

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Opracowanie materiałów:

Agnieszka Dworczyk
Bartłomiej Wyszyński
Joanna Mucha

Próbny egzamin maturalny

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

DATA EGZAMINU: **8 stycznia 2026 r.**CZAS TRWANIA EGZAMINU: **180 minut**LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

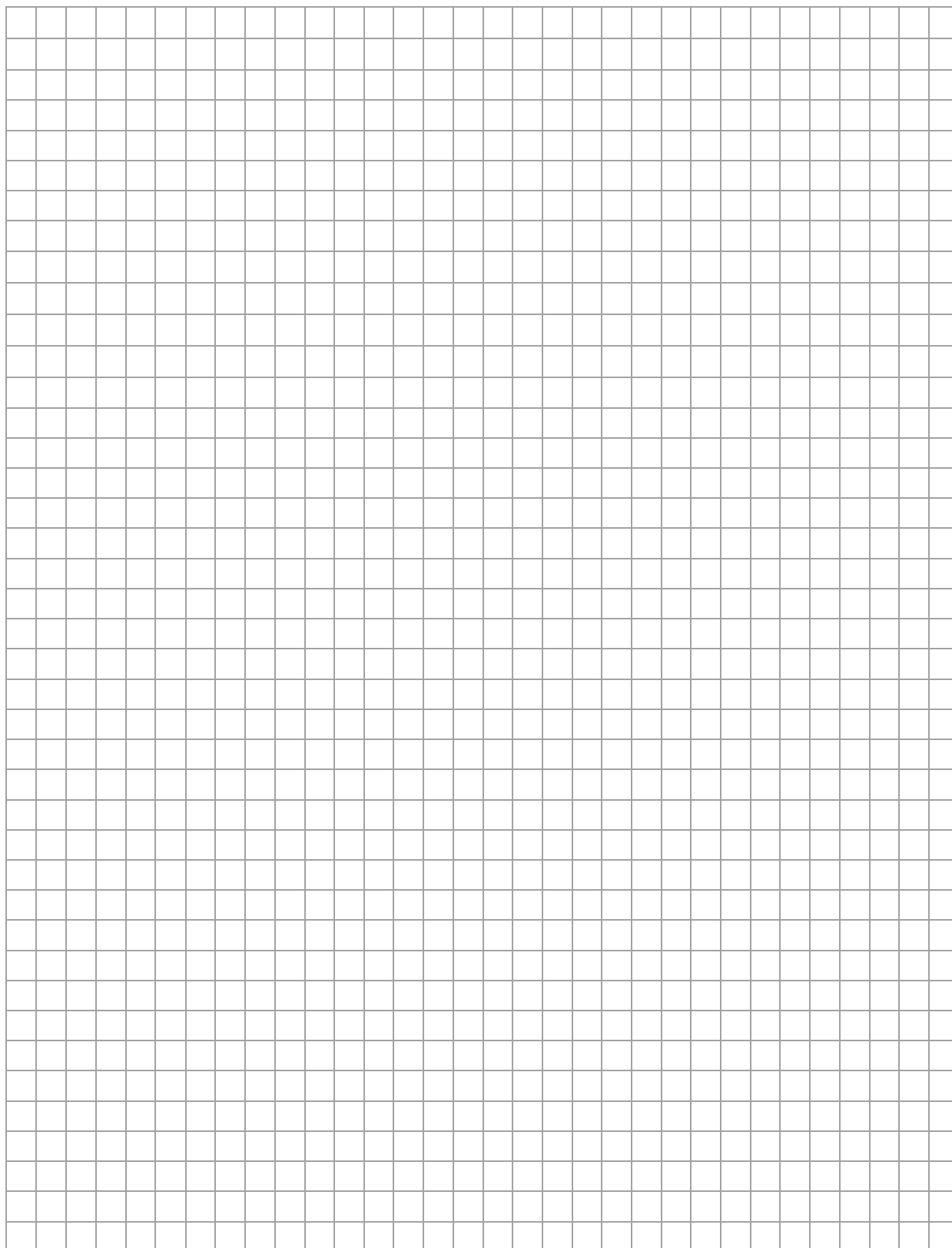
Instrukcja dla zdającego

1. Upewnij się, że arkusz egzaminacyjny zawiera 21 stron z zadaniami 1–11.
2. Brak uzasadnienia lub ważnych obliczeń może skutkować utratą punktów.
3. Odpowiedzi wpisuj wyłącznie w wyznaczonych miejscach.
4. Pisz wyraźnie czarnym długopisem lub piórem.
5. Nie stosuj korektora — błędy skreślaj.
6. Brudnopis nie podlega ocenie.
7. Możesz korzystać ze specjalnych wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

ŻYCZYMY POWODZENIA!

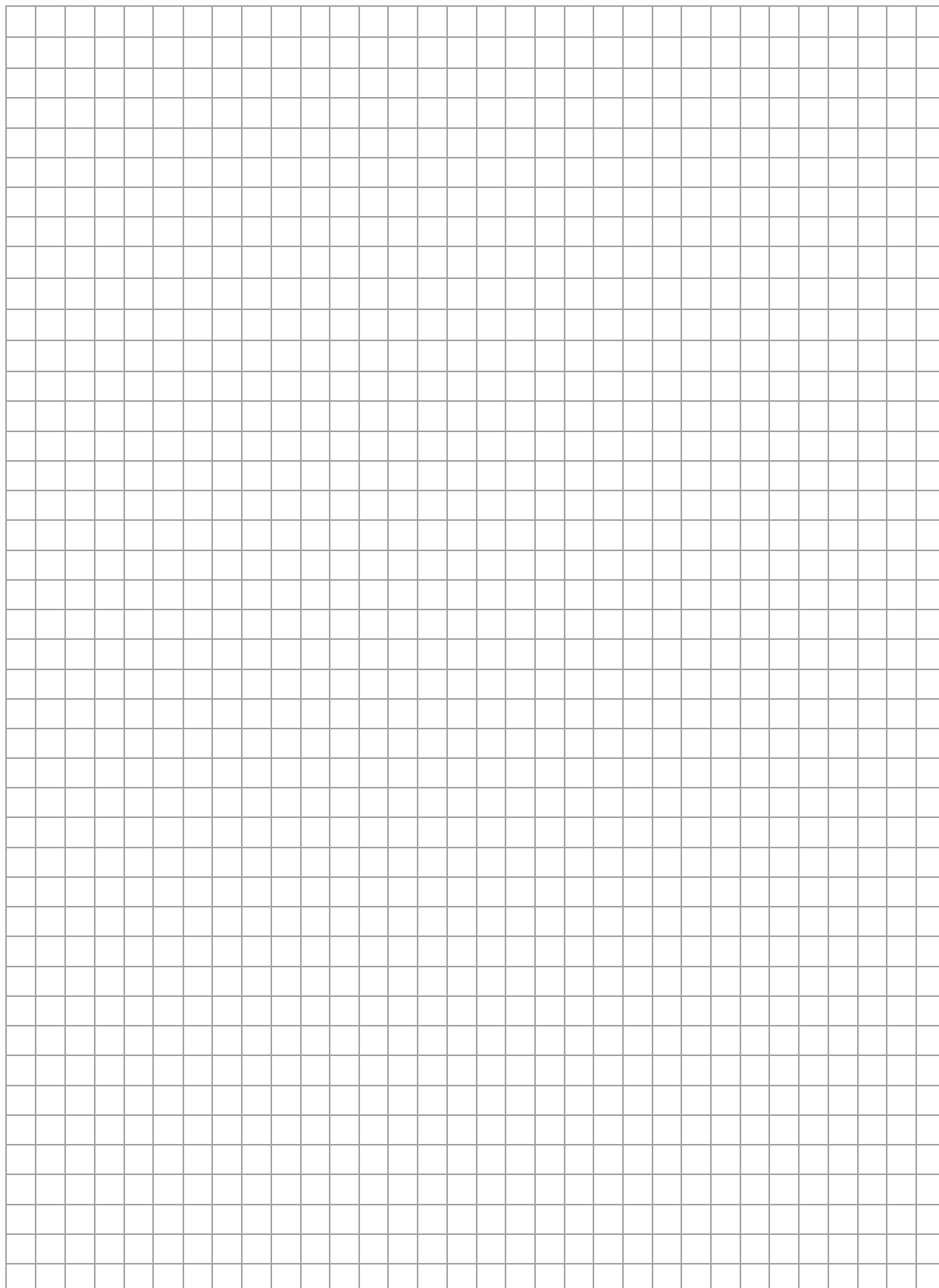
Zadanie 1. (0–3)**Rozwiąż równanie**

$$\log_x(27) = 2 + \log_3(x)$$

gdzie $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–3)

Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$ wiedząc, że $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ oraz $\sin 2\alpha = \frac{12}{13}$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 3. (0–3)

Szkolny turniej gry w siatkówkę składa się z dwóch tur. Pierwsza tura polega na rozegraniu przez każdą drużynę 5 meczy. Aby drużyna zakwalifikowała się do drugiej tury, musi zwyciężyć w co najmniej 4 meczach. Prawdopodobieństwo zwycięstwa w pojedynczym meczu przez drużynę A jest równe 0,26.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że drużyna A zakwalifikuje się do drugiej tury turnieju. Wynik przedstaw w postaci ułamka dziesiętnego, w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

