 36$, $x_1 = \frac{11}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$.

1 pkt – obliczenie rzędnej punktu C: $q = 36$

ALBO

– obliczenie miejsc zerowych funkcji f: $x_1 = \frac{11}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że trójkąt ABC jest równoramienny. Podstawą tego trójkąta jest odcinek AB, natomiast wysokością jest odcinek, którego długość jest równa rzędnej punktu C.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $-16x^2 + 40x + 11$:

$$\Delta = 40^2 - 4 \cdot (-16) \cdot 11 = 1600 + 704 = 2304$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji f:

$$x_1 = \frac{-40 - \sqrt{2304}}{2 \cdot (-16)} = \frac{-88}{-32} = \frac{11}{4}$$

$$x_2 = \frac{-40 + \sqrt{2304}}{2 \cdot (-16)} = \frac{8}{-32} = -\frac{1}{4}$$

Obliczamy długość podstawy AB trójkąta ABC:

$$|AB| = \frac{11}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{12}{4} = 3$$

Korzystamy ze wzoru na drugą współrzędną wierzchołka paraboli i obliczamy rzędną punktu $C = (p, q)$:

$$q = \frac{-2304}{4 \cdot (-16)} = \frac{-2304}{-64} = 36$$

Obliczamy pole trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 36 = 54$$

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 14. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; VI.7) wykorzystuje własności ciągów […] arytmetycznych […] do rozwiązywania zadań […].

Zasady oceniania
3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = -3$ oraz $x = 3$.

2 pkt – zapisanie równania z niewiadomą x, np.:

$$\frac{4 + 3x^2 + 5}{2} = 2x^2$$

$$2x^2 - 4 = 3x^2 + 5 - 2x^2$$

ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi x oraz r, np.

$2x^2 = 4 + r$ oraz $3x^2 + 5 = 4 + 2r$.

1 pkt – obliczenie piątego wyrazu ciągu (a_n): $a_5 = 4$,

ALBO

– zapisanie równania z dwiema niewiadomymi x oraz a_5, np.:

$\frac{a_5 + 3x^2 + 5}{2} = 2x^2$

$2x^2 - a_5 = 3x^2 + 5 - 2x^2$

ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi x, r oraz a_5, np.

$2x^2 = a_5 + r$ oraz $3x^2 + 5 = a_5 + 2r$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Obliczamy piąty wyraz ciągu (a_n):

$$a_5 = \frac{3 \cdot 5 + 9}{5 + 1} = \frac{24}{6} = 4$$

Z warunków zadania wynika, że liczby 4, $2x^2$, $3x^2 + 5$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\frac{4 + 3x^2 + 5}{2} = 2x^2$$

$$3x^2 + 9 = 4x^2$$

$$x^2 = 9$$

Zatem $x = -3$ lub $x = 3$.

Sposób II

Obliczamy piąty wyraz ciągu (a_n):

$$a_5 = \frac{3 \cdot 5 + 9}{5 + 1} = \frac{24}{6} = 4$$

Z warunków zadania wynika, że liczby 4, $2x^2$, $3x^2 + 5$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x^2 = 4 + r \\ 3x^2 + 5 = 4 + 2r \end{cases}$$

gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego.

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $r = 2x^2 - 4$ i podstawiamy w miejsce r do drugiego z równań. Stąd otrzymujemy:

$$3x^2 + 5 = 4 + 2(2x^2 - 4)$$

$$3x^2 + 5 = 4 + 4x^2 - 8$$

$$x^2 = 9$$

Zatem $x = -3$ lub $x = 3$.

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny […]; VI.7) wykorzystuje własności ciągów […] arytmetycznych […] do rozwiązywania zadań […]; VI.5) stosuje wzór […] na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.6) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 17. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\sqrt{6}\right)$.

