



Zacznij
przygotowania
do matury już dziś

Kup vademecum i testy

sklep.operon.pl/matura

KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

Listopad 2017

Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

| Numer zadania | Poprawna odpowiedź | Wskazówki do rozwiązania zadania |
|---------------|--------------------|--|
| 1. | B | Wyznaczamy rozwiązania równania $x^2 + 2x - 3 = 0$: $x_1 = 1, x_2 = -3$, zatem dane równanie będzie miało cztery rozwiązania, jeśli równanie $x^2 + x - m = 0$ będzie miało dwa rozwiązania różne od 1 i -3. Stąd: $\Delta > 0 \wedge f(1) \neq 0 \wedge f(-3) \neq 0$, gdzie $f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$. Stąd: $m > -\frac{1}{4} \wedge m \neq 2 \wedge m \neq 6$. |
| 2. | A | Dzielnikami są liczby: $1, x, x^2, x^3, x^4, y, y^2, xy, xy^2, x^2y, x^2y^2, x^3y, x^3y^2, x^4y, x^4y^2$. |
| 3. | B | Równanie przekształcamy do postaci: $ 2x^2 + 1 = 3 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 3 \vee 2x^2 + 1 = -3 \Rightarrow 2x^2 = 2 \vee 2x^2 = -4 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$, drugie równanie sprzeczne |
| 4. | C | $W(1) = 4 \wedge W(-3) = -16 \wedge W(x) = (x-1)(x+3)P(x) + ax + b$. Układamy układ równań: $\begin{cases} a + b = 4 \\ -3a + b = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow R = 5x - 1$ |
| 5. | D | Oznaczamy a, a, α - odpowiednio krawędź podstawy i krawędź boczna prostopadła do płaszczyzny podstawy ostrosłupa i kąt między ścianami ostrosłupa nieprostokątnymi do płaszczyzny podstawy. Obliczamy pozostałe krawędzie boczne: $a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, a\sqrt{2}$. Obliczamy wysokość ściany bocznej opuszczonej na najdłuższą krawędź boczną, np. z pola: $\frac{1}{2}x \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} \Rightarrow x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ Korzystamy z twierdzenia cosinusów: $(a\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cos \alpha \Rightarrow$ $(a\sqrt{2})^2 = \left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$ |

Zadania otwarte – kodowane

| Numer zadania | Poprawna odpowiedź | Wskazówki do rozwiązania zadania | Liczba punktów |
|---------------|--------------------|---|----------------|
| 6. | 3 1 2 | $y = 5 - 2x \wedge W(x) = 8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) \Rightarrow$ $W(x) = 5[4x^2 - 2x(5 - 2x) + (5 - 2x)^2] \Rightarrow$ $W(x) = 60x^2 - 150x + 125$ Wyrażenie jest trójmianem kwadratowym o współczynniku $a > 0$, zatem przyjmuje wartość najmniejszą dla $x_w = \frac{150}{120} = \frac{5}{4}$, czyli wartość ta wynosi $W\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{125}{4} = 31,25$. | 0-2 |

| Numer zadania | Poprawna odpowiedź | Wskazówki do rozwiązania zadania | Liczba punktów |
|---------------|--------------------|---|----------------|
| 7. | 6 1 5 | Niech a, b, c, d, x będą odpowiednio podstawami, ramionami i środkową trapezu. Korzystamy ze wzoru na środkową trapezu i twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu: $x = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b = 2x \wedge c+d = a+b$, więc obwód trapezu jest równy $4x = \frac{8}{13} \approx 0,61538\dots$ | 0-2 |
| 8. | 3 9 1 | $(x-7)^2 + (y+3)^2 = 4 \Rightarrow S = (7, -3), r = 2$. Obliczamy odległość środka okręgu od prostej l : $d(S, l) = \frac{ 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) - 11 }{\sqrt{9+16}} \Rightarrow d(S, l) = \frac{2}{5}$. Obliczamy długość cięciwy AB : $\left(\frac{1}{2} AB \right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 4 \Rightarrow AB = \frac{8\sqrt{6}}{5} \approx 3,919$. | 0-2 |