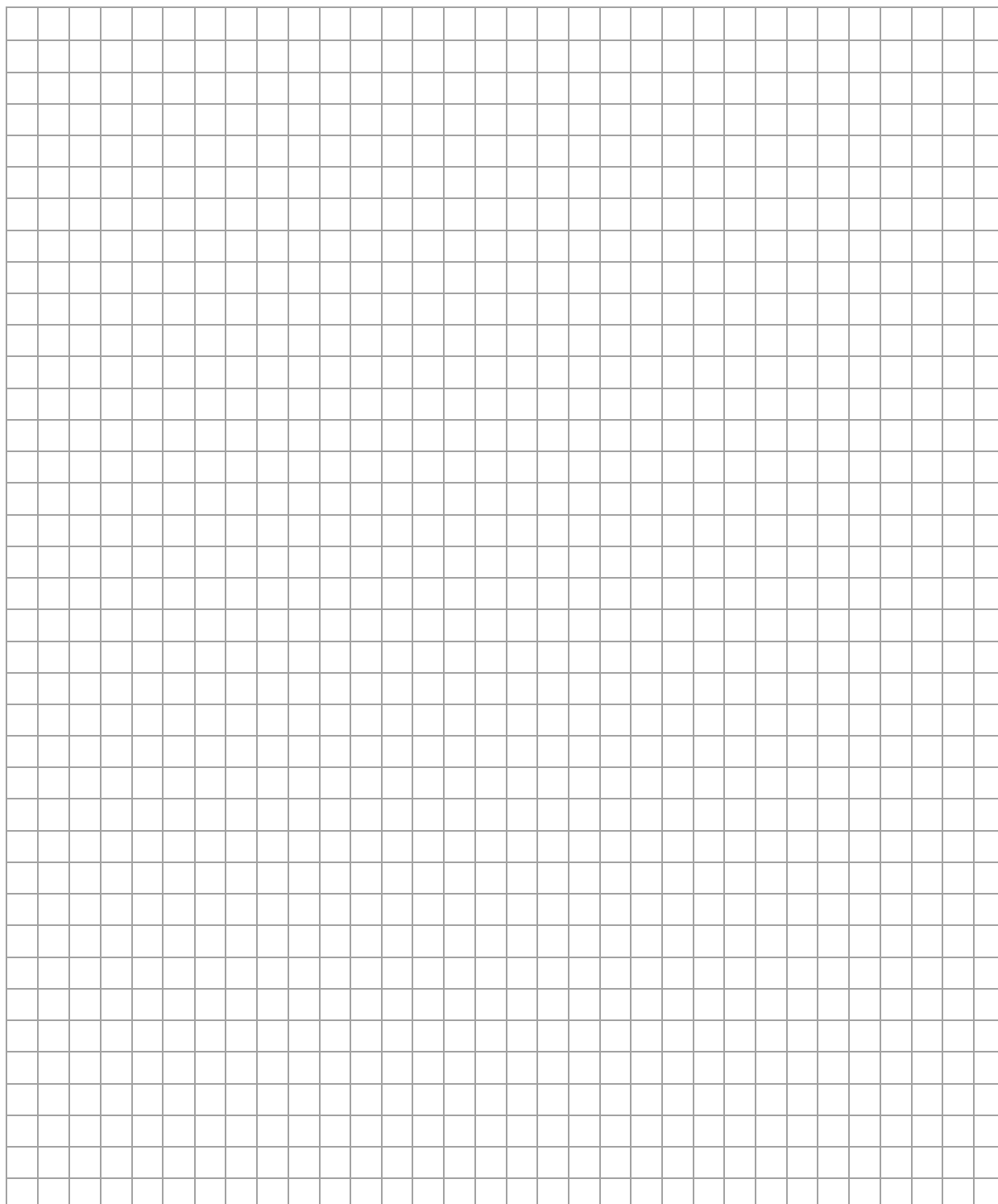
Zadanie 4. (0–4)

Okręgi

- $O_1: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$
- $O_2: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$

przecinają się w punktach M oraz N .

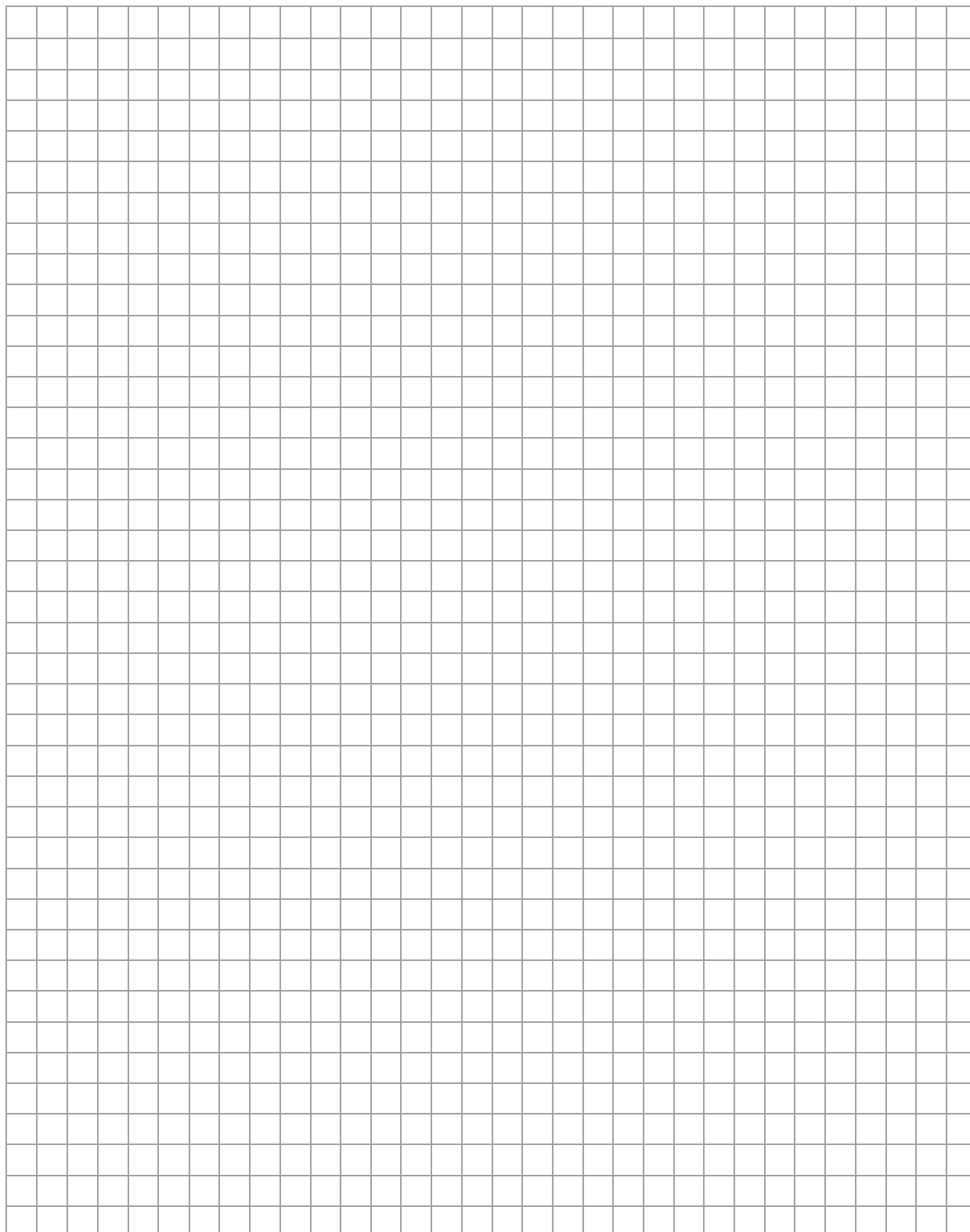
Oblicz odległość między punktami M oraz N . Zapisz obliczenia.