1 pkt – obliczenie cosinusa kąta o mierze α: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

ALBO

– obliczenie tangensa kąta o mierze α: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ALBO

– przekształcenie wyrażenia $\frac{3\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$ do postaci $3\cos\alpha$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i obliczamy $\cos\alpha$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{1}{3} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$$

Ponieważ kąt o mierze α jest rozwarty, to $\cos\alpha < 0$. Zatem

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Korzystamy ze związku między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta i obliczamy wartość wyrażenia $\frac{3\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$:

$$\frac{3\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = 3\sin\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 3\sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 3\cos\alpha = 3\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\sqrt{6}$$

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty prostokątne, w tym z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 21. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania
3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie długości dwóch boków trójkąta EBC w zależności od jednej zmiennej (dla *sposobu I*)
ALBO
– zapisanie, że $|CF| = a$ (dla *sposobu II*),
ALBO
– zapisanie, że $|AM| = 2a$ (dla *sposobu III*),
ALBO
– zapisanie układu równań
$|AC|^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \cos 2\alpha$
oraz
$|AC|^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(180° - 2\alpha)$ (dla *sposobu IV*).

1 pkt – zapisanie, że trójkąt ACD jest równoramienny.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

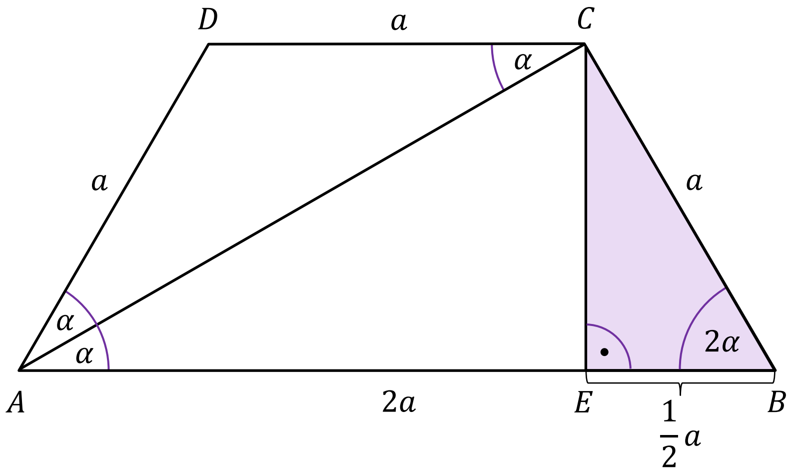
Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
$|CD| = a$ (zatem $|AB| = 2a$)
$|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC| = 2\alpha$.

Ponieważ przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB, to $|\measuredangle DAC| = |\measuredangle CAB| = \alpha$.
Kąty CAB i ACD są naprzemianległe oraz $AB||CD$, zatem $|\measuredangle ACD| = \alpha$.
Oznacza to, że trójkąt ACD jest równoramienny oraz $|AD| = |CD| = a$.
Zatem również $|BC| = a$.

Niech E będzie spodkiem wysokości trapezu $ABCD$ poprowadzonej z wierzchołka C (zobacz rysunek). Z własności trapezu równoramiennego obliczamy długość odcinka EB:

$$|EB| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{2a - a}{2} = \frac{1}{2}a$$



W trójkącie prostokątnym EBC mamy

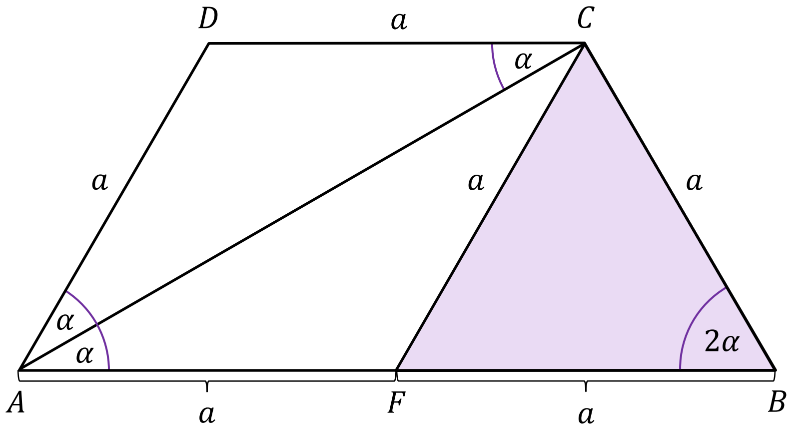
$$\cos 2\alpha = \frac{|EB|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$$