Zadania otwarte

| Numer zadania | Modelowe etapy rozwiązywania zadania | Liczba punktów |
|---------------|---|----------------|
| 9. | Rozwiązanie: Wyznaczamy pochodną funkcji: $f'(x) = \frac{4(x-3) - 4x}{(x-3)^2} = -\frac{12}{(x-3)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Prosta l ma współczynnik kierunkowy równy $a_l = -\frac{1}{2}$, zatem prosta k prostopadła do niej ma współczynnik kierunkowy $a_k = 2$. Mamy więc z interpretacji geometrycznej pochodnej równanie: $-\frac{12}{(x-3)^2} = 2 \Rightarrow (x-3)^2 = -6$, a to równanie jest sprzeczne, gdyż lewa strona w dziedzinie funkcji jest dodatnia, a prawa jest ujemna. | 0-3 |
| | Istotny postępowanie: Wyznaczenie pochodnej funkcji $f'(x) = -\frac{12}{(x-3)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równania: $-\frac{12}{(x-3)^2} = 2$ | 2 |
| | Rozwiązanie pełne: Wykazanie tezy zadania: $(x-3)^2 = -6$ – równanie jest sprzeczne, gdyż lewa strona w dziedzinie funkcji jest dodatnia, a prawa jest ujemna, zatem nie istnieje taki punkt, że styczna poprowadzona do krzywej w tym punkcie była prostopadła do prostej l . | 3 |
| 10. | Rozwiązanie: Niech liczba $m \in \mathbb{Z}$, wtedy $\frac{2x}{x^2+4} = m$, przekształcamy równanie do postaci trójmianu kwadratowego z parametrem: $mx^2 - 2x + 4m = 0$ i zapisujemy, dla jakich wartości parametru m ma rozwiązanie: Dla $m = 0$ równanie ma postać: $-2x = 0$, więc ma rozwiązanie. Dla $m \neq 0$ równanie ma rozwiązanie, gdy $\Delta \geq 0 \Rightarrow 4 - 16m^2 \geq 0 \Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$. Uwzględniając oba przypadki, wyznaczamy sumę rozwiązań i otrzymujemy zbiór wartości funkcji: $\mathbb{Z}W = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$. | 0-4 |
| | Postępowanie: Zapisanie równania kwadratowego z parametrem: $mx^2 - 2x + 4m = 0$ | 1 |
| | Istotny postępowanie: Rozważenie przypadku $m = 0$: równanie ma postać: $-2x = 0$, więc ma rozwiązanie | 2 |