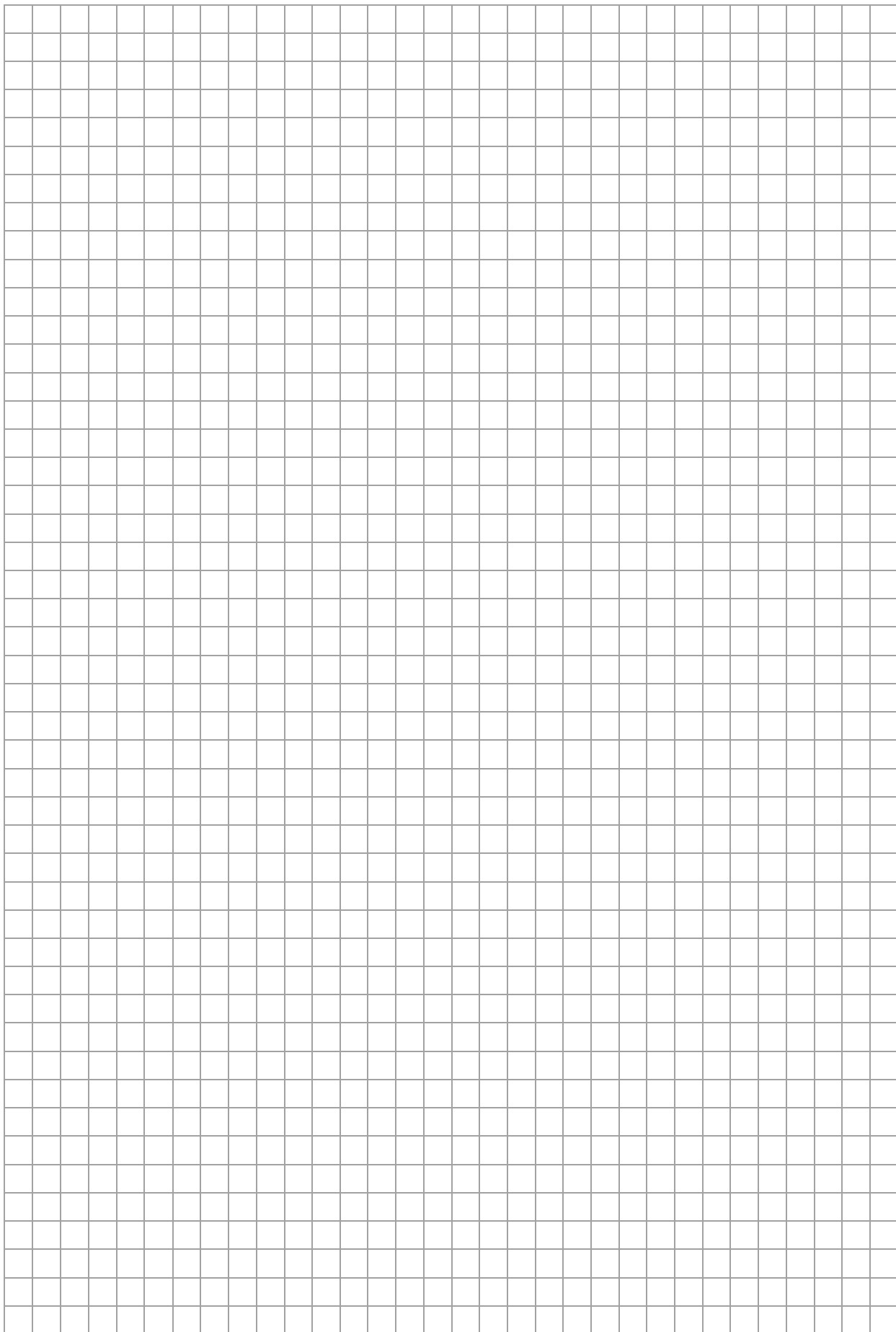


Zadanie 5. (0–4)

W czworokąt $ABCD$ o obwodzie 30 wpisano okrąg. Przekątna $|AC|$ ma długość $2\sqrt{3}$ i tworzy kąt ACB o mierze 60° . Bok $|BC|$ tego czworokąta jest dwukrotnie dłuższy od jego przekątnej $|AC|$.

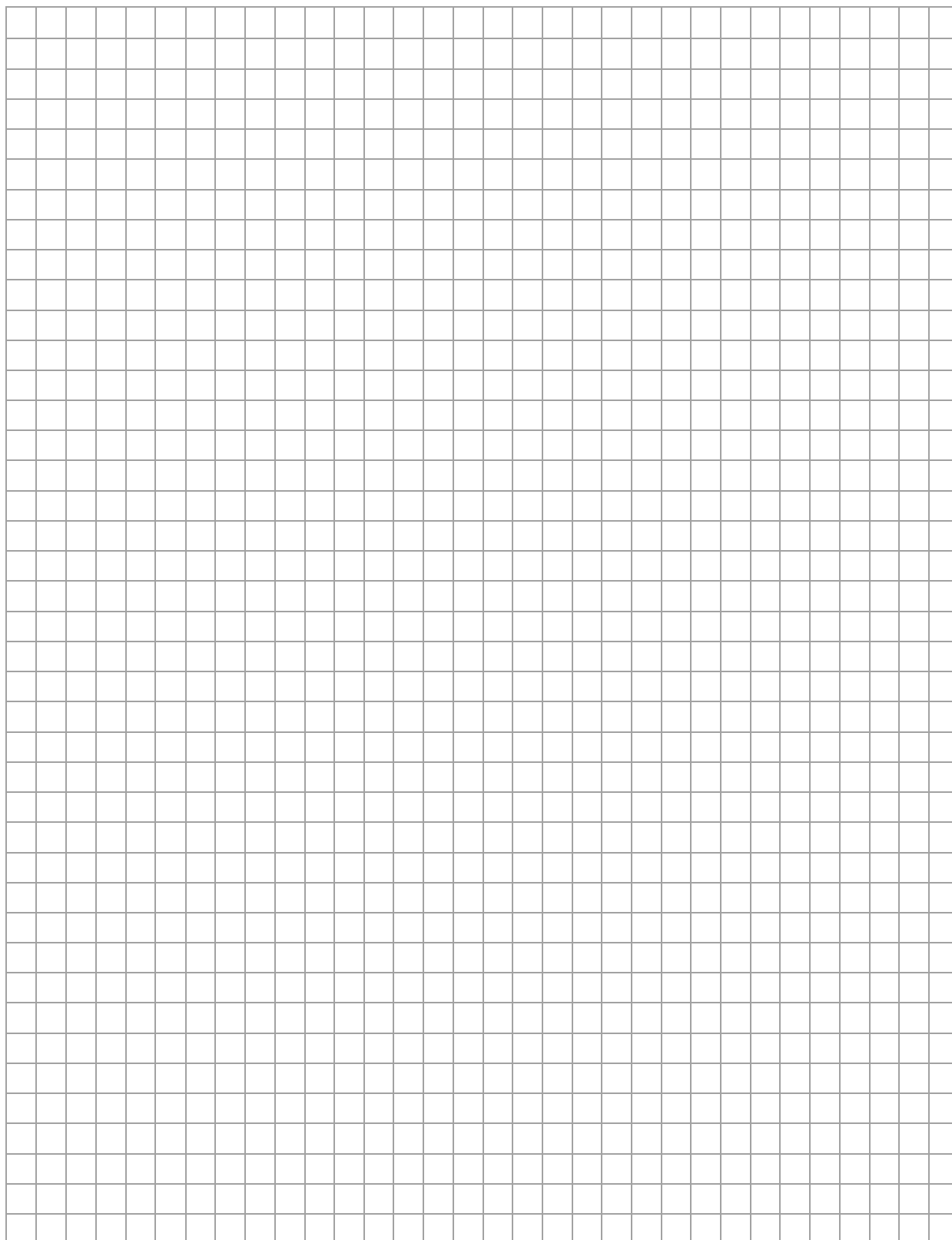
Oblicz długości wszystkich boków czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