Zatem kąt ostry DAB ma miarę równą $60°$. To należało wykazać.

Sposób II
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
$|CD| = a$ (zatem $|AB| = 2a$)
$|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC| = 2\alpha$.

Ponieważ przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB, to $|\measuredangle DAC| = |\measuredangle CAB| = \alpha$.
Kąty CAB i ACD są naprzemianległe oraz $AB||CD$, zatem $|\measuredangle ACD| = \alpha$.
Oznacza to, że trójkąt ACD jest równoramienny oraz $|AD| = |CD| = a$.
Zatem również $|BC| = a$.

Niech F będzie takim punktem leżącym na podstawie AB, że odcinek FC jest równoległy do boku AD. Wtedy $|FC| = |AD| = a$ oraz $|AF| = |CD| = a$ oraz $|FB| = 2a - a = a$ (zobacz rysunek).



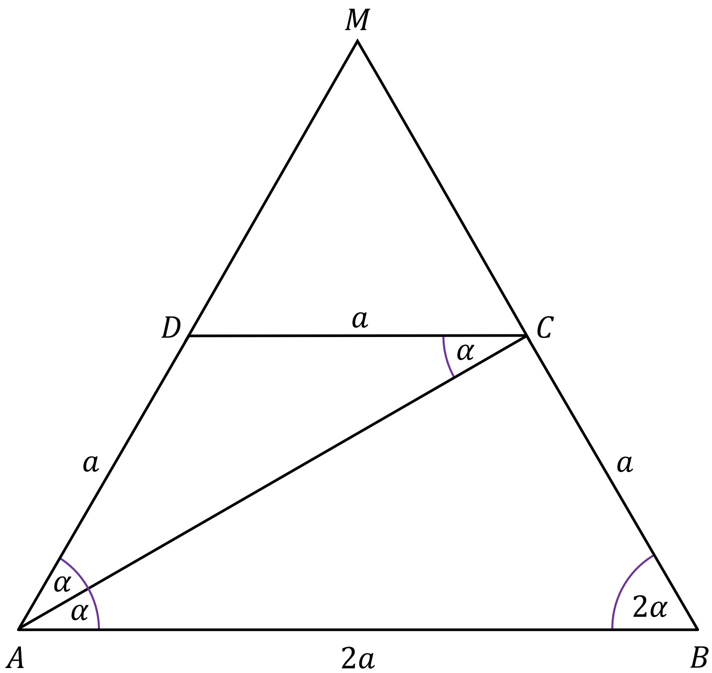
Zatem trójkąt FBC jest równoboczny. Stąd wynika, że miara kąta ostrego DAB jest równa $60°$. To należało wykazać.

Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
$|CD| = a$ (zatem $|AB| = 2a$)
$|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC| = 2\alpha$.

Ponieważ przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB, to $|\measuredangle DAC| = |\measuredangle CAB| = \alpha$.
Kąty CAB i ACD są naprzemianległe oraz $AB||CD$, zatem $|\measuredangle ACD| = \alpha$.
Oznacza to, że trójkąt ACD jest równoramienny oraz $|AD| = |CD| = a$.
Zatem również $|BC| = a$.

Ramiona trapezu przedłużamy do przecięcia w punkcie M (zobacz rysunek).