| Numer zadania | Modelowe etapy rozwiązywania zadania | Liczba punktów |
|---------------|---|----------------|
| | <p>Pokonanie zasadniczych trudności: Rozważenie przypadku: $m \neq 0: \Delta \geq 0 \Rightarrow 4 - 16m^2 \geq 0 \Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$</p> | 3 |
| | <p>Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie sumy rozwiązań i podanie odpowiedzi: $ZW = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$</p> | 4 |
| 11. | <p>Rozwiązanie: Niech ciąg (a_n) będzie geometryczny zbieżny o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q. Mamy wykazać, że $S_{niep.} \geq 4a_3 \wedge q < 1$. Zapisujemy sumę wszystkich wyrazów nieparzystych ciągu zbieżnego: $S = \frac{a_1}{1-q^2}$, zatem: z treści zadania otrzymujemy nierówność: $\frac{a_1}{1-q^2} \geq 4a_1q^2$, przekształcamy tę nierówność równoważnie: $\frac{a_1}{1-q^2} \geq 4a_1q^2 \Rightarrow \frac{1}{1-q^2} \geq 4q^2$, gdyż możemy podzielić obie strony przez $a_1 > 0$, stąd: $\frac{1-4q^2+4q^4}{1-q^2} \geq 0$, więc $\frac{(1-2q^2)^2}{1-q^2} \geq 0$ – ta nierówność jest prawdziwa, gdyż licznik jest zawsze liczbą nieujemną jako kwadrat liczby rzeczywistej i równy 0 dla $q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, q_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q_1, q_2 \in (-1, 1)$, a mianownik jest liczbą dodatnią ze względu na warunek $q < 1$</p> | 0–2 |
| | <p>Istotny postęp: Zapisanie nierówności: $\frac{a_1}{1-q^2} > 4a_1q^2, q < 1$</p> | 1 |
| | <p>Rozwiązanie pełne: Wykazanie tezy zadania: Zapisanie nierówności w postaci: $\frac{(1-2q^2)^2}{1-q^2} \geq 0$ i uzasadnienie tezy zadania: nierówność jest prawdziwa, gdyż licznik jest zawsze liczbą nieujemną jako kwadrat liczby rzeczywistej, a mianownik jest liczbą dodatnią ze względu na warunek $q < 1$.</p> | 2 |
| 12. | <p>Rozwiązanie: Zapisujemy nierówność w postaci: $4\cos^2 2x - 3 < 0 \Rightarrow \cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ Rozwiązujemy nierówność: $\cos 2x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right) \Rightarrow$ $x \in \left(\frac{1}{12}\pi + k\pi, \frac{5}{12}\pi + k\pi\right) \cup \left(\frac{7}{12}\pi + k\pi, \frac{11}{12}\pi + k\pi\right)$ Wyznaczamy część wspólną rozwiązań z przedziałem $(0, 2\pi)$: $x \in \left(\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi\right)$</p> | 0–3 |
| | <p>Postęp: Zapisanie równości w postaci: $\cos 2x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$</p> | 1 |
| | <p>Pokonanie zasadniczych trudności: Rozwiązanie nierówności w postaci ogólnej: $x \in \left(\frac{1}{12}\pi + k\pi, \frac{5}{12}\pi + k\pi\right) \cup \left(\frac{7}{12}\pi + k\pi, \frac{11}{12}\pi + k\pi\right)$</p> | 2 |
| | <p>Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie części wspólnej z przedziałem $(0, 2\pi)$ i zapisanie rozwiązania: $x \in \left(\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi\right)$</p> | 3 |

| Numer zadania | Modelowe etapy rozwiązywania zadania | Liczba punktów |
|---------------|--|--|
| 13. | <p>Rozwiązanie: Zapisujemy wszystkie przypadki liczb, których suma cyfr jest równa 4:</p> <p>1) 4 na początku i 19 zer 2) 3 na początku, 1 i 18 zer lub 1 na początku, 3 i 18 zer 3) 2 na początku, 2 i 18 zer 4) 2 na początku i dwie 1 i 17 zer lub 1 na początku, 2, 1 i 17 zer 5) 1 na początku, trzy 1 i 16 zer</p> <p>Obliczamy liczbę liczb w każdym przypadku:</p> <p>1) jedna liczba 2) $19 + 19 = 38$ 3) 19 4) $\binom{19}{2} + 19 \cdot 18 = 513$ 5) $\binom{19}{3} = 969$</p> <p>Korzystamy z reguły dodawania i otrzymujemy odpowiedź: $1 + 38 + 19 + 513 + 969 = 1540$</p> | 0–4 |
| | <p>Postęp: Zapisanie wszystkich przypadków liczb, których sumą cyfr jest 4:</p> <p>1) 4 na początku i 19 zer 2) 3 na początku, 1 i 18 zer lub 1 na początku, 3 i 18 zer 3) 2 na początku, 2 i 18 zer 4) 2 na początku i dwie 1 i 17 zer lub 1 na początku, 2, 1 i 17 zer 5) 1 na początku, trzy 1 i 16 zer</p> <p>i zapisanie, że jest jedna liczba z 4 na początku (lub podanie liczby liczb w innym przypadku)</p> | 1 |
| | <p>Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie liczby liczb w innych przypadkach: 2) $19 + 19 = 38$, 3) 19, 4) $\binom{19}{2} + 19 \cdot 18 = 513$, 5) $\binom{19}{3} = 969$</p> | 3 (2 pkt, jeśli pominięto co najwyżej dwa przypadki) |
| | <p>Rozwiązanie pełne: Obliczenie sumy i podanie odpowiedzi: $1 + 38 + 19 + 513 + 969 = 1540$</p> | 4 |
| 14. | <p>Rozwiązanie: Wyznaczamy współrzędne wektorów: $\vec{AB} = [2, 6]$, $\vec{CD} = [4, 12]$, łatwo sprawdzić, że $2\vec{AB} = \vec{CD}$, więc wektory są równoległe, czyli odcinki również są równoległe. Obliczamy długości odcinków: $AB = \sqrt{40}$, $CD = \sqrt{160}$. Obliczamy skalę jednokładności, uwzględniając treść zadania (skala dodatnia): $k = \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{40}} = \sqrt{4} = 2$ Szukamy środka jednokładności: $S = (x, y) \Rightarrow \vec{SC} = 2\vec{SA} \wedge \vec{SD} = 2\vec{SB}$ Zapisujemy równanie: $[-2 - x, -10 - y] = 2[-1 - x, -2 - y]$ lub $[2 - x, 2 - y] = 2[1 - x, 4 - y]$ Rozwiązujemy jedno z równań: $S = (0, 6)$</p> | 0–4 |
| | <p>Istotny postęp: Wyznaczenie współrzędnych wektorów: $\vec{AB} = [2, 6]$, $\vec{CD} = [4, 12]$ i sprawdzenie, że $2\vec{AB} = \vec{CD}$, więc wektory są równoległe, czyli odcinki również są równoległe.</p> | 1 |
| | <p>Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie długości odcinków: $AB = \sqrt{40}$, $CD = \sqrt{160}$ i obliczenie skali jednokładności uwzględniając, że skala jest dodatnia: $k = 2$</p> | 2 |