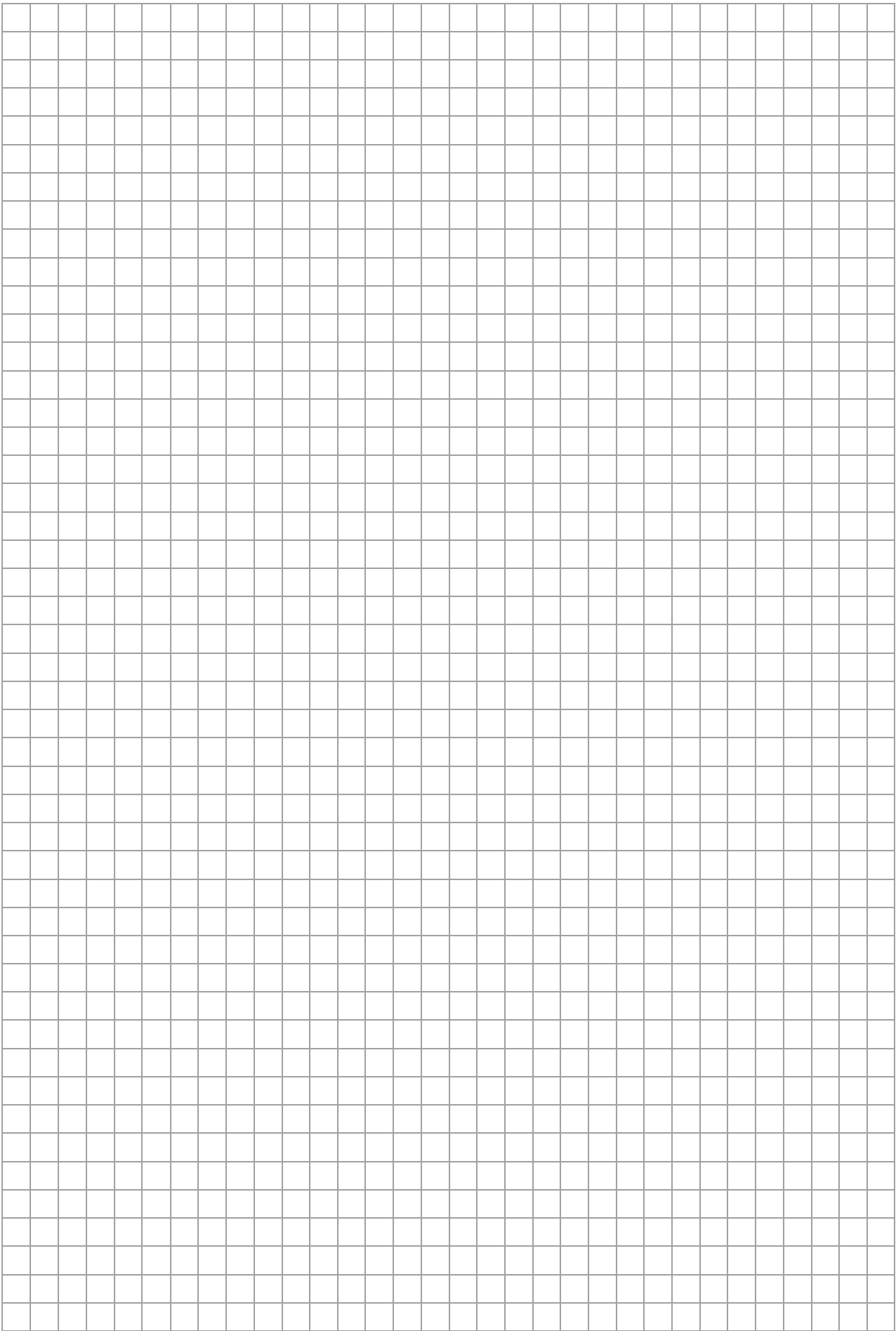




Zadanie 6. (0–4)**Rozwiąż nierówność**

$$|x + 2| - |x - 3| < 6 + x$$

Zapisz obliczenia.



Zadanie 7. (0–5)

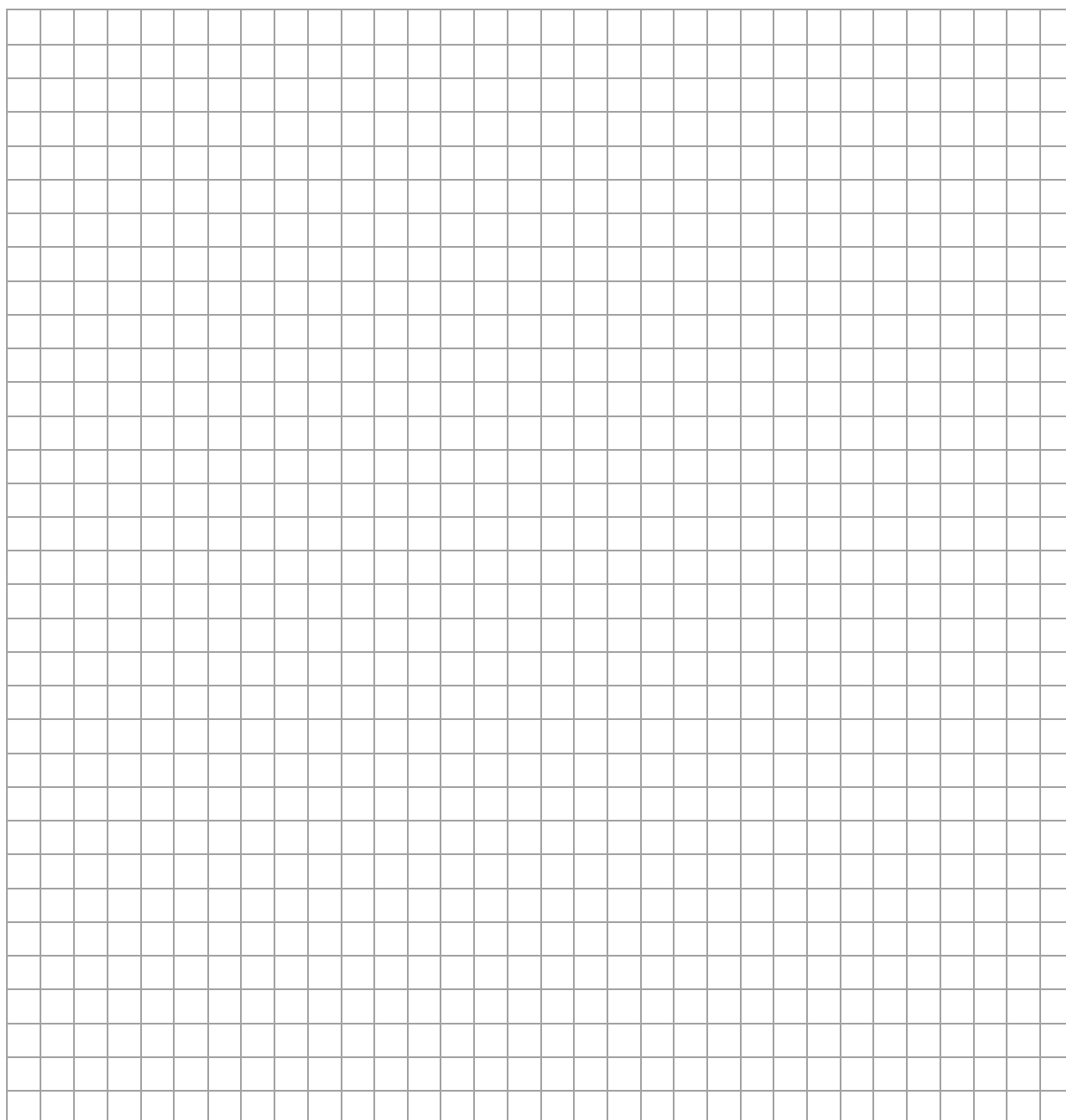
Twierdzenie tangensów pozwala na określenie zależności między kątami i bokami trójkąta.

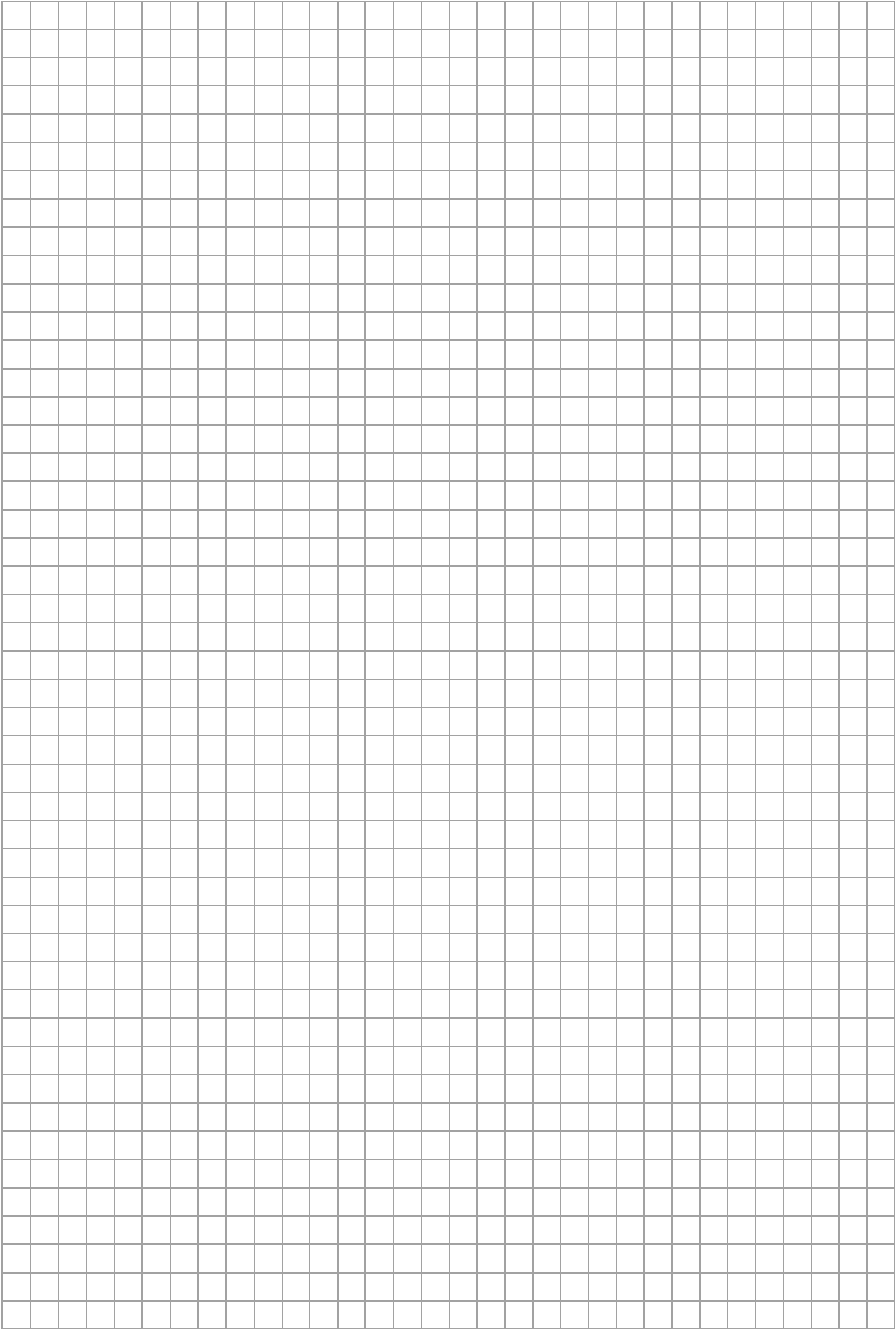
Twierdzenie tangensów:

Jeśli a i b są długościami boków trójkąta oraz α i β są miarami kątów leżących odpowiednio naprzeciwko tych boków, to zachodzi równość

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Udowodnij powyższe twierdzenie.