Trójkąt ABM jest podobny do trójkąta DCM (na podstawie cechy kąt–kąt–kąt) w skali 2. Zatem

$$|DM| \cdot 2 = a + |DM|$$

Stąd

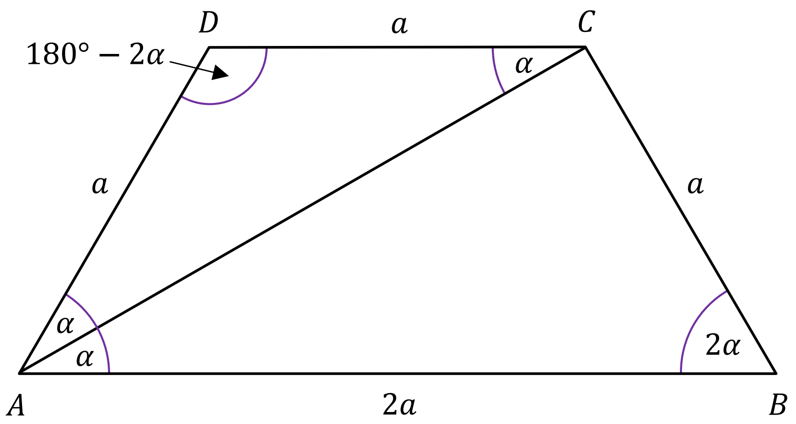
$$|DM| = a$$

Zatem trójkąt ABM jest równoboczny (ponieważ $|AM| = |BM| = |AB| = 2a$).
Stąd miara kąta ostrego DAB jest równa $60°$. To należało wykazać.

Sposób IV

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
$|CD| = a$ (zatem $|AB| = 2a$)
$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 2\alpha$ (zatem $|\sphericalangle CDA| = 180° - 2\alpha$).

Ponieważ przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB, to $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$.
Kąty CAB i ACD są naprzemianległe oraz $AB||CD$, zatem $|\sphericalangle ACD| = \alpha$.
Oznacza to, że trójkąt ACD jest równoramienny oraz $|AD| = |CD| = a$.
Zatem również $|BC| = a$.



Stosujemy twierdzenie cosinusów w trójkącie ABC:

$$|AC|^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \cos 2\alpha$$
$$|AC|^2 = 5a^2 - 4a^2 \cdot \cos 2\alpha$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów w trójkącie ACD:

$$|AC|^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(180° - 2\alpha)$$
$$|AC|^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos(180° - 2\alpha)$$

Ponieważ $\cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$, to

$$|AC|^2 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \cos 2\alpha$$

Z uzyskanych równań otrzymujemy:

$$5a^2 - 4a^2 \cdot \cos 2\alpha = 2a^2 + 2a^2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$6a^2 \cdot \cos 2\alpha = 3a^2$$

$$\cos 2\alpha = \frac{3a^2}{6a^2} = \frac{1}{2}$$

Zatem kąt ostry DAB ma miarę równą $60°$. To należało wykazać.

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci […] ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. […] równoległość do innej prostej).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 24. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$; IX.5) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych […].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(x+1)^2+(y-3)^2=25$.

3 pkt – obliczenie długości promienia (lub kwadratu długości promienia) **oraz** współrzędnych środka okręgu opisanego na kwadracie $A'B'C'D'$:
$r=5$ (lub $r^2=25$), $S'=(-1,3)$
ALBO
– wyznaczenie równania okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$:
$(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A' oraz C' **oraz** długości promienia (lub kwadratu długości promienia) okręgu opisanego na kwadracie $A'B'C'D'$:
$A'=(3,0)$, $C'=(-5,6)$, $r=5$ (lub $r^2=25$)
– obliczenie współrzędnych środka okręgu opisanego na kwadracie $A'B'C'D'$:
$S'=(-1,3)$,
ALBO
– obliczenie długości promienia (lub kwadratu długości promienia) **oraz** współrzędnych środka okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$:
$r=5$ (lub $r^2=25$), $S=(1,3)$.