| Numer zadania | Modelowe etapy rozwiązywania zadania | Liczba punktów |
|---------------|--|--|
| | Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie współrzędnych środka jednokładności: $S = (0,6)$ | 4 (3 pkt, jeśli przy dobrej metodzie popełniono błąd rachunkowy) |
| 15. | <p>Rozwiązanie: Wprowadzamy oznaczenia: $ABCS$ – dany ostrosłup o wierzchołku S i spodku wysokości S' SD – wysokość ściany bocznej BCE – otrzymany przekrój</p> <p>$\angle SAS' = \alpha, \angle EDA = \frac{\alpha}{2}$</p> <p>Rozpatrujemy trójkąt ADE: $\angle AED = 180^\circ - \alpha - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle AED = 180^\circ - \frac{3}{2}\alpha, AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$</p> <p>Korzystamy z twierdzenia sinusów w tym trójkącie $\frac{ AD }{\sin\left[180^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right]} = \frac{ DE }{\sin\alpha}$, stąd: $ED = \frac{a\sqrt{3} \sin\alpha}{2 \sin\frac{3}{2}\alpha}$</p> <p>Obliczamy pole przekroju $P_{BCE} = \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{3} \sin\alpha}{2 \sin\frac{3}{2}\alpha} \Rightarrow P_{BCE} = \frac{a^2 \sqrt{3} \sin\alpha}{4 \sin\frac{3}{2}\alpha}$</p> | 0–4 |
| | <p>Istotny postępowanie: Wprowadzenie oznaczeń: $ABCS$ – dany ostrosłup o wierzchołku S i spodku wysokości S' SD – wysokość ściany bocznej BCE – otrzymany przekrój</p> <p>$\angle SAS' = \alpha, \angle EDA = \frac{\alpha}{2}$</p> | 1 |
| | <p>Istotny postępowanie: Zapisanie danych dla trójkąta ADE: $\angle AED = 180^\circ - \frac{3}{2}\alpha, AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$</p> | 2 |
| | <p>Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie wysokości przekroju: $ED = \frac{a\sqrt{3} \sin\alpha}{2 \sin\frac{3}{2}\alpha}$</p> | 3 |
| | <p>Rozwiązanie pełne: Obliczenie pola przekroju: $P_{BCE} = \frac{a^2 \sqrt{3} \sin\alpha}{4 \sin\frac{3}{2}\alpha}$</p> | 4 |
| 16. | <p>Rozwiązanie: A – wylosowanie kuli białej z losowo wybranej urny po rozmieszczeniu białych kul B_1, B_2 – odpowiednio wylosowanie urny I, wylosowanie urny II n – liczba kul białych dołożonych do urny I, $n \in \{0,1,2,3\}$</p> <p>$P(A/B_1) = \frac{n}{7+n}, P(A/B_2) = \frac{3-n}{6-n}$</p> <p>$P(B_1) = \frac{1}{2}, P(B_2) = \frac{1}{2}$</p> <p>$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{7+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3-n}{6-n} = \frac{6n - n^2 + 3n + 21 - 7n - n^2}{2(n+7)(6-n)} = \frac{-2n^2 + 2n + 21}{2(n+7)(6-n)}$</p> <p>Zapisujemy równanie: $\frac{-2n^2 + 2n + 21}{2(n+7)(6-n)} = \frac{17}{72}$</p> <p>Rozwiązujemy równanie: $(n = 2 \vee n = -\frac{21}{5}) \wedge n \in \{0,1,2,3\} \Rightarrow n = 2$</p> | 0–4 |