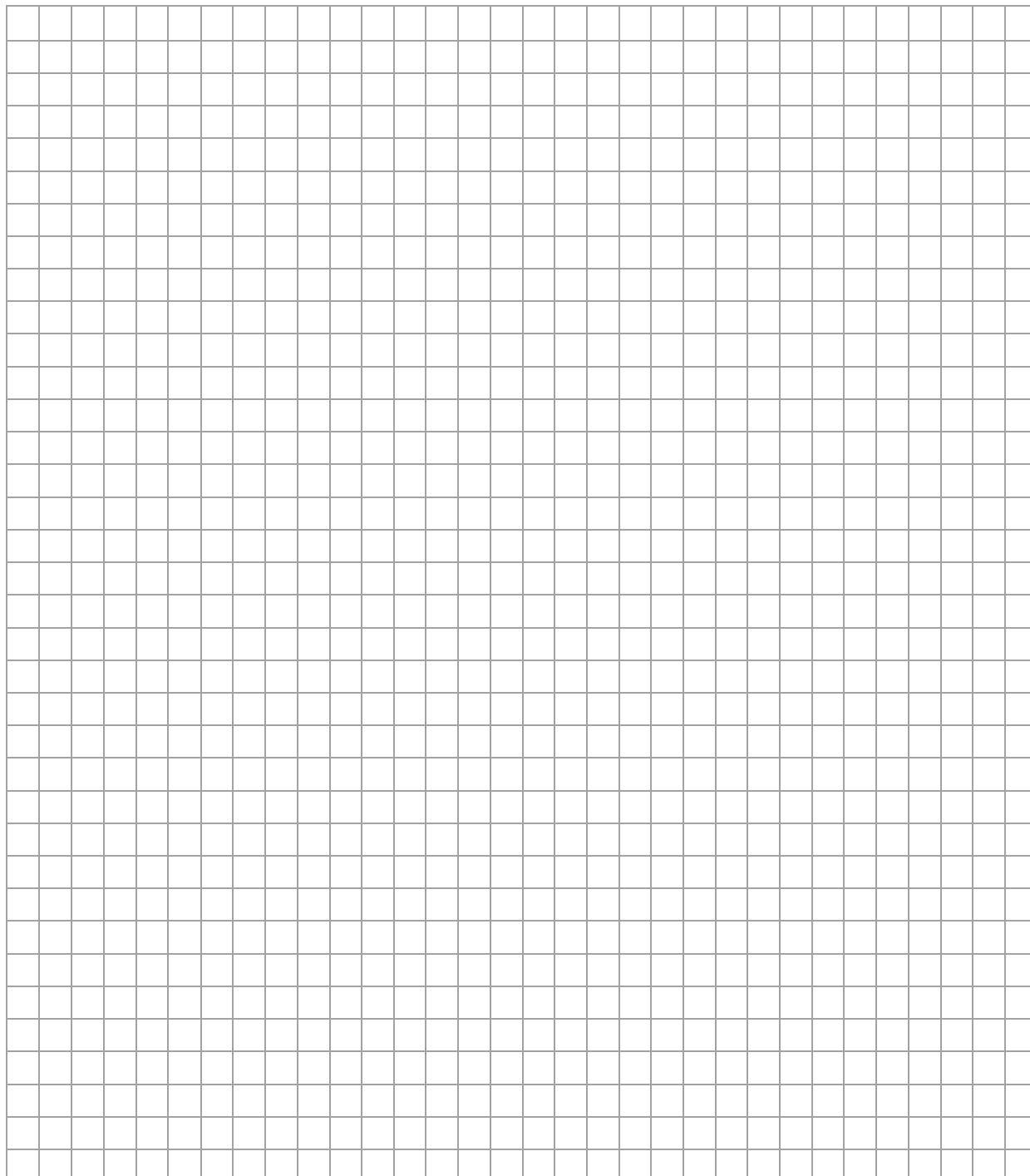


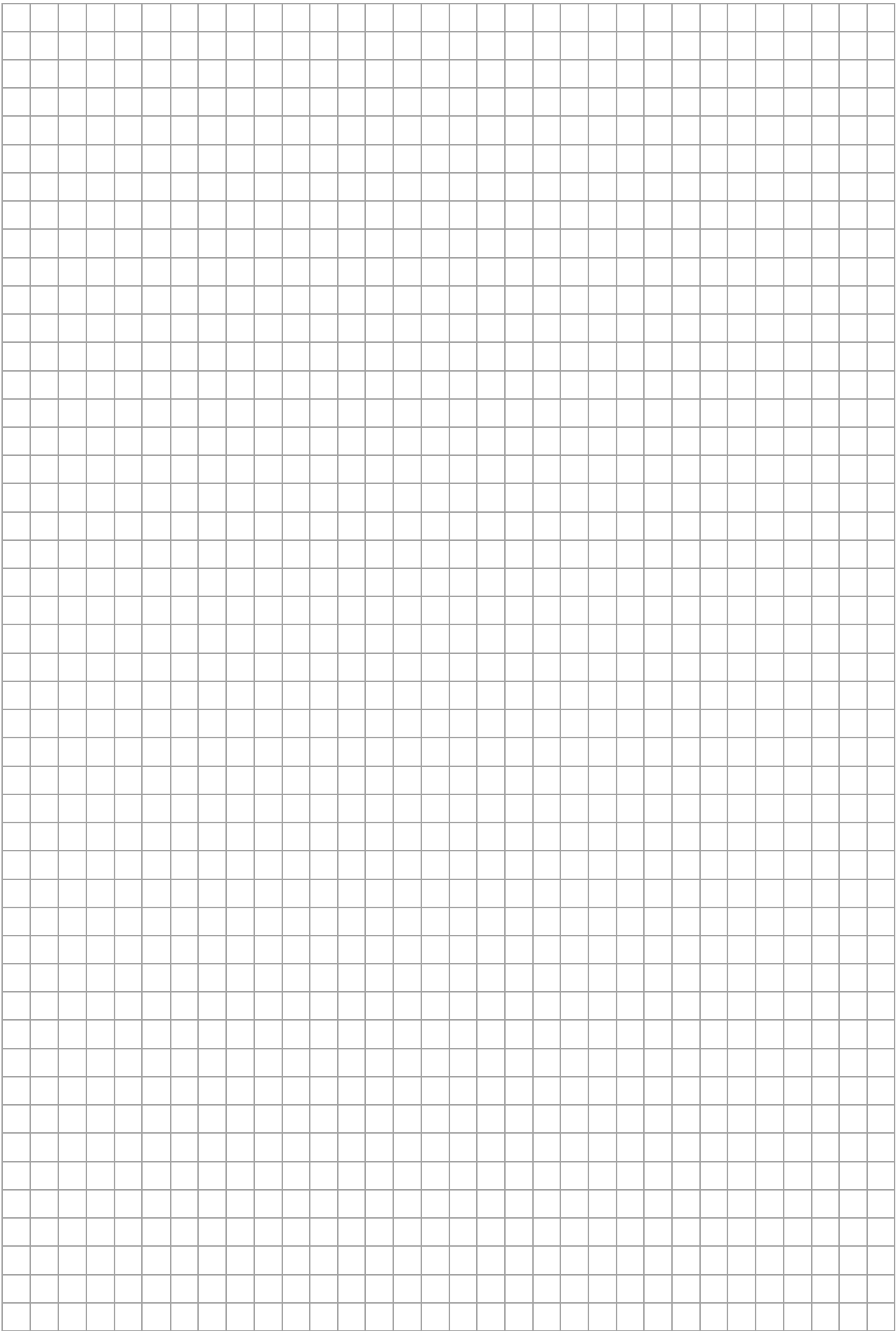


Zadanie 8. (0–6)

Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest określony dla każdej liczby rzeczywistej x . W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $(-2, -4)$ należy do wykresu wielomianu W . Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu wielomianu W w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 2 wynosi 23. Ponadto, suma współczynników wielomianu W jest równa 8.