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A' oraz C': $A'=(3,0)$, $C'=(-5,6)$
ALBO
– obliczenie długości promienia (lub kwadratu długości promienia) okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$: $r=5$ (lub $r^2=25$),
ALBO
– obliczenie współrzędnych środka okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$: $S=(1,3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Punkty A oraz C przekształcamy przez symetrię osiową względem osi Oy i otrzymujemy współrzędne punktów A' oraz C', które są końcami przekątnej kwadratu $A'B'C'D'$:

$$A' = (3, 0) \quad \text{oraz} \quad C' = (-5, 6)$$

Odcinek $A'C'$ jest średnicą okręgu $\mathcal{O}'$ opisanego na kwadracie $A'B'C'D'$.

Obliczamy długość r promienia okręgu $\mathcal{O}'$:

$$r = \frac{1}{2} \cdot |A'C'| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-5-3)^2 + (6-0)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64+36} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Obliczamy współrzędne środka S' odcinka $A'C'$:

$$S' = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (-1, 3)$$

Zapisujemy równanie okręgu $\mathcal{O}'$:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Sposób II

Odcinek AC jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$ opisanego na kwadracie $ABCD$.

Obliczamy długość r promienia okręgu $\mathcal{O}$:

$$r = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(5+3)^2 + (6-0)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64+36} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Obliczamy współrzędne środka S odcinka AC:

$$S = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (1, 3)$$

Zapisujemy równanie okręgu $\mathcal{O}$:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Okrąg $\mathcal{O}'$ opisany na kwadracie $A'B'C'D'$ jest obrazem okręgu $\mathcal{O}$ w symetrii osiowej względem osi Oy. Ta symetria przekształca każdy punkt $P = (x, y)$ leżący na okręgu $\mathcal{O}$ na punkt $P' = (-x, y)$ leżący na okręgu $\mathcal{O}'$. Zatem okrąg $\mathcal{O}'$ jest określony równaniem:

$$(-x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Stąd

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w graniastosłupach […] kąty między odcinkami […]. VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w […] ostrosłupach […] kąty między ścianami […]; X.5) oblicza objętości […] ostrosłupów […] również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $V = 96\sqrt{3}$.

1 pkt – obliczenie/zapisanie wysokości ostrosłupa: $H = 2\sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym jest kątem między wysokością ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka ostrosłupa do krawędzi podstawy a odcinkiem łączącym spodek wysokości ostrosłupa ze środkiem tej samej krawędzi podstawy.

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

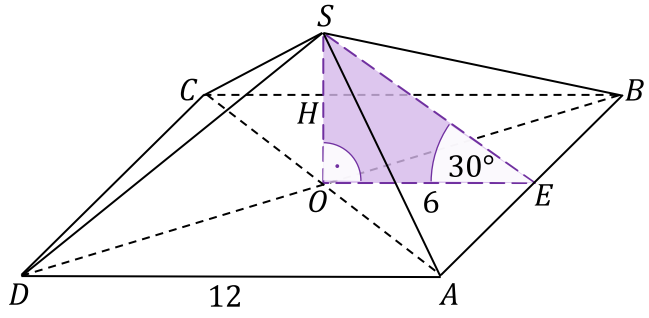
H – wysokość ostrosłupa,

O – spodek wysokość ostrosłupa,

E – środek krawędzi AB.

Zauważamy, że $H > 0$.

Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, to $|OE| = 6$.



W trójkącie prostokątnym SOE mamy

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{|SO|}{|OE|} = \frac{H}{6}$$

Zatem

$$H = 6 \cdot \operatorname{tg} 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 2\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

Zadanie 27. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności […] między polami figur podobnych. X.6) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PP

Zadanie 28. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 29. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 30. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) oblicza […] średnią ważoną […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 31. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) […] znajduje medianę […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 32.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.10) wyznacza największą […] wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 32.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.10) wyznacza […] najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A