| Numer zadania | Modelowe etapy rozwiązywania zadania | Liczba punktów |
|---------------|---|----------------|
| | <p>Istotny postępowanie: Wprowadzenie oznaczeń: A – wylosowanie kuli białej z losowo wybranej urny po rozmieszczeniu białych kul B_1, B_2 – odpowiednio wylosowanie urny I, wylosowanie urny II n – liczba kul białych dołożonych do urny I, $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ $P(B_1) = \frac{1}{2}, P(B_2) = \frac{1}{2}$</p> | 1 |
| | <p>Istotny postępowanie: Zapisanie prawdopodobieństw: $P(A/B_1) = \frac{n}{7+n}, P(A/B_2) = \frac{3-n}{6-n}, n \in \{0, 1, 2, 3\}$</p> | 2 |
| | <p>Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie prawdopodobieństwa: $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3-n}{6-n} = \frac{6n - n^2 + 3n + 21 - 7n - n^2}{2(n+7)(6-n)} = \frac{-2n^2 + 2n + 21}{2(n+7)(6-n)}$</p> | 3 |
| | <p>Rozwiązanie pełne: Zapisanie równania $\frac{-2n^2 + 2n + 21}{2(n+7)(6-n)} = \frac{17}{72}$ i rozwiązanie go w dziedzinie: $n = 2$</p> | 4 |
| 17. | <p>Rozwiązanie: Niech $f(x) = x^2 + (2m+1)x - 3m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}$ Równanie $x^2 + (2m+1)x - 3m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{4} = 0$ ma dwa rozwiązania wtedy, gdy: $(\Delta > 0 \wedge f(4) > 0 \wedge x_w < 4)$ $\Delta = 16m^2 + 6m, m_1 = -\frac{3}{8}, m_2 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{3}{8}\right) \cup (0, +\infty)$ $f(4) = -3m^2 + \frac{15}{2}m + \frac{81}{4}, f(4) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5-\sqrt{133}}{4}, \frac{5+\sqrt{133}}{4}\right)$ $x_w < 4 \Leftrightarrow -\frac{2m+1}{2} < 4 \Rightarrow m \in \left(-\frac{9}{2}, +\infty\right)$ Wyznaczamy część wspólną wszystkich warunków: $m \in \left(\frac{5-\sqrt{133}}{4}, -\frac{3}{8}\right) \cup \left(0, \frac{5+\sqrt{133}}{4}\right)$</p> | 0-4 |
| | <p>I część: Zapisanie i rozwiązanie warunków istnienia dwóch różnych pierwiastków: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{3}{8}\right) \cup (0, +\infty)$</p> | 1 |
| | <p>II część: Rozwiązanie warunków: oba pierwiastki mniejsze od 4: $f(4) > 0 \vee x_w < 4$ $f(4) = -3m^2 + \frac{15}{2}m + \frac{81}{4}, f(4) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5-\sqrt{133}}{4}, \frac{5+\sqrt{133}}{4}\right)$ lub rozwiązanie warunku: $x_w < 4 \Leftrightarrow -\frac{2m+1}{2} < 4 \Rightarrow m \in \left(-\frac{9}{2}, +\infty\right)$</p> | 1 |
| | <p>Rozwiązanie warunku: $f(4) = -3m^2 + \frac{15}{2}m + \frac{81}{4}, f(4) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5-\sqrt{133}}{4}, \frac{5+\sqrt{133}}{4}\right)$ i rozwiązanie warunku: $x_w < 4 \Leftrightarrow -\frac{2m+1}{2} < 4 \Rightarrow m \in \left(-\frac{9}{2}, +\infty\right)$</p> | 1 |
| | <p>III część: Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań wszystkich warunków: $m \in \left(\frac{5-\sqrt{133}}{4}, -\frac{3}{8}\right) \cup \left(0, \frac{5+\sqrt{133}}{4}\right)$</p> | 1 |