**Wyznacz wzór wielomianu W oraz oblicz jego wszystkie pierwiastki.
Zapisz obliczenia.**





Zadanie 9. (0–6)

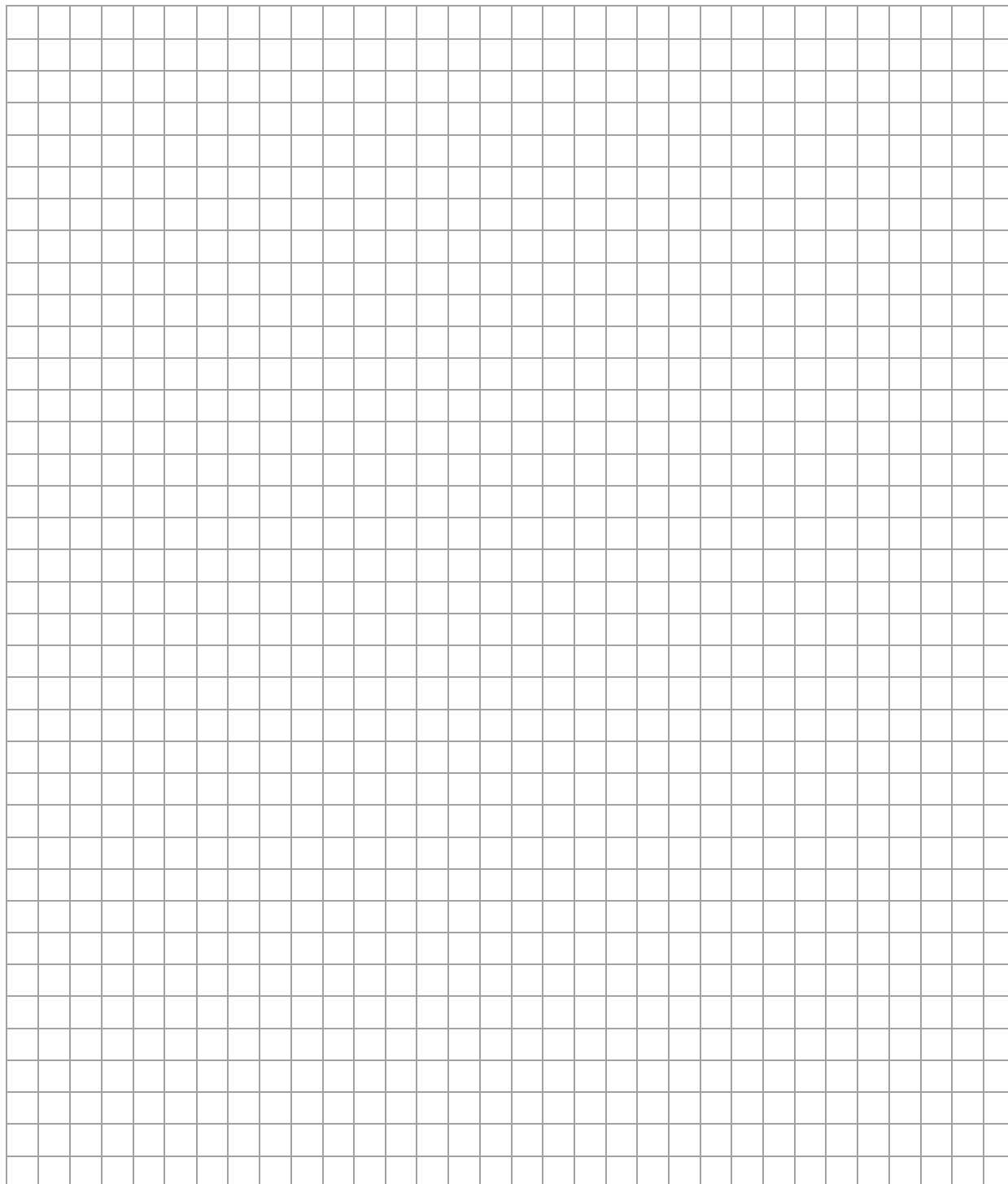
Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

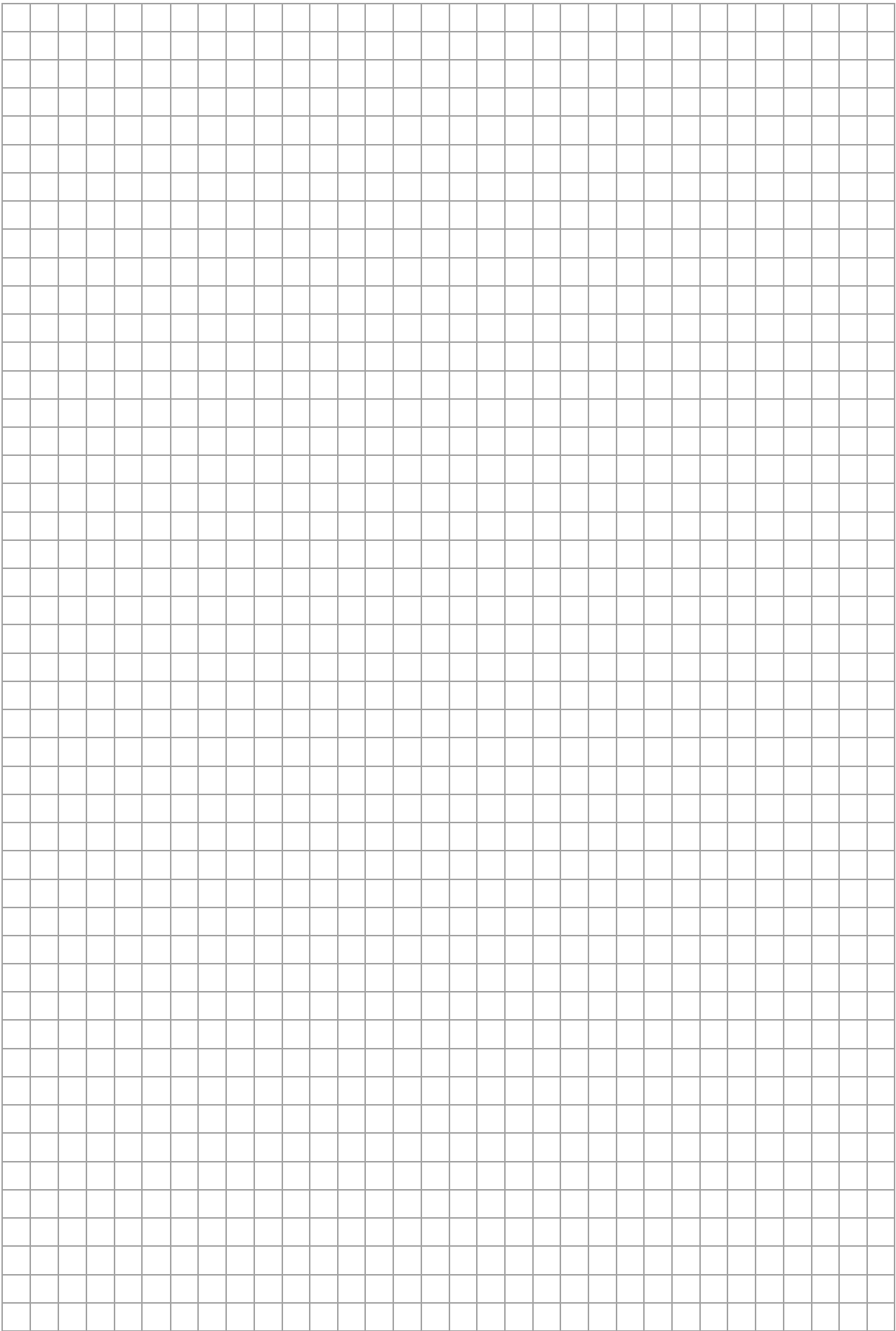
$$x^2 - (2m + 3) \cdot x + 4m + 6 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 > 7 \cdot (x_1 + x_2)$$

Zapisz obliczenia.





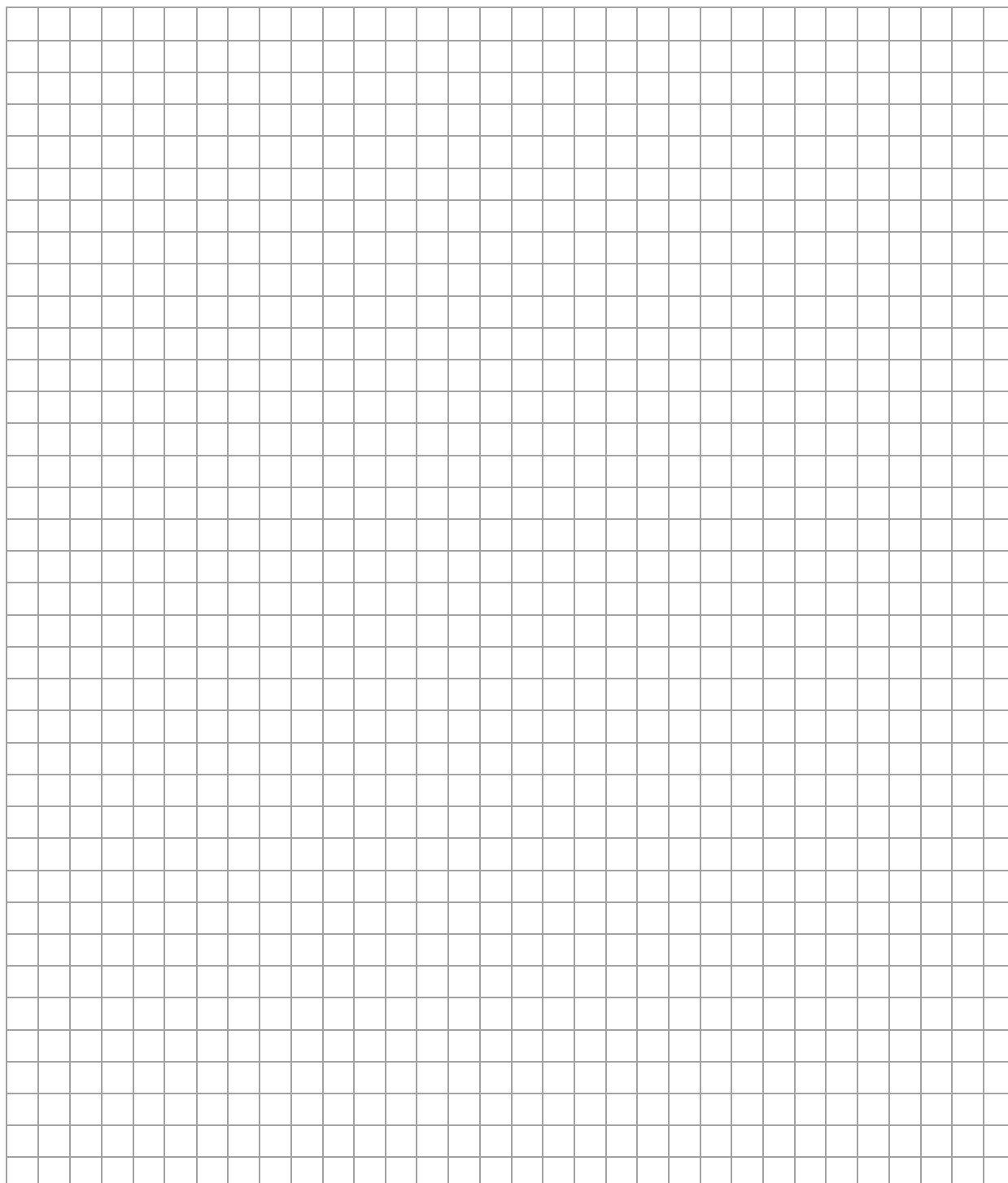
Zadanie 10. (0–6)

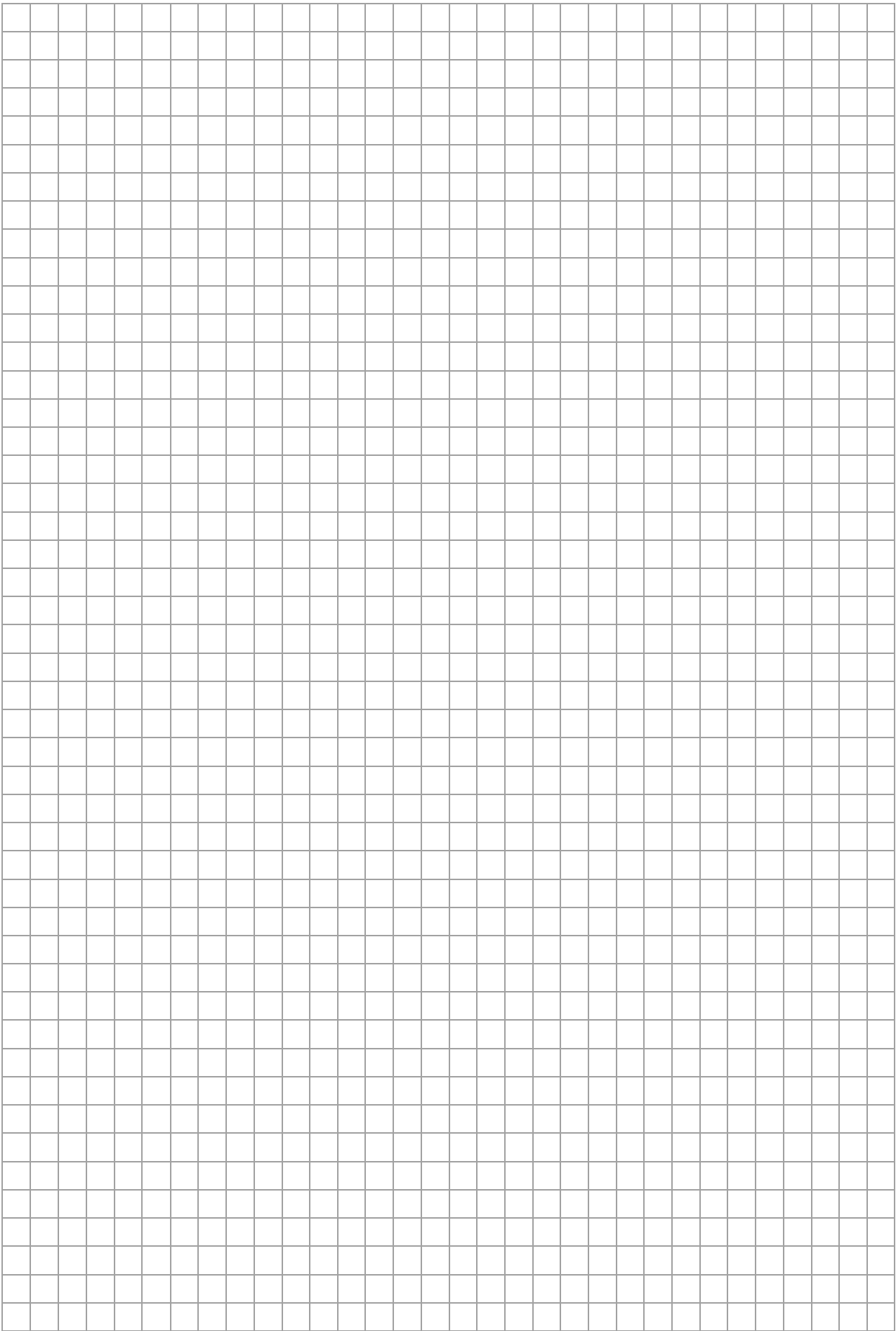
Ciągi (a_n) i (b_n) są geometryczne i monotoniczne oraz spełnione są zależności:

$$a_3 + 2 = b_1 \quad \text{oraz} \quad 2a_2 = 21b_2 \quad \text{oraz} \quad b_1 \cdot b_3 = 16$$

Ciąg $(a_3, 127, b_1)$ jest arytmetyczny.

**Wyznacz wzory ogólne ciągów (a_n) i (b_n) oraz określ ich monotoniczność.
Zapisz obliczenia.**





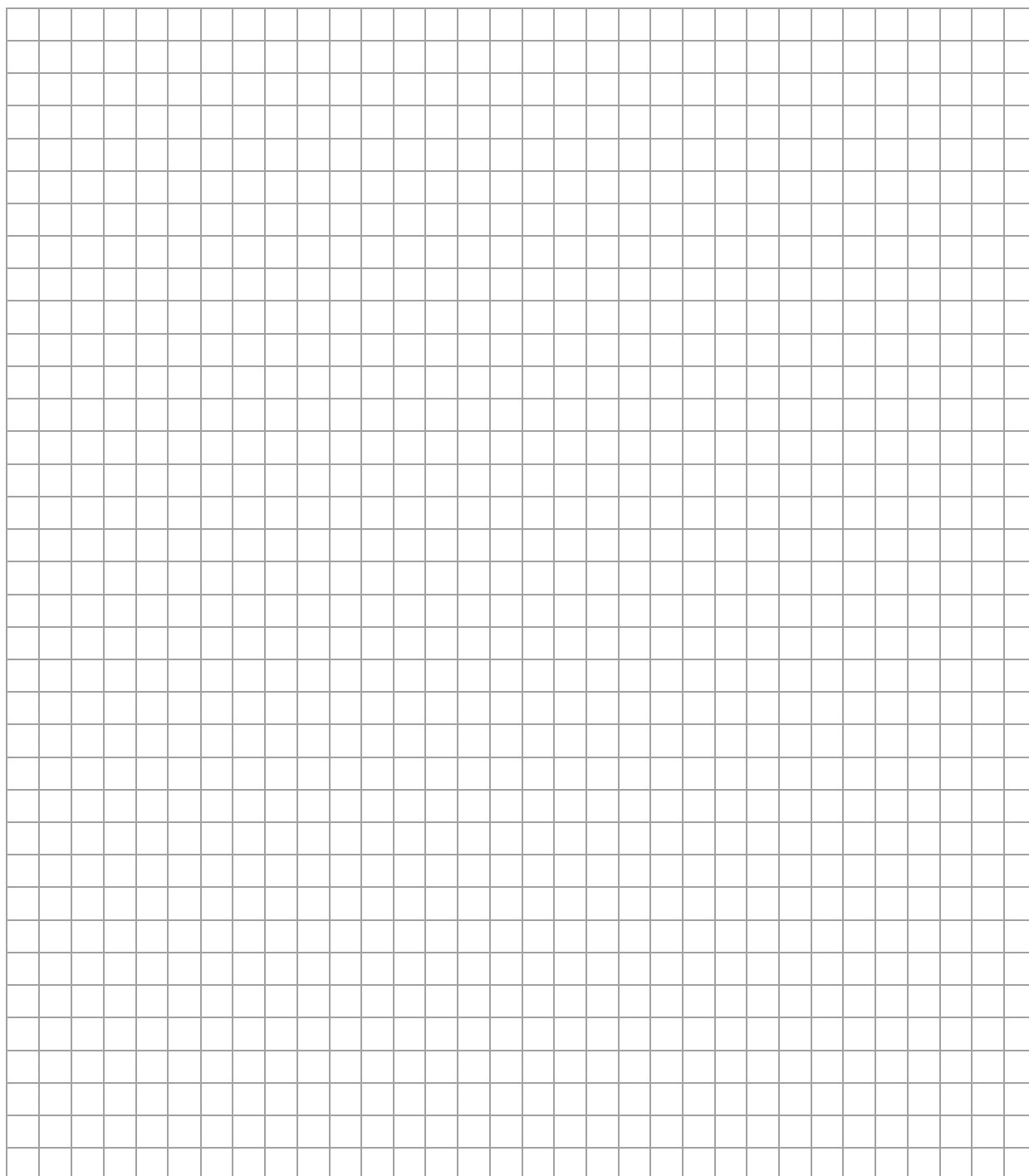
Zadanie 11.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne, których suma długości przekątnej podstawy oraz nachylonej do niej przekątnej graniastosłupa d jest równa 12.