| Numer zadania | Modelowe etapy rozwiązywania zadania | Liczba punktów |
|---------------|--|----------------|
| 18. | <p>Rozwiązanie: Wprowadzamy oznaczenia: $ABCD$ – dany prostokąt $AB = x, BC = y$ Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa: $4R^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{4R^2 - x^2}$ Wyznaczamy pole prostokąta: $P = xy \Rightarrow P(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $D = (0, 2R)$, zatem $P(x) = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$ Wprowadzamy funkcję pomocniczą $f(x) = 4R^2x^2 - x^4$ $f'(x) = 8R^2x - 4x^3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8R^2x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = R\sqrt{2} \vee x = -R\sqrt{2}$ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, R\sqrt{2}) \wedge f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (R\sqrt{2}, 2R)$, zatem funkcja rośnie w przedziale $(0, R\sqrt{2})$ i maleje w przedziale $(R\sqrt{2}, 2R)$, więc w punkcie $x = R\sqrt{2}$ funkcja osiąga maksimum będące największą wartością funkcji Funkcji $f(x)$, więc również funkcji $P(x)$ $P(R\sqrt{2}) = 2R^2$</p> | 0–7 |
| | <p>I część: Wyznaczenie wzoru funkcji określającej pole czworokąta Zapisanie zależności między bokami prostokąta $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$</p> | 1 |
| | <p>Wyznaczenie wzoru na pole prostokąta: $P(x) = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$</p> | 1 |
| | <p>Zapisanie dziedziny funkcji: $x \in (0, 2R)$</p> | 1 |
| | <p>II część: Zbadanie pochodnej i wyznaczenie ekstremum Wyznaczenie wzoru pochodnej funkcji pomocniczej $f'(x) = 8R^2x - 4x^3$</p> | 1 |
| | <p>Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = R\sqrt{2}$</p> | 1 |
| | <p>Zbadanie znaków pochodnej i zapisanie wniosku dotyczącego minimum funkcji: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, R\sqrt{2}) \wedge f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (R\sqrt{2}, 2R)$, zatem funkcja rośnie w przedziale $(0, R\sqrt{2})$ i maleje w przedziale $(R\sqrt{2}, 2R)$, więc w punkcie $x = R\sqrt{2}$ funkcja osiąga maksimum będące największą wartością funkcji f, więc również funkcji P</p> | 1 |
| | <p>III część: Wyznaczenie największej wartości funkcji: $P(R\sqrt{2}) = 2R^2$</p> | 1 |

**TWÓJ KOD DOSTĘPU
DO GIEŁDY MATURALNEJ**

→ ZOBACZ NA NASTĘPNEJ STRONIE

TWÓJ KOD DOSTĘPU

E1D751F19

Wybierz

Zdecydowanie
NAJLEPSZY SERWIS DLA
MATURZYSTÓW
WWW.GIELDAMATURALNA.PL

DLA CIEBIE:

► WIĘCEJ ZADAŃ

► PEŁEN DOSTĘP do całego serwisu przez 2 tygodnie*!

- 1 Zaloguj się na gielamaturalna.pl
- 2 Wpisz swój kod
- 3 Odblokuj dostęp do bazy tysięcy zadań i arkuszy
- 4 Przygotuj się do matury z nami!

* Kod umożliwia dostęp do wszystkich materiałów zawartych w serwisie gielamaturalna.pl przez 14 dni od daty aktywacji (pierwsze użycie kodu). Kod należy aktywować do dnia 31.12.2017 r.

Najlepsze zakupy
przed egzaminem!

BEZPŁATNA
DOSTAWA

**-15% SUPER
RABAT**



**TESTY, VADEMECUM
I PAKIETY 2018**