Zadanie 11.1. (0–2)

Wykaż, że objętość graniastosłupa w zależności od długości d jego przekątnej jest równa

$$V(d) = (d - 12)^2 \cdot \sqrt{6d - 36}$$



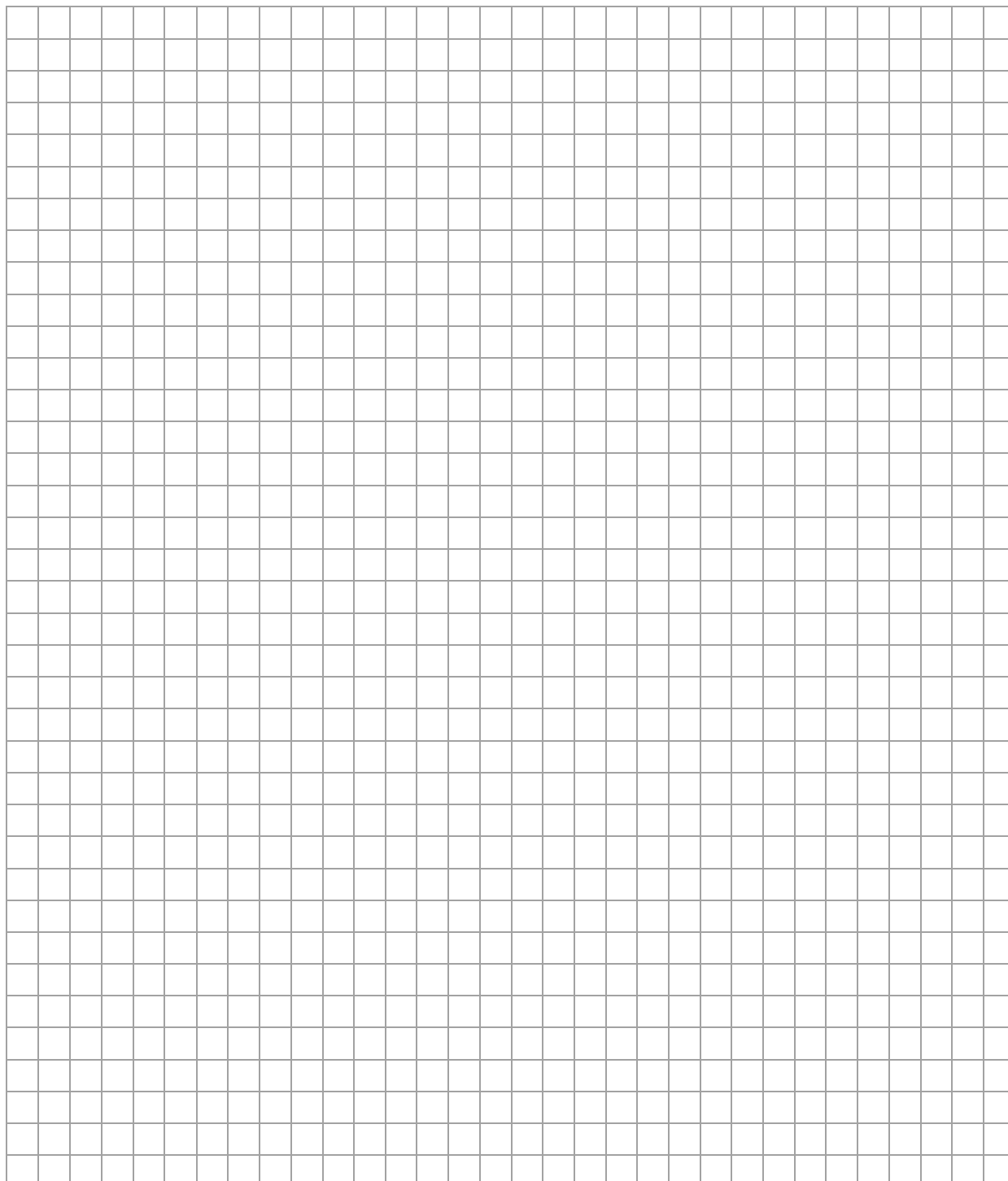
Zadanie 11.2. (0–4)

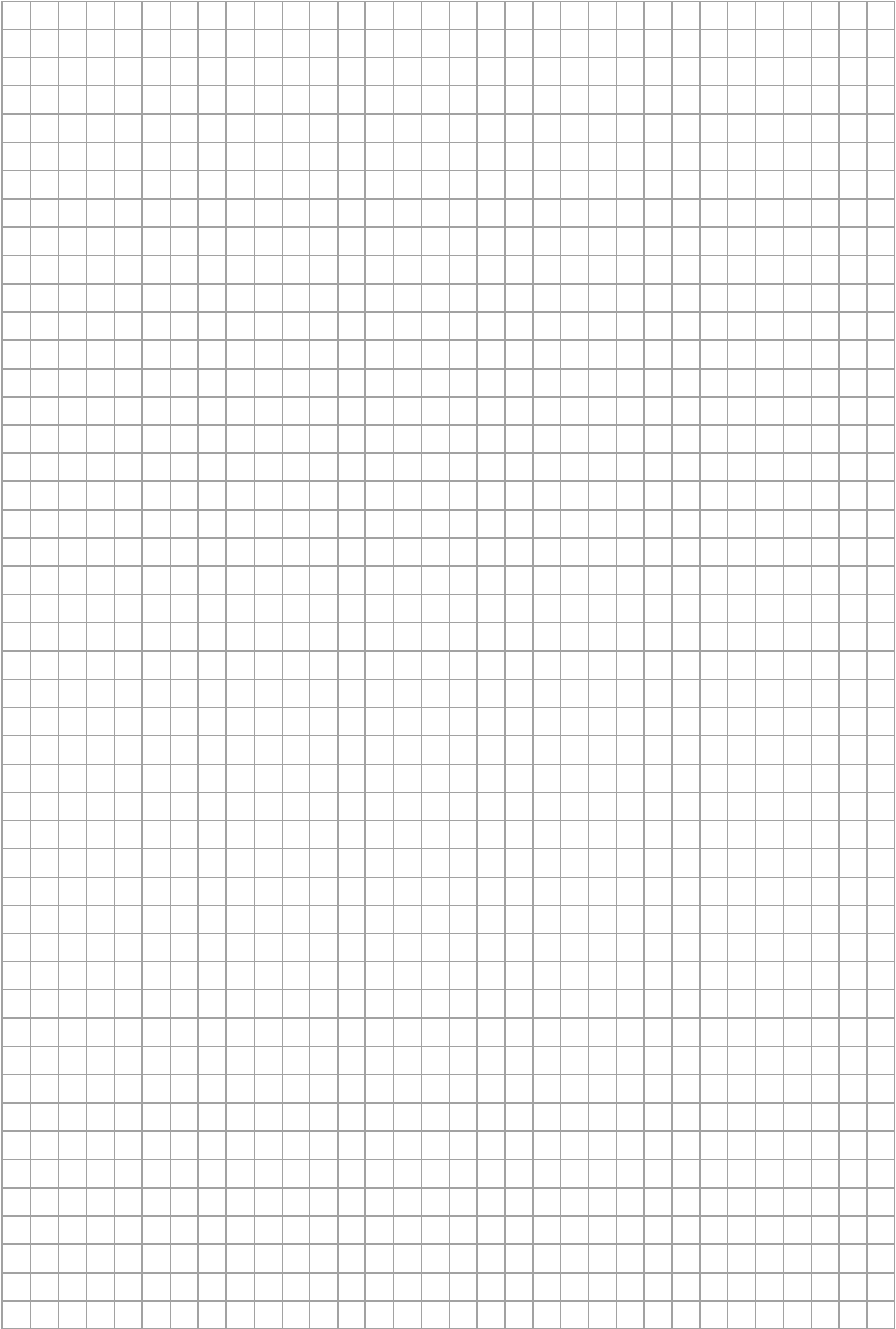
Objętość graniastosłupa w zależności od długości d jego przekątnej jest równa

$$V(d) = (d - 12)^2 \cdot \sqrt{6d - 36}$$

dla $d \in (6,12)$.

Wyznacz długość d przekątnej graniastosłupa, dla której jego objętość jest największa. Zapisz obliczenia.





This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.